

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из физике

Тамна материја у астрофизици и космологији

Ученик

Алекса Маџаревић
одељење 4д

Ментор

др Марко Војиновић
Институт за физику
Универзитета у Београду

Београд, јун 2021.

Апстракт

Овај рад се бави проблемом тамне материје. Прво смо се кратко позабавили историјом овог нерешеног питања. Затим су представљена два различита начина детекције тамне материје. Један се базира на ротационим кривама галаксија док се други базира на гравитационом сочиву. Такође, изведена је формула за угао расејања светлости под утицајем гравитације у оквирима Њутнове физике. Описане су и различите хипотезе које покушавају да објасне тамну материју и упоређена су два приступа објашњавању тамне материје, један који подразумева додавање нове материје и други који подразумева модификацију теорије гравитације. На крају је продискутовано који од ова два приступа је заступљенији и зашто питање тамне материје упркос своме значају и даље није решено скоро сто година након што је први пут формулисано.

Abstract

This article presents the problem of dark matter. We begin by reviewing the history of this unsolved question. Next, we present two different methods to detect dark matter. One is based on the galaxy rotation curves, while the other one on the gravitational lensing effect. Furthermore, we devise the formula for the angle of deflection in the gravitational field within the framework of Newtonian physics. This paper additionally outlines various dark matter hypotheses and contrasts the two approaches to explaining dark matter. One of them postulates adding new matter, while the other one postulates modifying the theory of gravity. In the end, we discuss which one is perceived to be more convincing and why the question of dark matter, despite its significance, remains unsettled almost a century after being formulated for the first time.

Садржај

1	Увод	4
2	Ротационе криве галаксија	5
3	Гравитационо сочиво	11
4	Угао расејања светлости	17
5	Теоријски кандидати за тамну материју	26
6	Закључак	30
A	Критеријум позитивности	31

1 Увод

Један од најбитнијих нерешених проблема савремене физике јесте тамна материја. Иако чини око 27% енергетског састава универзума [1], односно око 85% укупне материје, знамо врло мало о томе шта је заправо тамна материја и да ли је уопште материја или ефекти које видимо могу бити објашњени модификовањем опште теорије релативности.

Проблем тамне материје први пут спомиње Лорд Келвин¹ у свом говору из 1884. године. Наиме, он је на основу дистрибуције брзина звезда које орбитирају око центра галаксије проценио број црних тела која би морала да буду део наше галаксије. Проценивши и масу наше галаксије која је изненађујуће била већа од масе видљивих звезда, закључио је да су многе, можда чак и већина, звезда у галаксији Млечни пут црна тела.

Затим, 1933. године, астроном Фриц Цвики² открива да маса свих звезда у Кома кластеру галаксија заправо представља само један проценат масе која је неопходна да би се галаксије одржале на окупу. Недостајућу масу је звао *dunkle Materie* (тамна материја). Иако су његови прорачуни били нетачни за око ред величине, углавном због лоше вредности Хаблове константе, ипак је тачно закључио да мора постојати додатна материја која би држала кластер на окупу.

Постојање тамне материје остало је под знаком питања деценијама све до 1970-их година када су Вера Рубин³ и Вилијам Кент Форд⁴ потврдили да она заиста постоји, посматрајући сличан феномен. Наиме, користећи нови спектограф да би посматрали ротационе криве галаксија односно расподелу брзина ротације звезда у зависности од центра галаксије, закључили су да је маса звезда које чине типичну галаксију само 10% од неопходне да би галаксија остала на окупу. Након што је њихов резултат потврђен 1978, утицајан научни часопис обајвио је њихове резултате, па је од око 1980. године недостајућа маса и потреба за увођењем тамне материје препозната као велики нерешен проблем у астрономији широм научне заједнице. Такође у овом периоду, истовремено са њима, сличан проблем уочава и Кен Фриман⁵. Он је проучавао ротацију 36 спиралних галаксија и нашао да се за две чинило да имају масу већу него што би могло да буде објашњено на основу светлости коју су испљавале звезде из тих галаксија. Стога су се те галаксије састојале од звезда и тамне материје, коју нисмо могли да видимо, јер не интерагује са светлошћу.

Како се астрономија развијала били смо у могућности да много прецизније и у већем распону удаљености од центра галаксије меримо брзине звезда. Самим тим и непоклапање између очекиване масе галаксија на основу тих мерења и видљиве масе је постајало све јасније. Такође, током 1980-их година примећени су и други ефекти који су додатно потврдили постојање тамне материје. Међу њима су и гравитациона сочива (прво је откривено 1979. године), расподела температуре врелог гаса у галаксијама и кластерима галаксија као и шаблон анизотропија у космичком микроталасном позадинском зрачењу. До данас су забележене и многе друге појаве које се приписују тамној материји, док је детекција потенцијалних честица кандидата један од већих подухвата у физици честица.

Као што смо већ видели у претходном параграфу, тамна материја може бити детектована на много различитих начина. Упркос томе, имамо врло мало сазнања о томе шта она

¹William Thomson, Baron Kelvin (1824 – 1907), шкотски инжењер, математичар и физичар.

²Fritz Zwicky (1898 – 1974), швајцарски астроном и физичар.

³Vera Florence Cooper Rubin (1928 – 2016), амерички астроном.

⁴William Kent Ford (1931), амерички астроном.

⁵Kenneth Charles Freeman (1940), аустралијски астроном.

представља, већ само видимо њене гравитационе ефекте. Самим тим, постоји и доста хипотеза које објашњавају тамну материју и приступи том проблему су врло различити. Ми ћемо се у овом раду посветити двома методама детекције. Једна подразумева мерење већ поменуте расподеле брзина звезда од удаљености од центра галаксије и уочавање неконзистентности између масе добијене на основу те расподеле и масе видљивог дела галаксије, док друга процењује масу удаљених галаксија на основу ефекта гравитационог сочива где поново примећујемо неслагање између масе процењене на тај начин и видљиве масе. Такође ћемо продискутовати различите хипотезе које покушавају да објасне тамну материју.

Структура рада је следећа. Прво ћемо се у другом поглављу позабавити питањем ротационих кривих галаксија. Одредићемо на основу Њутновог закона гравитације зависност брзине звезда од удаљености од центра галаксије. Затим ћемо на основу експерименталних резултата закључити каква би требала да буде расподела масе у галаксији. Такође ћемо прокоментарисати и зашто је та расподела другачија од очекиване и који тачно њен део приписујемо тамној материји.

У трећем поглављу ћемо разматрати ефекат гравитационог сочива. Продискутоваћемо шта се дешава са светлошћу која долази до Земље са удаљених космичких објеката, а притом пролази близу других масивних тела (тзв. гравитационих сочива), попут галаксија или галактичких кластера. Геометријском анализом и користећи формулу за угао расејања светлости у гравитационом пољу масивног тела одредићемо везу између масе гравитационог сочива и угла и растојања мерљивих са Земље. Стога ћемо моћи да одредимо масу галаксије која представља гравитационо сочиво и да је упоредимо са процењеном масом видљивог дела.

Затим ћемо у четвртом поглављу извести еквивалент формуле за угао расејања у Њутновој физици. Апроксимираћемо светлост као мало тело чија маса тежи нули, а брзина брзини светлости и онда ћемо посматрати кретање таквог тела које долази из далека у гравитационом пољу масивне лопте. Извешћемо формулу за трајекторију таквог тела и на основу те трајекторије угао за који скреће у гравитационом пољу.

Пето поглавље је посвећено теоријским кандидатима за тамну материју. У њему ћемо излистати већину битних хипотеза које покушавају да објасне тамну материју. Продискутоваћемо предности и мане два главна приступа објашњавању тамне материје, увођење нове материје и модификовање теорије гравитације, као и како да их разликујемо. Објаснићемо и какве промене у Ајнштајновој једначини поља подразумева сваки од ова два приступа. Такође ћемо описати и изанализирати неколико најбитнијих кандидата за нову материју, укључујући аксионе, стерилне неутрине и суперсиметричне партнере честица Стандардног Модела.

Последње шесто поглавље је закључак у ком ћемо продискутовати добијене резултате и прокоментарисати будућност истраживања ове области. После њега следи додаток у ком се налази доказ критеријума позитивности из четвртог поглавља, док се на самом крају налази списак литературе.

2 Ротационе криве галаксија

Један од првих сигнала да постоји тамна материја јесте проблем ротационих кривих галаксија. Стога ћемо се у овом поглављу осврнути на опис и анализу тих кривих.

Посматрајмо поједностављен модел произвољне галаксије као дводимензионални диск

полупречника R са истом расподелом масе дуж сваке полуправе која полази из центра. Тј. површинска густина масе $\sigma(r, \varphi)$ зависи само од растојања од центра. Посматрајмо кретање једне звезде која ротира на константном растојању r по кружности у гравитационом пољу такве галаксије. Притом занемарујемо било какве спољашње утицаје.

Користећи познату теорему која тврди да је гравитациона сила која делује на тело унутар танке љуске нула, може да се закључи да исто важи и за љуску произвољне дебљине којој густина масе не зависи од угла, већ само од растојања од центра. Наиме, таква љуска се може изделити на бесконачно много танких љуски. Резултујућа гравитациона сила од сваке од тих танких љуски је нула, па је и збир тих резултујућих сила нула.

