Математичка гимназија
школа од посебног националног значаја и интереса

Математичка гимназија

Краљице Наталије 37, Београд

Основе алгебарске топологије и доказ Брауерове теореме о фиксној тачки

Матурски рад

Аутор
Анђела Миловановић

Ментор
Лука Милићевић

15. јун 2021.

Садржај

Глава 1

Увод

Главни циљ овог рада је да читаоцу приближи основне појмове и идеје алгебарске топологије, као и да представи једну од њених првих достигнућа - Брауерову теорему о фиксној тачки. Имајући у виду да област топологије није уврштена у регуларни курс математике у гимназијама, а да се по лепоти и примени истиче као значајна област математике, рад отпочињемо поглављем о општој топологији, из које се касније као једна од подобласти развија алгебарска топологија. У овом поглављу као мотивацију за увођење тополошких простора користимо метричке просторе за које верујемо да су читаоцу „опипљивији". Кроз дефиниције и доказе приказаних ставова у првој глави, читалац може добити потребну интуицију за даље разумевање рада. Након што смо поставили темеље, у другом поглављу говоримо о фундаменталној групи као начину класификације тополошких простора. Треће поглавље рада посвећено је хомологији и доказу Брауерове теореме којим завршавамо овај рад. Због апстрактне природе саме области топологије, верујемо да ће доказ користити читаоцу да добије јаснију представу о њеним применама.

Глава 2

Општа топологија

2.1 Кратко о метрици и метричким просторима

Упознати смо са појмом растојања у n-димензионом Еуклидском простору. Ако су x и y тачке у $\mathbb{R}^n$, онда се растојање између њих може израчунати као

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Појам растојања нам дозвољава да дефинишемо појам непрекидности функције која слика један Еуклидски простор у други према уобичајеној дефиницији $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ је непрекидна у $x \in \mathbb{R}^n$ ако за дато $\varepsilon > 0$ $(\exists\delta > 0)(d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$.

Дефиниција 2.1.1. *Метрички простор* чини скуп X заједно са функцијом $d : X \times X \to \mathbb{R}$ за коју важи:

1. (позитивност) $d(x,y) \geq 0$, где се једнакост постиже за $x = y$,
2. (симетричност) $d(x,y) = d(y,x)$,
3. (неједнакост троугла) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Функција d се назива *метрика*.

За метрички простор X дефинишемо ”ε-лопту”око тачке x као

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Ово нам омогућава да дефинишемо отворен и затворен скуп у метричким просторима.

Дефиниција 2.1.2. Подскуп U је *отворен* ако за сваку тачку $x \in U$ постоји ε-лопта око x која је садржана у U. Подскуп је *затворен* ако је комплемент отвореном.

Лема 2.1.1. *Свака ε-лопта је отворен скуп.*

Доказ. Нека $y \in B_\varepsilon(x)$ и нека је $\delta = \varepsilon - d(x,y)$. Нека $z \in B_\delta(y)$. Тада због неједнакости троугла важи $d(y,z) \leq \varepsilon - d(x,y)$, тј. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq \varepsilon$, одакле следи да $z \in B_\varepsilon$. Како је y произвољно изабрани елемент B_ε, овим је показано да за сваку тачку скупа B_ε можемо да пронађемо ε-лопту око ње која је садржана у B_ε, па је B_ε отворен скуп. ■

Лема 2.1.2. *Функција $f : X \to Y$ која слика један метрички простор у други је непрекидна $\iff$ $f^{-1}(U)$ је отворен у X за сваки отворен скуп $U \subset Y$.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је $f : X \to Y$ непрекидна функција, $U \subset Y$ отворен скуп и нека $f(x) \in U$. Тада постоји $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Због непрекидности функције f постоји $\delta > 0$ тако да за све y за које је $d(x,y) < \delta$ важи $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, па је $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$. Како постоји f^{-1} (f је бијекција), избором произвољног $f(x)$ заправо бирамо произвољно x. Дакле, за произвољно $x \in f^{-1}(U)$ важи да $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$, па је $f^{-1}(U)$ отворен скуп.