Примењујући ово закључивање на наш дводимензионалан случај, закључујемо да на кретање звезде не утиче маса галаксије на растојању већем од r . То јест на кретање звезде утиче само маса која се налази на растојању од центра галаксије мањем од r . Стога, можемо поставити једначину кретања звезде. Нека је $v(r)$ брзина звезде, m маса звезде, G гравитациона константа, а $M(r)$ маса дела галаксије који чине сва тела која се налазе на растојању мањем од r од центра. Пошто звезда ротира јер на њу делује гравитациона сила, можемо изједначити израз за Њутнову гравитациону силу са изразом за центрипеталну силу:

$$G \frac{mM(r)}{r^2} = m \frac{v(r)^2}{r}, \quad (1)$$

одакле даље следи

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (2)$$

Наравно, ова формула важи само када је $r \leq R$ (где је R полупречник галаксије). Када је $r > R$ важи следеће:

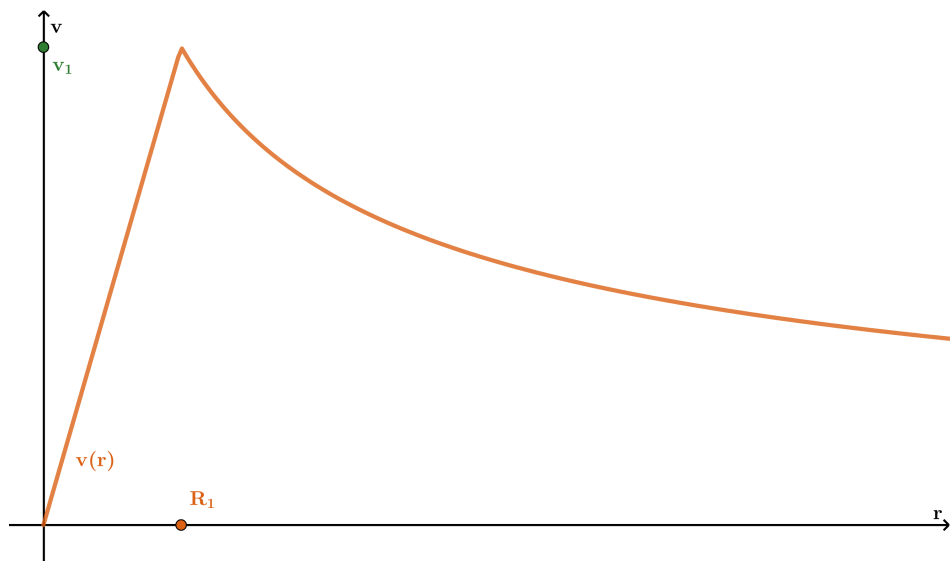
$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(R)}{r}}. \quad (3)$$

На основу формуле (3) очекивали бисмо да део графика зависности брзине небеског тела од удаљености од центра галаксије када је $r > R$ изгледа као на слици 1. Међутим, експерименталним посматрањем великог броја галаксија [2, 3], добијена је приближно расподела брзина небеских тела у зависности од удаљености од центра галаксије као на слици 2. Очигледно постоје значајна неслагања између теоријских очекивања и експерименталних резултата. Да бисмо то објаснили апроксимираћемо график са слике 2 зависношћу са слике 3, при чему је R_1 полупречник видљивог дела галаксије, R_2 параметар који се одређује на основу експерименталних резултата, а v_1 брзина звезда на самом рубу видљивог дела галаксије тј. на растојању R_1 ($v_1 = v(R_1) = \sqrt{\frac{GM(R_1)}{R_1}}$). Такође део графика после R_2 се не може измерити, јер не постоји довољно звезда да би се одредила расподела брзина, али се очекује да ће изгледати овако на основу теоријских разматрања (једначина (3)).

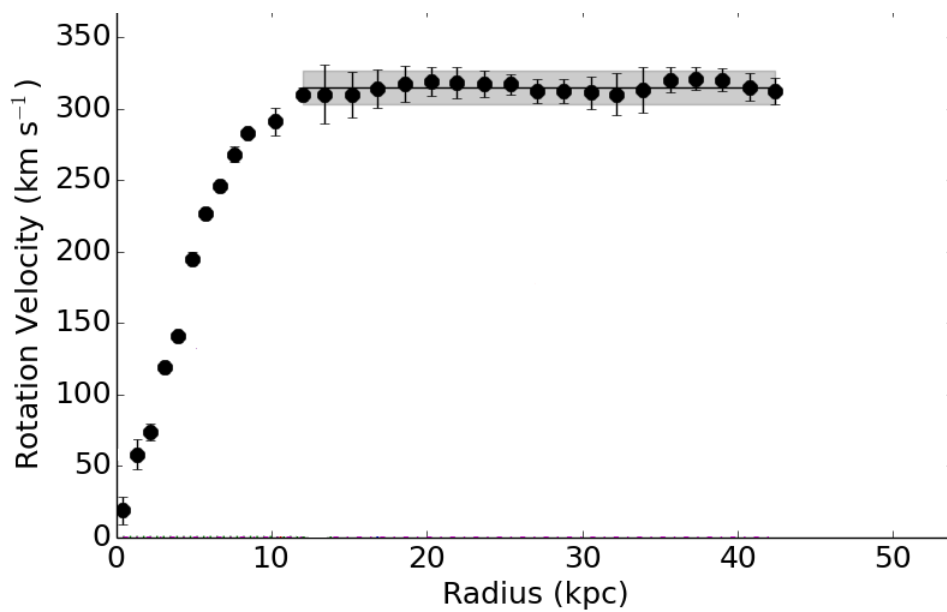
Дакле, на основу графика и једначине (2) (и на основу непрекидности функције $M(r)$) закључујемо да

- на делу од нуле до R_1 пошто $v(r)$ расте линеарно важи следеће

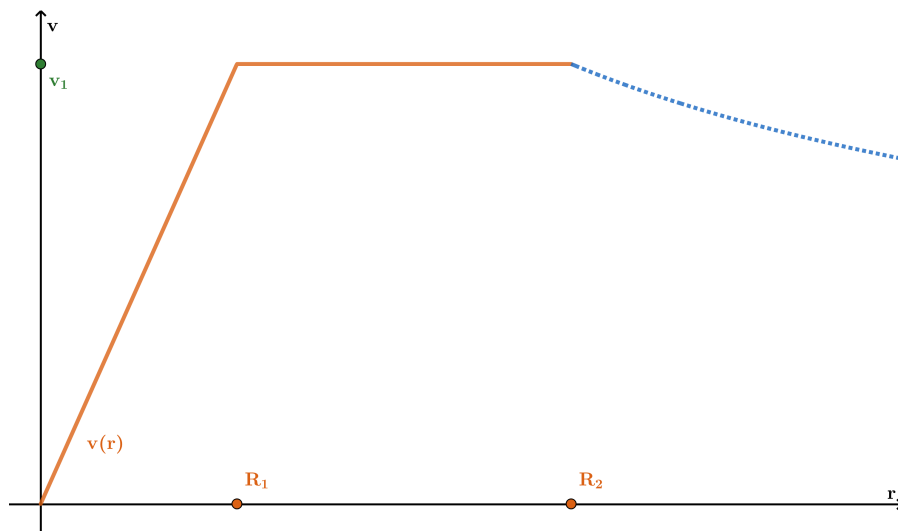
$$v(r) \sim r \Rightarrow \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \sim r \Rightarrow M(r) \sim r^3 \Rightarrow M(r) = c_1 r^3, \quad (4)$$



Слика 1: Теоријски очекивана расподела брзина



Слика 2: График зависности брзине ротације звезде од растојања од центра галаксије ESO563-G021 [2, 3]



Слика 3: Апроксимација експериментално добијене расподеле брзина

али пошто је $v_1 = v(R_1) = \sqrt{\frac{GM(R_1)}{R_1}}$ можемо изразити c_1 тј. $M(r)$ преко v_1 :

$$M(R_1) = \frac{v_1^2 R_1}{G} = c_1 R_1^3 \Rightarrow c_1 = \frac{v_1^2}{GR_1^2} \Rightarrow M(r) = \frac{v_1^2}{GR_1^2} r^3. \quad (5)$$

- на делу од R_1 до R_2 важи следеће

$$v(r) = const. \Rightarrow \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = const. \Rightarrow M(r) \sim r \Rightarrow M(r) = c_2 r, \quad (6)$$

па слично као у претходном случају можемо даље написати (узимајући у обзир да је $v(R_2) = v_2 = v_1$):

$$M(R_2) = \frac{v_2^2 R_2}{G} = c_2 R_2 \Rightarrow c_2 = \frac{v_1^2}{G} \Rightarrow M(r) = \frac{v_1^2}{G} r. \quad (7)$$

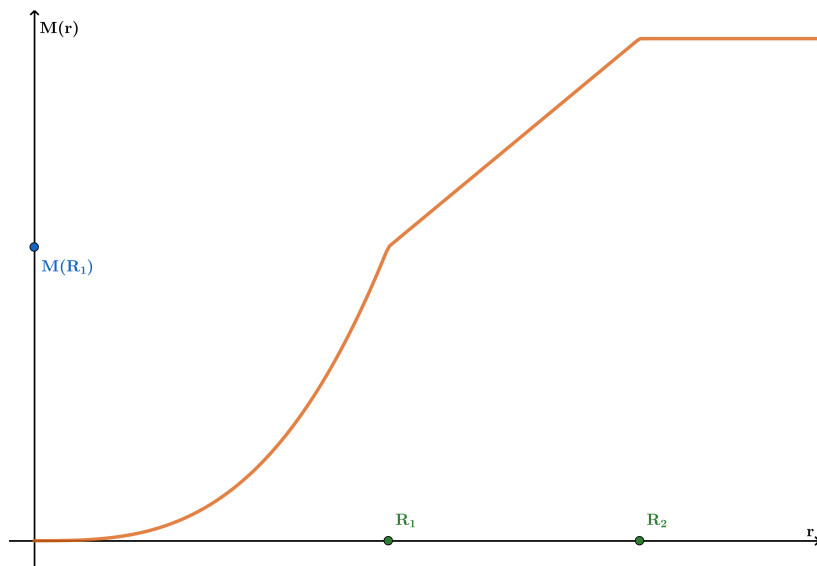
- на делу од R_2 до бесконачности важи следеће

$$M(r) = const. = M(R_2) = \frac{v_1^2 R_2}{G}. \quad (8)$$

Закључујемо:

$$M(r) = \begin{cases} \frac{v_1^2}{GR_1^2} r^3, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{v_1^2}{G} r, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{v_1^2 R_2}{G}, & R_2 \leq r \end{cases}. \quad (9)$$

График функције $M(r)$ приказан је на слици 4.



Слика 4: График зависимости $M(r)$

Међутим, за поређење са експерименталним подацима је некад згоднија функција расподеле масе у зависности од растојања од центра галаксије, $\sigma(r)$. Стога желимо да одредимо везу између $\sigma(r)$ и $M(r)$ и да онда, на основу једначине (9), одредимо како би требало да изгледа $\sigma(r)$.

Имамо да ако је задато $\sigma(r)$, $M(r)$ можемо одредити на следећи начин:

$$\begin{aligned} M(r) &= \iint_{\text{krug}} \sigma(r_1) r_1 dr_1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma(r_1) r_1 dr_1 d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \sigma(r_1) r_1 dr_1 = 2\pi \int_0^r \sigma(r_1) r_1 dr_1, \end{aligned} \quad (10)$$

а ако је задато $M(r)$, сада ћемо извести како можемо израчунати $\sigma(r)$. Користећи Њутн-Лајбницевоу теорему добијамо:

$$\frac{M(r)}{2\pi} = F(r) - F(0), \quad (11)$$

при чему је $F(x)$ примитивна функција (подинтегралне) функције $f(x) = \sigma(x)x$ тј. важи да је $F'(x) = \sigma(x)x$. Пошто су лева и десна страна једначине (11) једнаке онда су и њихови изводи по r једнаки тј. важи следеће:

$$\frac{M'(r)}{2\pi} = F'(r), \quad (12)$$

јер је $F(0)$ константа која не зависи од r (њен извод је нула). Даље користећи да је $F(x)$ примитивна функција за функцију $f(x)$ важи

$$\frac{M'(r)}{2\pi} = f(r) = \sigma(r)r, \quad (13)$$

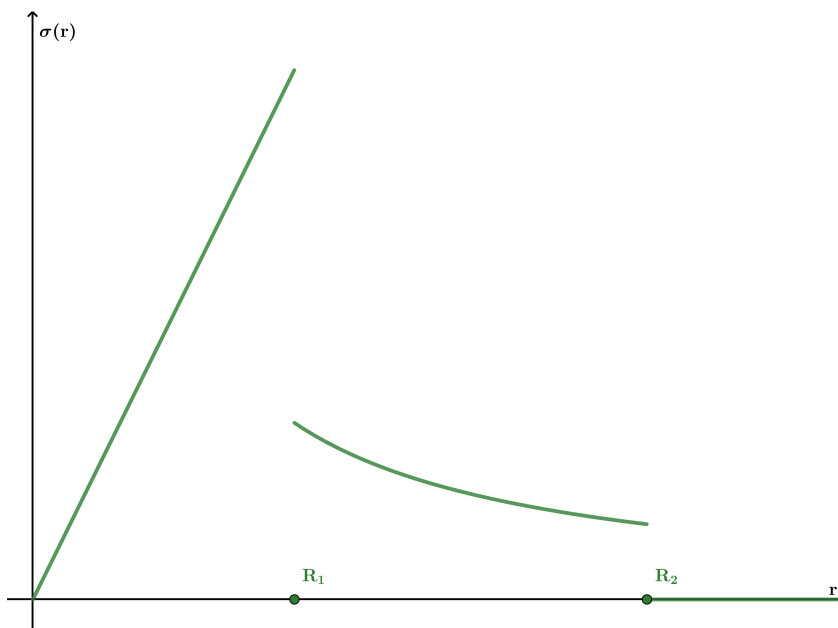
па је

$$\sigma(r) = \frac{M'(r)}{2r\pi}. \quad (14)$$

Користећи ову везу и једначину (9) добијамо функцију $\sigma(r)$

$$\sigma(r) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{3v_1^2}{GR_1^2} r, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{v_1^2}{G} r^{-1}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0, & r \geq R_2 \end{cases} \quad (15)$$

График функције $\sigma(r)$ приказан је на слици 5.



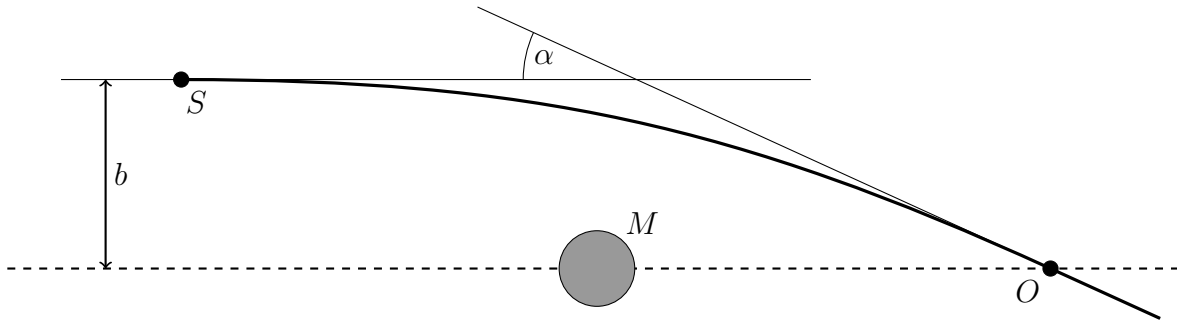
Слика 5: График зависности $\sigma(r)$

Закључујемо да мора постојати маса изван видљивог дела галаксије да би график зависности брзине звезда изгледао као на слици 3. Ову масу приписујемо тамној материји.

3 Гравитационо сочиво

Још једна битна појава која указује на постојање тамне материје јесте гравитационо сочиво. Наиме, општа теорија релативности (ОТР) предвиђа да светлост скреће под утицајем гравитације [4] (прецизније, маса искривљује просторвреме, па је самим тим и правац кретања светлости другачији када је маса присутна него када није). Уколико је S извор светлости, а M маса великог масивног објекта (друге галаксије), G Њутнова гравитациона константа, а b параметар судара упадног зрака светлости (слика 6), на основу ОТР изводи се да светлост скреће за угао расејања [4]

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (16)$$



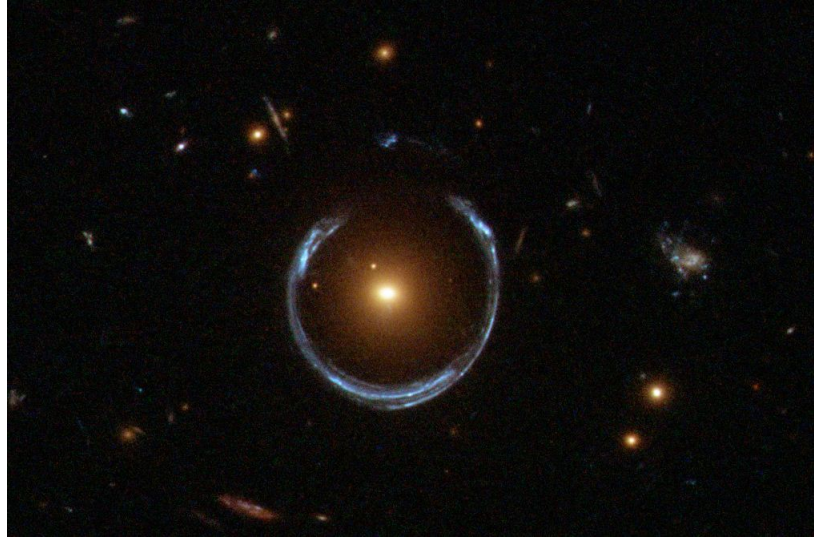
Слика 6: Савијање светлости под утицајем гравитације

И заиста, експериментално је потврђено да када посматрамо далеке изворе светлости (галаксије, квазаре), уколико између нас и извора светлости постоји друга галаксија или масивни објекат долази до кривљења слике извора као на слици 7. Пошто тај масивни објекат ефективно игра улогу сочива из геометријске оптике, називамо га гравитационим сочивом.

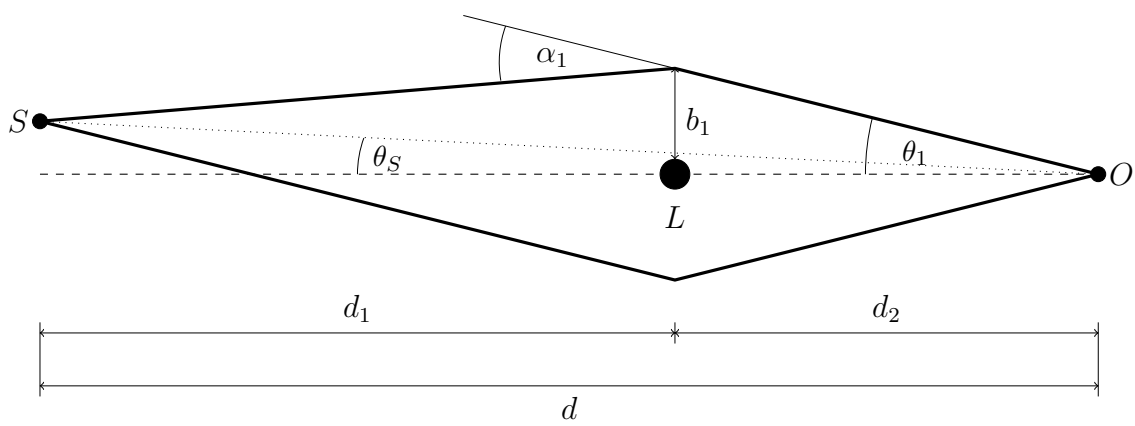
Посматрајмо извор светлости S , масивно тело (галаксију) L и планету Земљу (посматрача) O (слика 8). Тада видимо две слике извора S које настају у пресеку зрака који пролазе са супротних страна L , док сви остали зраци након преламања на сочиву неће стићи до Земље. Стога, довољно је посматрати само та два зрака. Користећи једначину (16) желимо да израчунамо масу галаксије L , коју ћемо означити са M . Да бисмо то урадили неопходни су нам угао α и параметар b_1 који експериментално нису мерљиви. Међутим опсервабилни су углови θ_1 и θ_2 тј. углови под којима видимо два лика извора који се стварају. Такође мерљива су растојања d , d_1 и d_2 и можемо их сматрати познатим. Да бисмо изразили масу M преко θ_1 , θ_2 , d , d_1 и d_2 , посматрајмо одвојено геометрију горњег и доњег зрака. Ради лакшег разумевања сви углови на слици 9 су нацртани да буду значајно већи него у стварности.

Приметимо да је $\sphericalangle OSA = \sphericalangle SOL = \theta_S$, па је $\sphericalangle OSB = \sphericalangle OSA + \sphericalangle ASB = \theta_S + \beta_1$. Даље имамо $\sphericalangle BOS = \sphericalangle BOL - \sphericalangle SOL = \theta_1 - \theta_S$ и $\sphericalangle SBO = \pi - \alpha_1$. Посматрајмо сада $\triangle SBO$:

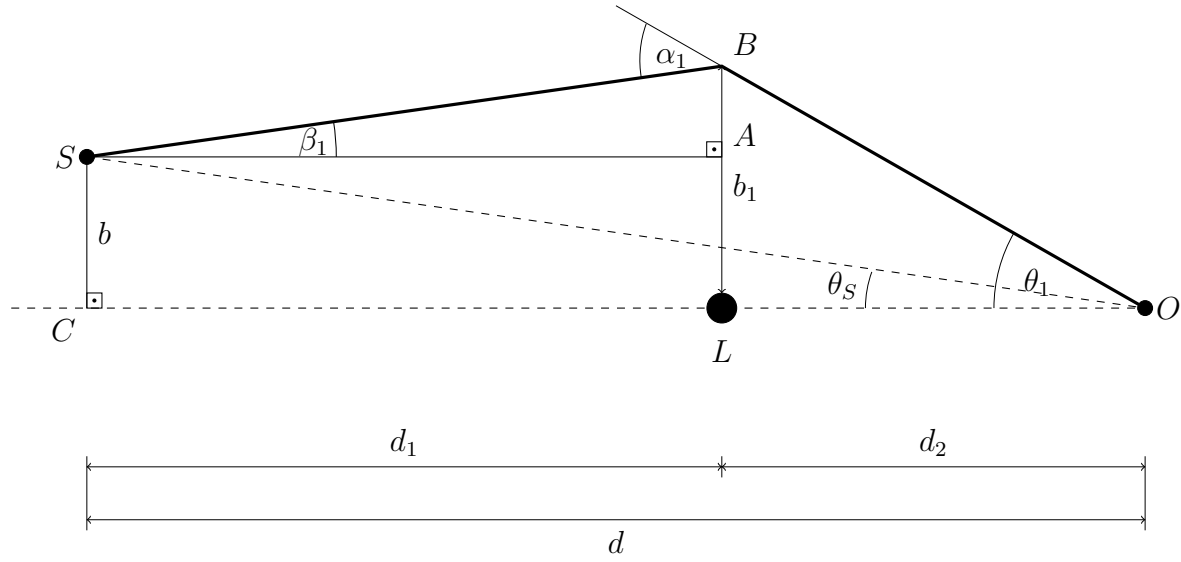
$$\sphericalangle OSB + \sphericalangle SBO + \sphericalangle BOS = \pi \quad \Rightarrow \quad \theta_S + \beta_1 + \pi - \alpha_1 + \theta_1 - \theta_S = \pi, \quad (17)$$



Слика 7: Ефекат гравитационог сочива снимљен Хабловим телескопом



Слика 8: Скица гравитационог сочива



Слика 9: Геометрија горњег зрака

одакле следи

$$\alpha_1 = \beta_1 + \theta_1. \quad (18)$$

Из једначине (16) имамо

$$\alpha_1 = \frac{4GM}{c^2 b_1}. \quad (19)$$

Приметимо да је $SCLA$ правоугаоник, па је $|LA| = |CS| = b$ и $|SA| = |CL| = d_1$. Даље $|AB| = |BL| - |AL| = b_1 - b$. Стога је

$$\beta_1 \approx \text{tg } \beta_1 = \frac{|AB|}{|SA|} = \frac{b_1 - b}{d_1}, \quad (20)$$

док је

$$\theta_1 \approx \text{tg } \theta_1 = \frac{|LB|}{|LO|} = \frac{b_1}{d_2} \quad (21)$$

и

$$\theta_S \approx \text{tg } \theta_S = \frac{|CS|}{|CO|} = \frac{b}{d}. \quad (22)$$

У претходном кораку смо применили познату апроксимацију $\text{tg } x \approx x$ на мале углове θ_1 , θ_S и β_1 . Замењујући изразе (19) и (20) у једнакост (18) даље добијамо:

$$\frac{4GM}{c^2 b_1} = \frac{b_1 - b}{d_1} + \theta. \quad (23)$$

Одавде, користећи да је $b_1 = \theta_1 d_2$ из (21) и $b = \theta_S d$ из (22), следи:

$$\frac{4GM}{c^2 \theta_1 d_2} = \frac{\theta_1 d_2 - \theta_S d}{d_1} + \theta_1. \quad (24)$$

Множећи обе стране са d_1 добијамо:

$$\frac{4GMd_1}{c^2\theta_1 d_2} = \theta_1(d_2 + d_1) - \theta_S d. \quad (25)$$

Приметимо да је $d_1 + d_2 = d$ и помножимо целу једнакост са $\frac{\theta_1}{d}$:

$$\frac{4GMd_1}{c^2 d_2 d} = \theta_1^2 - \theta_S \theta_1. \quad (26)$$

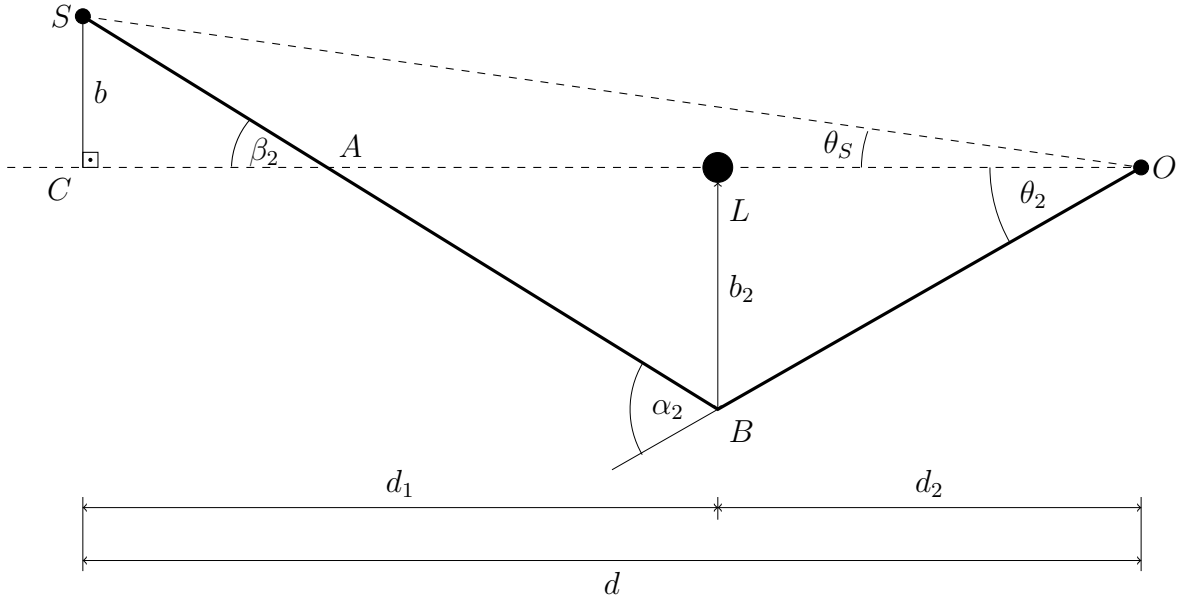
Ако сада дефинишемо величину

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_1}{d_2 d}}, \quad (27)$$

тзв. Ајнштајнов угао, једнакост (26) можемо записати као

$$\theta_E^2 = \theta_1^2 - \theta_S \theta_1. \quad (28)$$

Размотримо сада доњи зрак, и изведимо аналогон једначине (28). Циљ нам је да онда елиминишемо неопсервабилни угао θ_S из једначине (28) тако што ћемо га изразити преко опсервабилног θ_2 и израчунљиве величине θ_E . Прво, приметимо да је $\sphericalangle SAC = \sphericalangle BAL$, па



Слика 10: Геометрија доњег зрака

је онда:

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{|SC|}{|CA|} = \frac{|LB|}{|AL|}. \quad (29)$$

Ако сада уведемо ознаку $s = |CA|$ и уочимо да је $|AL| = d_1 - s$ једнакост (29) се претвара у

$$\frac{b}{s} = \frac{b_2}{d_1 - s}, \quad (30)$$

одакле имамо

$$sb_2 = d_1b - sb, \quad (31)$$

па је

$$s(b_2 + b) = d_1b, \quad (32)$$

то јест

$$s = \frac{d_1b}{b_2 + b}. \quad (33)$$

Из једначине (29) имамо

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{|SC|}{|CA|} = b \frac{1}{s} = b \frac{b_2 + b}{d_1b} = \frac{b_2 + b}{d_1}. \quad (34)$$

У троуглу ABO збир углова је π , па је узимајући у обзир да је $\sphericalangle OBA = \pi - \alpha_2$ и $\sphericalangle BAO = \beta_2$ (слика 10):

$$\beta_2 + \pi - \alpha_2 + \theta_2 = \pi, \quad (35)$$

одакле следи да је

$$\alpha_2 = \theta_2 + \beta_2. \quad (36)$$

Даље, из једначине (16) имамо, слично као за горњи зрак, да је

$$\alpha_2 = \frac{4GM}{c^2b_2}. \quad (37)$$

Такође, са слике 10 се види да је

$$\theta_2 \approx \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{b_2}{d_2}, \quad (38)$$

док је

$$\theta_S \approx \operatorname{tg} \theta_S = \frac{b}{d}, \quad (39)$$

а из (34) имамо

$$\beta_2 \approx \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{b_2 + b}{d_1}, \quad (40)$$

при чему користимо апроксимацију $x \approx \operatorname{tg} x$ за мале углове. Ако сада заменимо изразе (37) и (40) у једначину (36) добијамо:

$$\frac{4GM}{c^2b_2} = \theta_2 + \frac{b_2 + b}{d_1}. \quad (41)$$

Из једначина (38) и (39) имамо редом $b_2 = \theta_2d_2$ и $b = \theta_Sd$, ако то заменимо у (41) добијамо:

$$\frac{4GM}{c^2\theta_2d_2} = \theta_2 + \frac{\theta_2d_2 + \theta_Sd}{d_1}. \quad (42)$$

Ако сада целу једначину помножимо са $d_1\theta_2$ добијамо

$$\frac{4GMd_1}{c^2d_2} = \theta_2^2d_1 + \theta_2^2d_2 + \theta_S\theta_2d. \quad (43)$$

Даље, уколико искористимо да је $\theta_2^2 d_1 + \theta_2^2 d_2 = \theta_2^2 (d_1 + d_2) = \theta_2^2 d$, јер је $d_1 + d_2 = d$ и заменимо израз за θ_E^2 добијамо:

$$\theta_E^2 d = \theta_2^2 d + \theta_S \theta_2 d. \quad (44)$$

Ако поделимо једначину (44) са d добијамо:

$$\theta_E^2 = \theta_2^2 + \theta_S \theta_2, \quad (45)$$

што је тражени аналогон једначине (28) за доњи зрак. Одатле сада имамо

$$\theta_S = \frac{\theta_E^2 - \theta_2^2}{\theta_2}. \quad (46)$$

Замењивањем овог израза у једначину (28) добијамо:

$$\theta_E^2 = \theta_1^2 - \theta_1 \frac{\theta_E^2 - \theta_2^2}{\theta_2}. \quad (47)$$

Помножимо сада са θ_2 да бисмо се ослободили разломка

$$\theta_E^2 \theta_2 = \theta_1^2 \theta_2 - \theta_1 \theta_E^2 + \theta_1 \theta_2^2 \quad \Rightarrow \quad \theta_E^2 \theta_1 + \theta_E^2 \theta_2 = \theta_1^2 \theta_2 + \theta_1 \theta_2^2, \quad (48)$$

одакле следи

$$\theta_E^2 (\theta_1 + \theta_2) = \theta_1 \theta_2 (\theta_1 + \theta_2). \quad (49)$$

Коначно

$$\theta_E^2 = \theta_1 \theta_2. \quad (50)$$

Сада можемо изразити M преко мерљивих величина. Замењујући израз за Ајнштајнов угао (27) у једначину (50) добијамо:

$$\frac{4GM}{c^2} \frac{d_1}{d_2 d} = \theta_1 \theta_2, \quad (51)$$

стога је

$$M = \frac{c^2}{4G} \frac{\theta_1 \theta_2 d_2 d}{d_1}. \quad (52)$$

Једначина (52) нам омогућава да мерењем одговарајућих углова и растојања одредимо масу M тела које игра улогу гравитационог сочива. Међутим, у случају галаксија, испоставља се да скретање светлости није у сагласности са процењеном масом видљивог дела галаксије. Светлост скреће више него што предвиђа теоријски модел видљивог дела галаксије. Другим речима, или има више материје на месту где се налази гравитационо сочиво (галаксија), или је општа теорија релативности погрешна.

4 Угао расејања светлости

Као што смо видели у претходном поглављу, општа теорија релативности предвиђа расејавање светлости у гравитационом пољу сферног тела масе M под углом α из једначине (16). По законима нерелативистичке физике светлост нема масу, па до расејавања не долази, међутим ако светлост апроксимирамо малим телом масе $m \rightarrow 0$, које се креће брзином $v \rightarrow c$, тада Њутнова физика предвиђа ненулти угао расејања α , који можемо израчунати на следећи начин [5].

Нека се тело описано у претходном параграфу креће у гравитационом пољу фиксирани лопте масе M . Пошто је гравитациона сила централна сила смемо да искористимо закон одржања момента импулса и механичке енергије да бисмо добили једначину кретања тела. Посматрамо случај кретања у xy равни. Потенцијална енергија гравитационе интеракције тела и лопте је:

$$E_p = -G \frac{mM}{r} = -G \frac{mM}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (53)$$

где је r растојање тела од центра сфере, а x и y координате тела у Декартовом координатном систему са центром у средишту лопте. Кинетичка енергија тела је:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2}, \quad (54)$$

где је $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Из формула (53) и (54) следи да је укупна механичка енергија тела у Декартовим координатама

$$E = E_k + E_p = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - G \frac{mM}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (55)$$

Момент импулса тела је

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}. \quad (56)$$

Пошто је $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ и $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$, где су \vec{e}_x и \vec{e}_y јединични вектори, важи:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - y\dot{x})\vec{e}_z. \quad (57)$$

Замењивањем (57) у (56) добијамо:

$$\vec{L} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{e}_z, \quad (58)$$

па је

$$\|\vec{L}\|^2 = L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = m^2(x\dot{y} - y\dot{x})^2, \quad (59)$$

одакле следи

$$L = m(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (60)$$

где уколико L има негативну вредност то само значи да је супротно усмерено у односу на смер z осе. Запишимо сада једначине (55) и (56) у поларним координатама. Ако са r означимо радијалну координату, а са φ угаону, тада важи:

$$x = r \cos \varphi, \quad (61)$$

$$y = r \sin \varphi. \quad (62)$$

Пошто нам у изразима за механичку енергију и момент импулса фигуришу и први изводи x и y координате положаја од времена, и њих израчунавамо на следећи начин:

$$\dot{x} = (x(t))' = (r(t) \cos(\varphi(t)))' = r' \cos \varphi - r\varphi' \sin \varphi = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (63)$$

слично и за \dot{y} добијамо:

$$\dot{y} = y' = (r \sin \varphi)' = r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (64)$$

Ако сада заменимо (61), (62), (63) и (64) у (55), добијамо:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m(\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi)^2}{2} + \frac{m(\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi)^2}{2} - G \frac{mM}{\sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}} \\ &= \frac{m}{2} ((\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi)^2) - G \frac{mM}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 \cos^2 \varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi) \\ &\quad - G \frac{mM}{\sqrt{r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + r^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)) - G \frac{mM}{\sqrt{r^2}}, \quad (65) \end{aligned}$$

где смо користили да је $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Пошто је $r \geq 0$ по дефиницији, онда $\sqrt{r^2} = |r| = r$, па се једначина (65) претвара у

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)}{2} - G \frac{mM}{r}. \quad (66)$$

Сада ћемо на сличан начин извести израз за момент импулса у поларним координатама. Заменимо (61), (62), (63) и (64) у (60) да бисмо добили:

$$\begin{aligned} L &= m(r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi)) \\ &= m(r\dot{r} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi - r\dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi) = m(r^2 \dot{\varphi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)), \quad (67) \end{aligned}$$

па користећи да је $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, добијамо

$$L = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (68)$$

Приметимо такође да је добијени израз у складу са оним који бисмо очекивали познавајући законе динамике ротације, јер је $L = mr^2 \dot{\varphi} = mr^2 \omega = I\omega$, где је I момент инерције материјалне тачке која ротира око непокретне осе на растојању r , а ω угаона брзина материјалне тачке при тој ротацији.

Као што смо већ рекли, циљ нам је да користећи законе одржања механичке енергије и момента импулса изведемо зависност $r(\varphi)$. Да бисмо решили тај систем диференцијалних једначина уведемо смену

$$u(t) = \frac{1}{r(t)} - G \frac{m^2 M}{L^2}, \quad (69)$$

па сада заправо тражимо $u(\varphi)$. Пошто је L константа, онда је такође и $-G\frac{m^2M}{L^2}$ константа, па из једначине (69) следи да је

$$\dot{u} = -\frac{1}{r^2}\dot{r}. \quad (70)$$

Желимо да изразимо \dot{r} и $\dot{\varphi}$ који фигуришу у изразу за механичку енергију (једначина (66)) преко $u(\varphi)$ и φ и њихових извода. Користећи правило извода сложене функције и израз (70) имамо да је

$$-\frac{1}{r^2}\dot{r} = \dot{u} = u' = (u(\varphi(t)))' = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = \dot{\varphi}\frac{du}{d\varphi}, \quad (71)$$

одакле следи

$$\dot{r} = -r^2\dot{\varphi}\frac{du}{d\varphi}. \quad (72)$$

Ако сада искористимо да је $L = mr^2\dot{\varphi}$, имамо да је

$$\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi}. \quad (73)$$

Такође из израза за момент импулса и везе између r и u (једначина (69)) изводимо следеће

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{L}{m}\left(u + \frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2. \quad (74)$$

Такође, из једначине (69) добијамо:

$$\frac{1}{r} = u + \frac{Gm^2M}{L^2}, \quad (75)$$

па је онда

$$r = \frac{1}{u + \frac{Gm^2M}{L^2}}. \quad (76)$$

Ако сада заменимо изразе (73), (74), (75) и (76) у једначину (66) добијамо

$$E = \frac{m}{2}\left(\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{u + \frac{Gm^2M}{L^2}}\right)^2\left(\frac{L}{m}\left(u + \frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2\right)^2\right) - GmM\left(u + \frac{Gm^2M}{L^2}\right). \quad (77)$$

Сређивањем једначине (77) добијамо

$$\frac{2mE}{L^2} = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2. \quad (78)$$

Дефинишимо величину A такву да је

$$A^2 = \frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2. \quad (79)$$

Ако сада на обе стране једнакости (78) додамо $\left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2$ и заменимо (79) добијамо:

$$A^2 = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2, \quad (80)$$

при чему су A^2 , па и $|A|$, константе, јер су из закона одржања механичке енергије и момента импулса E и L константни. Решимо диференцијалну једначину (80) да бисмо добили $u(\varphi)$. Из (80) имамо:

$$|A|^2 - u^2 = \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2. \quad (81)$$

Приметимо да би ова једначина имала уопште смисла мора да важи да је $|A|^2 - u^2 \geq 0$. Што даље може да се трансформише на следећи начин:

$$|A|^2 - u^2 \geq 0 \iff |A|^2 \geq u^2 \iff \frac{u^2}{|A|^2} \leq 1 \iff \left(\frac{u}{|A|} \right)^2 \leq 1, \quad (82)$$

где смо искористили да је $|A| = \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{Gm^2M}{L^2} \right)^2} \neq 0$, јер је $m > 0$. За доказ да ова неједнакост мора да буде испуњена у нашем случају, тј. када су вредности одговарајућих величина као из поставке проблема, погледати додатак А.

Како смо размотрили услов дефинисаности, можемо се вратити решавању, једначину (81) сада смемо кореновати, пошто су обе стране ненегативне:

$$\sqrt{|A|^2 - u^2} = \left| \frac{du}{d\varphi} \right| = \mp \frac{du}{d\varphi}, \quad (83)$$

па је

$$d\varphi = \mp \frac{du}{\sqrt{|A|^2 - u^2}}, \quad (84)$$

одакле уколико извучемо $|A|^2$ из корена добијамо

$$d\varphi = \mp \frac{du}{|A| \sqrt{1 - \left(\frac{u}{|A|} \right)^2}}. \quad (85)$$

Пошто смо раздвојили промењиве, сада можемо интегралити обе стране:

$$\int d\varphi = \mp \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{|A|} \right)^2} |A|} du. \quad (86)$$

Уведимо смену $t = \frac{u}{|A|}$ ($dt = \frac{du}{|A|}$), да бисмо добили:

$$\int d\varphi = \mp \int \frac{1}{1 - t^2} dt, \quad (87)$$

одакле следи да је

$$\varphi = \mp \arcsin \frac{u}{|A|} + C_1. \quad (88)$$

Пошто је $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$, даље имамо да је

$$\varphi - C_1 = \mp \left(-\arccos \frac{u}{|A|} + \frac{\pi}{2} \right), \quad (89)$$

пошто је $(\mp 1) \cdot (-1) = \pm 1$, добијамо да је

$$\varphi - C_1 = \pm \arccos \frac{u}{|A|} \mp \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \arccos \frac{u}{|A|} - \frac{\pi}{2} \\ -\arccos \frac{u}{|A|} + \frac{\pi}{2} = \arccos(-\frac{u}{|A|}) - \pi + \frac{\pi}{2} = \arccos(-\frac{u}{|A|}) - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (90)$$

Закључујемо

$$\varphi + \frac{\pi}{2} - C_1 = \arccos \left(\pm \frac{u}{|A|} \right). \quad (91)$$

Дефинишимо $B = \frac{\pi}{2} - C_1$ и узмимо косинус од обе стране

$$\pm \frac{u}{|A|} = \cos(\varphi + B), \quad (92)$$

одакле је коначно

$$u = \pm |A| \cos(\varphi + B). \quad (93)$$

Ако сада ово заменимо у (76) са стране 19 добијамо тражену једначину трајекторије честице, односно зависност $r(\varphi)$:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\pm |A| \cos(\varphi + B) + \frac{Gm^2M}{L^2}}. \quad (94)$$

Покажимо да једначина (94) одговара једначини хиперболе. Приметимо прво да је без умањења општости $B = 0$, јер мењањем B трајекторија честице која одговара (94) само ротира око координатног почетка. Сада ако у дефиницији A (види (79)) уведемо ознаке

$$p = \frac{2mE}{L^2} \quad (95)$$

и

$$q = \frac{Gm^2M}{L^2} \quad (96)$$

добијамо да је

$$A^2 = p + q^2, \quad (97)$$

то јест

$$|A| = \sqrt{p + q^2}. \quad (98)$$

Такође из једначине (61) са стране 17 и користећи чињеницу да је

$$r = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (99)$$

добијамо да је

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (100)$$

Заменимо сада (96), (98), (99) и (100) у (94)

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pm \sqrt{p + q^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + q}, \quad (101)$$

па је одатле

$$\pm x\sqrt{p+q^2} + q\sqrt{x^2+y^2} = 1. \quad (102)$$

Додавањем $\mp x\sqrt{p+q^2}$ са обе стране и квадрирањем даље добијамо

$$q^2(x^2+y^2) = 1 \mp 2x\sqrt{p+q^2} + x^2(p+q^2). \quad (103)$$

Одузмимо $1 + q^2y^2 + q^2x^2$ од обе стране

$$q^2x^2 + q^2y^2 - 1 - q^2y^2 - q^2x^2 = 1 \mp 2x\sqrt{p+q^2} + x^2p + x^2q^2 - 1 - q^2y^2 - q^2x^2, \quad (104)$$

па даље имамо

$$px^2 \mp 2\sqrt{p+q^2}x - q^2y^2 = -1. \quad (105)$$

Додајмо обе стране $\frac{p+q^2}{p}$ и извучимо p испред заграде да бисмо направили квадрат бинома

$$p \left(x^2 \mp 2\frac{\sqrt{p+q^2}}{p}x + \frac{p+q^2}{p^2} \right) - q^2y^2 = \frac{p+q^2}{p} - 1, \quad (106)$$

одакле следи да је

$$p \left(x \mp \frac{\sqrt{p+q^2}}{p} \right)^2 - q^2y^2 = \frac{p+q^2-p}{p} = \frac{q^2}{p}. \quad (107)$$

Помножимо сада целу једначину са $\frac{p}{q^2}$, да бисмо коначно добили

$$\frac{p^2}{q^2} \left(x \mp \frac{\sqrt{p+q^2}}{p} \right)^2 - py^2 = 1, \quad (108)$$

односно

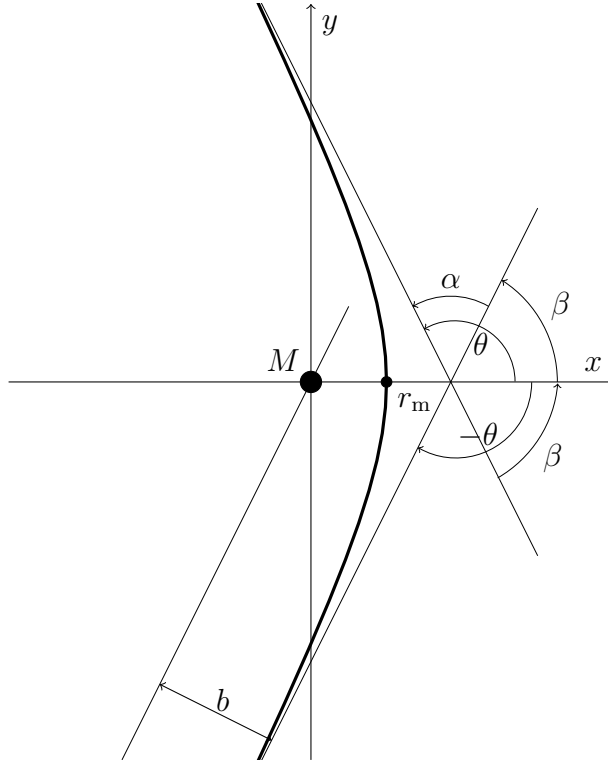
$$\frac{\left(x \mp \frac{\sqrt{p+q^2}}{p} \right)^2}{\frac{q^2}{p^2}} - \frac{y^2}{\frac{1}{p}} = 1. \quad (109)$$

Уколико означимо $c = \mp \frac{\sqrt{p+q^2}}{p}$, $a^2 = \frac{q^2}{p^2}$ имамо да је

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{1}{p}} = 1. \quad (110)$$

Сада у зависности од тога да ли је $p = \frac{2mE}{L^2}$ (види (95)) позитивно или негативно тј. да ли тело има позитивну или негативну енергију једначина (110) је једначина хиперболе или елипсе, редом (фактор $+c$ нема никаквог утицаја већ само транслира хиперболу/елипсу дуж x осе). Пошто у нашем случају тело долази из далека брзином $v \rightarrow c$ његова механичка енергија је тада $E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} \rightarrow \frac{mc^2}{2} > 0$, када $r \rightarrow +\infty$, па се онда, јер је $\frac{1}{p} > 0$, једначина (110) трансформише у

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (111)$$



Слика 11: Трајекторија расејања честице под дејством Њутнове гравитационе силе

где је $b = \sqrt{\frac{1}{p}}$. Закључујемо да је једначина трајекторије (94) једначина хиперболе у нашем случају.

Поставимо осе x и y , тако да је честица најближа маси M за $y = 0$, тј. за $\varphi = 0$ (види слику 11). Другим речима, функција

$$r(\varphi) = \frac{1}{\pm|A| \cos(\varphi + B) + \frac{Gm^2M}{L^2}} \quad (112)$$

достиге минимум за $\varphi = 0$. Односно, њен први извод је једнак нули кад је $\varphi = 0$ и мења знак у тој тачки, за мање вредности је негативан, а за веће позитиван. Израчунајмо први извод $r(\varphi)$:

$$\begin{aligned} r'(\varphi) &= (-1) \frac{1}{\left(\pm|A| \cos(\varphi + B) + \frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2} (\pm|A|(-\sin(\varphi + B))) \\ &= \frac{\pm|A| \sin(\varphi + B)}{\left(\pm|A| \cos(\varphi + B) + \frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (113)$$

Пошто је именилац свакако већи од нуле, знак првог извода зависи само од бројиоца $\pm|A| \sin(\varphi + B)$. Имамо да треба да буде

$$r'(0) = \pm|A| \sin(B) = 0, \quad (114)$$

одакле закључујемо да је $B = 0$ или $B = \pi$. При чему да би био испуњен други услов тј. да $r'(\varphi)$ мења знак у B тако да је за мање вредности негативан, а за веће позитиван, морамо да разматрамо одвојено случај предзнака $+$ односно $-$. Закључујемо да је за предзнак $+$ овај услов испуњен само за $B = 0$, док је за предзнак $-$ овај услов испуњен само за $B = \pi$. Али пошто је $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, имамо да је

$$\pm|A|\cos(\varphi + B) = \left\{ \begin{array}{l} +|A|\cos(\varphi + 0) \\ -|A|\cos(\varphi + \pi) = -|A|(-\cos(\varphi)) \end{array} \right\} = |A|\cos\varphi. \quad (115)$$

Када то заменимо у једначину трајекторије (112) добијамо:

$$r(\varphi) = \frac{1}{|A|\cos\varphi + \frac{Gm^2M}{L^2}}. \quad (116)$$

Циљ нам је да из једначине трајекторије израчунамо угао расејања честице α (види слику 11). Да бисмо то учинили израчунаћемо асимптотски угао θ и онда наћи везу између α и θ . Имамо да по дефиницији θ важи да је

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\theta} r(\varphi) = +\infty, \quad (117)$$

одакле следи да је

$$\frac{1}{|A|\cos(\pm\theta) + \frac{Gm^2M}{L^2}} = +\infty \Rightarrow |A|\cos(\pm\theta) + \frac{Gm^2M}{L^2} = 0. \quad (118)$$

Одавде закључујемо да је

$$\cos\theta = -\frac{Gm^2M}{|A|L^2}. \quad (119)$$

Остало је још да израчунамо $|A|$. Када је тело јако далеко имамо да је $E = \frac{mc^2}{2}$ и $L = mcb$ (наравно, пошто важе закони одржања, E и L имају ове вредности током целог кретања). Ако то заменимо у израз за A^2 (једначина (79) са стране 19) добићемо

$$A^2 = \frac{2m\frac{mc^2}{2}}{m^2c^2b^2} + \left(\frac{Gm^2M}{m^2c^2b^2}\right)^2 = \frac{m^2c^2}{m^2c^2b^2} + \left(\frac{GM}{c^2b^2}\right)^2 = \frac{1}{b^2} \left(1 + \left(\frac{GM}{c^2b}\right)^2\right). \quad (120)$$

Пошто је свако тело, са изузетком црних рупа, много веће од свог Шварцшилдовога радијуса, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, где је M маса тела, можемо закључити да је $r_L \gg \frac{r_s}{2} = \frac{GM}{c^2}$, где је r_L полупречник лопте. Али због тога што је $b > r_L$ (иначе би честица ударила о тело масе M), важи да је $b > r_L \gg \frac{GM}{c^2}$ тј.

$$\frac{GM}{c^2b} \ll 1, \quad (121)$$

такође,

$$\left(\frac{GM}{c^2b}\right)^2 \ll 1, \quad (122)$$

па је

$$1 + \left(\frac{GM}{c^2b}\right)^2 \approx 1. \quad (123)$$

Па се из (120) након кореновања добија

$$|A| = \frac{1}{|b|} = \frac{1}{b}. \quad (124)$$

Заменимо сада ово у (119) и искористимо да је $L = mcb$:

$$\cos \theta = -\frac{Gm^2M}{\frac{1}{b}m^2b^2c^2} = -\frac{GM}{bc^2} = -\frac{r_s}{2b}. \quad (125)$$

Погледајмо поново слику 11. Приметимо да је

$$\beta + \alpha = \theta \quad (126)$$

и да је

$$\beta + \beta + \alpha = \pi. \quad (127)$$

Из (126) имамо да је $\beta = \theta - \alpha$. Заменимо то у (127) да бисмо добили:

$$\theta - \alpha + \theta - \alpha + \alpha = \pi, \quad (128)$$

одакле коначно

$$\alpha = 2\theta - \pi. \quad (129)$$

Сада имамо да је

$$\sin \alpha = \sin(2\theta - \pi) = \sin 2\theta \cos(-\pi) + \sin(-\pi) \cos(2\theta) = -\sin 2\theta = -2 \sin \theta \cos \theta. \quad (130)$$

Пошто $\theta \in (0, \pi)$ (види слику 11), важи да је $\sin \theta > 0$, стога је $\sin \theta = +\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. Али како је $-\cos^2 \theta = -\left(-\frac{GM}{c^2b}\right)^2 = -\left(\frac{GM}{c^2b}\right)^2 \ll 1$ (види једначину (122)), можемо применити апроксимацију $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, кад је $x \ll 1$, па је онда

$$\sin \theta = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta. \quad (131)$$

Убацимо сада ово у једначину (130)

$$\sin \alpha = -2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) \cos \theta = -2 \cos \theta + \cos^3 \theta. \quad (132)$$

Имајући на уму да је $\cos \theta = -\frac{GM}{c^2b} \ll 1$ (види једначине (121) и (125)) занемаримо трећи степен мале величине $\cos \theta$:

$$\sin \alpha \approx -2 \cos \theta = \frac{2GM}{c^2b}. \quad (133)$$

Приметимо да је и $\sin \alpha = \frac{2GM}{c^2b} \ll 1$, па можемо искористити апроксимацију $\sin x \approx x$ за мале углове да бисмо коначно добили

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2b}. \quad (134)$$

Резултат који се добија у оквиру ОТР је дупло већи од овог резултата, једначина (16) на страни 11.

5 Теоријски кандидати за тамну материју

Постоје два начина да се објасне експериментални резултати које добијамо [1]. Један начин је да изменимо општу теорију релативности тј. да претпоставимо да постоји још једно поље које делује на сва тела, што подразумева мењање Ајнштајнове једначине поља

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (135)$$

Специфично, овај приступ подразумева мењање леве стране једначине додавањем још једног члана. Други начин објашњавања експерименталних резултата који се доводе у везу са тамном материјом подразумева да је ОТР добра и тачна теорија, а резултате објашњава увођењем нове материје, изван Стандардног Модела елементарних честица [6]. Наиме, у том случају мењамо десну страну једначине (135) мењањем члана $T_{\mu\nu}$, који представља тензор енергије-импулса. Постоји више кандидата честица који би могли да објасне ефекте које видимо, али за сада немамо никаквих експерименталних доказа о томе шта би заправо могла бити тамна материја. Тежина проблема лежи и у томе што уколико изаберемо први приступ, ми заправо тврдимо да је ОТР погрешна или у најмању руку непотпуна теорија, док уколико изаберемо други приступ тврдимо да је Стандардни Модел погрешан или у најмању руку непотпун. Међутим, обе ове теорије су јако добро експериментално проверене и показале су се невероватно прецизним у бројним експериментима које смо извели до сада. Никада нисмо имали бољих поклапања између експеримента и теорије. Било која варијација иједне од ове две теорије би морала да прво објасни све друге феномене и резултате које видимо, а тек онда, поврх тога, појаве које повезујемо са тамном материјом.

У табели 1 можемо видети једну поделу већине битних хипотеза које покушавају да објасне сличне ефекте које приписујемо тамној материји [7]. Ми ћемо споменути само неколико најбитнијих.

Први од кандидата за објашњење тамне материје јесте аксион [8]. Квантни хромодинамички аксион су хипотетичке елементарне честице које придружујемо пољу аксиона које је постулирано као потенцијално решење проблема очувања CP-симетрије у квантној хромодинамици. Наиме, до јаке интеракције долази јер поље глуона интерагује са тзв. густином струје кваркова, која има векторску природу и може бити аксијално или поларно. Стога се јака интеракција описује са два различита сабирка – глуон-поларном струјом и глуон-аксијалном струјом. Међутим, једно од отворених питања савремене физике јесте зашто у експериментима детектујемо само поларни члан тј. зашто је константа интеракције која множи аксијалну струју (коју иначе обележавамо са θ) има јако малу вредност која је блиска или једнака нули. Испоставља се да уколико би постојао аксијални члан он би довео до нарушења CP-симетрије, која је иначе нарушена код слабе интеракције, па је питање зашто није и код јаке. Један од теоријских модела који покушава да пружи теоријски разлог да вредност θ буде просто једнака нули јесте Peccei-Quinn⁶ модел, који уводи ново поље аксиона и самим тим и нову честицу која се зове аксион. Међутим, сви досадашњи покушаји детектовања аксиона нису били успешни. Уколико он буде откривен и уколико његова маса упадне у неки одговарајући опсег, он би могао да буде објашњење свих ефеката које видимо у вези са тамном материјом.

⁶Roberto Daniele Peccei (1942 – 2020), италијански теоријски физичар честица, Helen Rhoda Arnold Quinn (1943), аустралијски физичар честица.

увођење нове материје	лаки бозони	квантни хромодинамички аксиони
		честице попут аксиона
		fuzzy хладна тамна материја
	неутрини	Стандардни Модел
		стерилни неутрини
	слаба скала	суперсиметрија
		додатне димензије
		мали Хигс
		ефективна теорија поља
	друге честице	слабо интерагујуће масивне честице (WIMP)
		самоинтерагујућа тамна материја
		примордијалне црне рупе
	макроскопска материја	масивни компактни хало објекти (MaCHOs)
		макроскопска тамна материја (Macros)
		модификована Њутнова динамика (MoND)
модификовање гравитације	тензор-вектор-скалар гравитација (TeVeS)	

Табела 1: Класификација свих хипотеза о тамној материји

Наредни кандидат јесу суперсиметрични партнери честица Стандардног Модела [9, 10]. Према је 1967. године доказана такозвана Coleman-Mandula⁷ теорема која тврди да просторвременске и унутрашње симетрије не могу искомбиновати ни на један нетривијалан начин, испоставило се да постоји један изузетак од претпоставки ове теореме. Другим речима могуће је проширити Поенкареову симетрију на већу групу просторвременских симетрија на нетривијалан начин. На тај начин уопштавамо Стандардни Модел елементарних честица на суперсиметричне теорије које подразумевају да свака честица из Стандардног Модела има своју суперсиметричну партнер-честицу. Међутим, суперсиметрија би, ако би постојала, била нарушена испод неке енергетске скале тј. у нискоенергетским експериментима не би била испоштована. Иако би њено постојање имало низ лепих својстава и решавало много отворених проблема модерне физике (између осталог проблем хијерархије, проблем уједињења јаке, слабе и електромагнетне интеракције, проблем космолошке константе као и побољшања у опису гравитације (супергравитација, суперструне)), суперсиметрија није детектована експериментално. Такође, ако би постојала, честице суперпартнери пошто имају масу већу од свих постојећих честица могу играти улогу градивних честица тамне материје. До сада ниједна честица суперпартнер није детектована.

Још један кандидат за објашњавање ефеката тамне материје јесу такозвани стерилни неутрини [11]. Наиме, током 90-тих година прошлог века да би се решио проблем Соларних неутрина⁸ физичари су се окренули мекханизму неутрино осцилација (могућност

⁷Sidney Richard Coleman (1937 – 2007), амерички теоријски физичар, Jeffrey Ellis Mandula (1941), амерички физичар.

⁸Примећено је да до нас са Сунца долази два до три пута мање неутрина него што бисмо очекивали на основу теоријских разматрања термонуклеарних реакција у центру Сунца.

претварања електроновог неутрина у мионски, мионског у тау и тау натраг у електронов) који подразумева да неутрини имају ненулту масу. Постојање ових осцилација и касније мерење маса неутрина захтевало је промену Стандардног Модела елементарних честица. Ово може бити учињено на више начина и још увек не постоји консензус око тога који од њих је најбољи, јер су експерименти са неутринима јако тешки и постоји још много књихових особина које нам нису познате. Додатно, поставља се питање уколико неутрини имају масу зашто сви имају такозвану леву киралност, док сви антинеутрини имају десну. Киралност честице је особина левог односно десног "завртња" и разликује честице у односу на огледалску симетрију. Док се веровало да је маса неутрина нула, није било чудно што сви имају леву киралност, јер за безмасене честице важи закон одржања киралности. Међутим, за масене честице, овај закон је нарушен, па се поставља питање зашто у експериментима никад не видимо неутрине десне киралности. Једно од решења овог проблема јесте постојање такозваних стерилних неутрина који имају десну киралност, али немају набој чак ни за слабу интеракцију. Ово се постиже такозваним seesaw механизмом по ком стерилни неутрини имају велике масе и немају набој за слабу интеракцију, док обични неутрини имају мале масе и ненулти набој за слабу интеракцију. Стерилни неутрини би због своје масе и особине да не интерагују никако сем гравитационо били одличан кандидат за градивни елемент тамне материје. Међутим, они до сада нису експериментално детектовани.

Слабо-интерагујуће масивне честице (тзв. WIMP) су хипотетичке честице које по дефиницији представљају градивне честице тамне материје. За разлику од претходних кандидата, који су уведени из других разлога који немају везе са тамном материјом, WIMP уводимо фенолошки специфично да бисмо опсиали тамну материју. Дакле оне нису теоријски прецизно уведене са тачно одређеним величинама, већ за честицу кажемо да је WIMP уколико испуњава следеће услове:

1. честица интерагује слабом и гравитационом силом и не интерагује јаком нити електромагнетном,
2. честица такође потенцијално интерагује и неком додатном, петом силом, при чему њен интензитет није већи од интензитета слабе силе,
3. честица има масу упоредиву са масом протона, или већу.

Очекује се да због хлађења због ширења универзума као и због своје велике масе WIMP честице имају мале енергије и да се последично нагомилавају око постојећих тела великих маса (галаксија, планета, звезда). Такође се претпоставља да би онда на тим местима због нагомилавања требало да долази до судара између честице и њене античестице (анихилација), што онда значи да би центри галаксија и звезда требали да буду извори зрачења са специфичним спектром који одговара тим сударима и који се не може објаснити на други стандарднији начин. Међутим, до сада такво зрачење које не може бити објашњено на други стандарднији начин није детектовано. Дobar теоријски кандидат за WIMP честице јесу суперсиметрични партнери постојећих честица, пошто испуњавају сва три горенаведена услова, за разлику од претходно поменутих аксиона и стерилних неутрина.

Током развоја идеја за решавање проблема тамне материје једна од идеја је била да се тамна материја састоји од такозваних масивних астрофизичких компактних хало објеката (МАСНО). За разлику од претходних кандидата у питању су макроскопски објекти, који

су величине астероида, планета и мањих звезда и који не могу да емитују светлост и због тога су "тамни". Међу ове објекте спадају:

- астероиди и планете-луталице, који нису везани за сунчеве системе
- угашени бели патуљци (тзв. црни патуљци) и охлађене неутронске звезде
- браон патуљци (прото-звезде које нису имале довољну масу да постану праве звезде тј. да у њима почну да се дешавају нуклеарне реакције)
- мале и средње црне рупе које немају око себе акрециони диск

Међутим, као и сва барионска материја на температури већој од апсолутне нуле и МАСНО-и би требали да емитују електромагнетно зрачење. До сада ово зрачење није детектовано и описани су сви објекти чија је маса између 0,3 масе Месеца и 100 маса Сунца. Многи од кандидата са списка су и теоријски проблематични. Наиме, због одржања момента импулса стварање црне рупе без акреционог диска је врло ретка појава, док се такође испоставља да бели патуљци и неутронске звезде нису имали довољно времена да се охладе и угасе, јер није прошло довољно времена од постанка Универзума да би се тај процес десио. Данас постоји консензус да је МАСНО хипотеза превазиђена, јер су прецизнија астрофизичка испитивања и теоријска разматрања елиминисала све кандидате са горњег списка једног по једног, па би у најоптимистичнијем случају МАСНО објекти могли да објасне само 20% масе тамне материје коју детектујемо гравитационим ефектима.

Већ је поменуто да постоје два различита приступа решавању проблема тамне материје. До сада смо разматрали само хипотезе које подразумевају увођење нове материје, а сада ћемо размотрити хипотезе које подразумевају модификовање гравитације и боље дефинисати разлику између два приступа.

Једна од првих хипотеза које су подразумевале мењање самог закона гравитације уместо увођења нове материје као извора гравитационог поља јесте модификована Њутнова динамика [12] (modified Newtonian dynamics, MoND). Она претпоставља да се Њутнов закон гравитације мења на растојањима реда величине једне галаксије. Иако првобитно примамљива, ова теорија је брзо оповргнута јер је у суштини нерелативистичка. Касније се појавио озбиљнији релативистички приступ, пре свега у облику тензор-вектор-скалар модела [13] (TeVeS).

Модификовање гравитације се у суштини своди на описивање гравитације не само метриком (једначина (135)), већ метриком и додатним пољима. Међутим, на формалном теоријском нивоу ми додајемо нова поља и уколико претпоставимо да постоји додатна материја у галаксији, па иако мењамо десну страну Ајнштајнове једначине поља, ми наисте ту измену можемо "пребацити" на леву страну и на тај начин добити сличан облик једначине као у случају модификовања гравитације односно додавања новог гравитационог поља. Стога се поставља питање како разликовати ова два приступа. Постоји, међутим, конвенцијом договорено правило за сврставање нове хипотезе у одговарајућу групу. Наиме, уколико поље које одговара хипотези поштује принцип еквиваленције, хипотезу сврставамо у групу додавања материје, док је иначе сматрамо модификовањем закона гравитације. Иако конвенција, овај критеријум је недвосмислен, ригорозан и омогућава нам да било коју нову хипотезу на јасан начин сврстамо или у групу "ОТР са новом материјом" или у "модификована гравитација". Иако постоје предлози из обе групе, треба нагласити да за сада предност имају модели "материје", јер сви до сада експериментални резултати указују

на то да тамна материја поштује принцип еквиваленције и одатле материја у називу. Уколико у будућности буде детектовано нарушење принципа еквиваленције ова ситуација може лако да се промени, међутим, до тада, модели који подразумевају додавање материје имају предност над моделима модификоване гравитације, макар и само кроз ову конвенцију.

6 Закључак

У овом раду, након што смо у уводу изнели кратки историјат и објаснили значај тамне материје, бавили смо се два метода детекције тамне материје, ротационим кривама галаксија и гравитационим сочивом. Такође смо продискутовали потенцијалне хипотезе које покушавају да објасне тамну материју. У другом поглављу смо апроксимацијом експериментално добијене расподеле брзина звезда, користивши поједностављен модел галаксије и Њутнов закон гравитације добили каква мора бити расподела масе од центра галаксије. Дobili смо да мора постојати маса изван видљивог дела галаксија. Ту масу смо приписали тамној материји. Затим смо у трећем поглављу геометријском анализом и користећи израз за угао расејања светлости на масивном телу који се изводи користећи ОТР нашли везу између углова под којима видимо ликове галаксије (или неког другог небеског тела, нпр. квазара) иза гравитационог сочива и величине коју смо назвали Ајнштајнов угао. Пошто у изразу за Ајнштајнов угао фигуришу позната растојања и маса гравитационог сочива, могли смо да је израчунамо. Потом смо констатовали да је маса која се добија већа од процењене масе видљивог дела галаксије и да се разлика приписује тамној материји. У четвртном поглављу смо зрак светлости апроксимирали телом масе која тежи нули и чија брзина тежи брзини светлости да бисмо извели нерелативистичку формулу за угао расејања светлости. Користећи закон одржања енергије и момента импулса, нашли смо једначину трајекторије у гравитационом пољу масивне сфере. Затим смо на основу те једначине извели израз за угао расејања. Добијени резултат је дупло мањи од оног који се добија користећи општу теорију релативности. У наредном, петом, поглављу позабавили смо се хипотезама које објашњавају тамну материју. Изнели смо главне предности и мане једине две врсте хипотеза, додавање нове материје и модификовање гравитације и објаснили како их разликујемо. Након тога смо излистали већину битних хипотеза, а оне најбитније смо додатно објаснили и изнели њихове предности, мане и међусобне сличности и разлике.

Тамна материја је и даље једна од највећих мистерија модерне физике. Ако уопште јесте материја и ако претпоставимо да је ОТР исправна, она чини приближно 85% све масе у универзуму. Упркос томе, о њој знамо веома мало. Знамо да честице које би је чиниле не интерагују електромагнетно, а интерагују гравитационо. Управо зато, постоје многи ефекти који указују на њено постојање или да нешто не ваља са општом теоријом релативности. У овом раду смо видели метод ротационих кривих галаксија и ефекат гравитационог сочива. Постоје и многи други методи детекције тамне материје, у које нисмо улазили.

Такође смо дискутовали и кандидате за тамну материју, од којих сваки има своје предности и мане и не постоји консензус око тога који је најбољи. Међутим, што се тиче приступа решавању проблема већина физичара данас верује да је тамна материја заиста материја. Тако је углавном јер сви досадашњи резултати показују да тамна материја поштује принцип еквиваленције и јер је јако тешко направити измењену теорију гравитације која

објашњава све резултате који су већ објашњени помоћу опште теорије релативности као и све различите ефекте који се приписују тамној материји. Иако је допуњавање Стандардног Модела захтеван подухват, већина физичара је мишљења да је то једноставнији и бољи приступ од мењања опште теорије релативности. У сваком случају, решење проблема тамне материје би довело до револуције у модерној физици, јер би било који од ова два приступа довео до значајних промена у неком од стубова модерне физике.

Захвалнице

Највише желим да се захвалим свом ментору. Његова посвећеност и време које је издавао су ме потпуно одушевили. Такође бих желео да се захвалим својим професорима физике, Ивану Станићу и Игору Салому, који су допринели мом образовању у физици и на тај начин и индиректно овом раду.

А Критеријум позитивности

Доказаћемо да је

$$|A|^2 - u^2 \geq 0, \quad (136)$$

ако су вредности величина које фигуришу као из поставке проблема (види поглавље 4). Заменимо прво изразе за A^2 и u (једначине (69) и (79)) да бисмо добили:

$$\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{r} - G\frac{m^2M}{L^2}\right)^2 \geq 0, \quad (137)$$

што се даље трансформише у

$$\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2 - \frac{1}{r^2} + 2\frac{Gm^2M}{L^2}\frac{1}{r} - \left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2 \geq 0, \quad (138)$$

па добијамо квадратну једначину по $\frac{1}{r}$:

$$-\frac{1}{r^2} + 2\frac{Gm^2M}{L^2}\frac{1}{r} + \frac{2mE}{L^2} \geq 0. \quad (139)$$

Ако дефинишемо $x = \frac{1}{r}$, да би неједнакост (139) била испуњена мора да важи:

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad (140)$$

где су x_1 и x_2 редом мање и веће решење квадратне једначине:

$$-x^2 + 2\frac{Gm^2M}{L^2}x + \frac{2mE}{L^2} = 0. \quad (141)$$

Да бисмо нашли решења ове квадратне једначине, x_1 и x_2 , покажимо прво да је дискриминанта D заправо једнака $2|A|$. Наиме,

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4\left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2 - 4(-1)\left(\frac{2mE}{L^2}\right)} = 2\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2} = 2|A|, \quad (142)$$

па је стога

$$x_{1,2} = \frac{-2\frac{Gm^2M}{L^2} \pm 2|A|}{-2} = \frac{Gm^2M}{L^2} \mp |A|. \quad (143)$$

Заменимо сада ово у услов (140) да бисмо добили:

$$\frac{Gm^2M}{L^2} - |A| \leq x \leq \frac{Gm^2M}{L^2} + |A|, \quad (144)$$

односно

$$\frac{Gm^2M}{L^2} - |A| \leq \frac{1}{r} \leq \frac{Gm^2M}{L^2} + |A|. \quad (145)$$

Лева неједнакост је свакако испуњена, јер је r ненегативан број, па самим тим и $\frac{1}{r}$, док је

$$\frac{Gm^2M}{L^2} - |A| \leq 0, \quad (146)$$

јер је

$$\frac{Gm^2M}{L^2} \leq \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{Gm^2M}{L^2}\right)^2}, \quad (147)$$

пошто је $\frac{2mE}{L^2} \geq 0$ (јер је $E \approx \frac{mc^2}{2} > 0$). Остало је још да проверимо да ли важи десна неједнакост у (145). Да бисмо то учинили заменимо добијену једначину трајекторије (116) у (145):

$$|A| \cos \varphi + \frac{Gm^2M}{L^2} \leq \frac{Gm^2M}{L^2} + |A|. \quad (148)$$

Ово је очигледно испуњено, пошто је $\cos \varphi \leq 1$.

Литература

- [1] G. Bertone, *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
- [2] F. Lelli, S. S. McGaugh, J. M. Schombert, "SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves", *Astron. Jour.* **152**, 157 (2016).
- [3] <http://astroweb.cwru.edu/SPARC/>
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco (1973).
- [5] Б. С. Милић, *Њутнова механика*, Студентски Трг, Београд (1997).
- [6] G. D. Coughlan, J. E. Dodd, B. M. Gripaios *The Ideas of Particle Physics: An Introduction for Scientists*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [7] L. Bergstrom, "Dark Matter Candidates", *New J. Phys.* **11**, 105006 (2009).
- [8] L. D. Duffy, K. van Bibber, "Axions as Dark Matter Particles", *New J. Phys.* **11**, 105008 (2009).

- [9] G. Kane, *Supersymmetry: Unveiling the Ultimate Laws of Nature*, Basic Books, New York (2001).
- [10] G. Jungman, M. Kamionkowski, K. Griest, “Supersymmetric Dark Matter”, *Phys. Rept.* **267**, 195 (1996).
- [11] A. Boyarsky, M. Drewes, T. Lasserre, S. Mertens, O. Ruchayskiy, “Sterile neutrino dark matter”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **104**, 1 (2019).
- [12] P. D. Mannheim, “Alternatives to Dark Matter and Dark Energy”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **56**, 340 (2006).
- [13] J. D. Bekenstein, “Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm”, *Phys. Rev. D* **70**, 083509 (2004).