($\Leftarrow$) Нека је $f^{-1}(U)$ отворен скуп за сваки отворен скуп $U \subset Y$ и нека $f(x) \in U$. Тада постоји $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$ и $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Како је свака ε-лопта отворен скуп, онда постоји $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Дакле, за ε $(\exists \delta > 0)(d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$, чиме је доказано да је функција f непрекидна (ε је произвољно). ■

2.2 Тополошки простори

Дефиниција 2.2.1. *Тополошки простор* чине скуп X и фамилија подскупова $\mathcal{F}$ скупа X који су отворени скупови такви да важи:

1. пресек два отворена скупа је отворен скуп,
2. унија било које фамилије отворених скупова је отворен скуп,
3. скупови $\varnothing$ i X су отворени скупови.

Подскуп $C \subset X$ је затворен ако је његов комплемент у односу на скуп X отворен скуп. Фамилију $\mathcal{F}$ називамо *топологија* на скупу X.

Дефиниција 2.2.2. Нека су X и Y тополошки простори. Функција $f : X \to Y$ је непрекидна ако је $f^{-1}(U)$ отворен скуп за сваки отворен скуп $U \subset Y$.

Дефиницију непрекидности можемо задати и преко затворених скупова. Знамо да инверзна функција чува комплементарност, тј. важи $f^{-1}(Y \setminus f(A)) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(f(A)) = X \setminus A$, а затворен скуп је комплемент отвореном, па претходну дефиницију можемо записати и као

Дефиниција 2.2.3. Функција $f : X \to Y$ је непрекидна ако је $f^{-1}(C)$ затворен скуп за сваки затворен скуп $C \subset Y$.

Дефиниција 2.2.4. Нека је X тополошки простор и нека $x \in X$. Скуп S називамо *околином* елемента x у X ако постоји отворен скуп $U \subset S$, где $x \in U$.

Приметимо да околина није нужно отворен скуп, као и да није нужно „мала“: и сам скуп X је околина сваког свог елемента. Лако је показати да је пресек сваке две околине елемента x у X такође околина елемента x у X (ово следи из дефиниције околине и дефиниције тополошког простора по којој је пресек два отворена скупа отворен скуп).

Дефиниција 2.2.5. Нека је X тополошки простор и нека $x \in X$. Фамилија $\mathcal{B}_x$ подскупова X који садрже x је *база околине* ако свака околина елемента x у X садржи неки елемент $\mathcal{B}_x$ и ако је сваки елемент $\mathcal{B}_x$ околина од x.

Базе околине могу бити згодан начин за дефинисање непрекидности. Ту нам помаже следећа дефиниција.

Дефиниција 2.2.6. Нека су X и Y тополошки простори. Функција $f : X \to Y$ је непрекидна у тачки x, где $x \in X$, ако за сваку околину N од $f(x)$ у Y постоји околина M од x у X, тако да је $f(M) \subset N$.

Како је $f(f^{-1}(N)) \subset N$, ово је исто као да кажемо да је $f^{-1}(N)$ околина од x за сваку околину N од $f(x)$ ($M \subset f^{-1}(N)$, па је и $f(M) \subset f(f^{-1}(N))$).

Лема 2.2.1. *Функција f је непрекидна $\iff$ функција f је непрекидна у свакој тачки $x \in X$.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је $f : X \to Y$ непрекидна функција, где су X и Y тополошки простори. То значи да је $f^{-1}(U)$ отворен скуп за сваки отворен скуп U. Нека је S околина од $f(x)$ у Y и нека је U отворен скуп такав да важи $f(x) \in U \subset Y$ (овакав скуп постоји због саме дефиниције околине). Тада важи $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(S)$, па је по дефиницији $f^{-1}(S)$ околина од x. Ово значи да је f непрекидна у тачки x по дефиницији. Како је x произвољно одабрана тачка, доказали смо десни смер.

($\Leftarrow$) Нека је функција $f : X \to Y$ непрекидна у свакој тачки x, где су X и Y тополошки простори, и нека је $U \subset Y$ отворен скуп. За свако $x \in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)$ је околина x. Дакле, постоји отворен скуп V_x такав да је $x \in V_x \subset f^{-1}(U)$. Овакав скуп можемо пронаћи за свако $x \in f^{-1}(U)$, па је $f^{-1}(U)$ унија скупова V_x. Како је унија отворених скупова у тополошком простору отворен скуп, $f^{-1}(U)$ је отворен. Пошто је скуп U произвољно одабран, ово важи за сваки подскуп скупа Y, одакле закључујемо да је функција f непрекидна. ■

Дефиниција 2.2.7. Функција $f : X \to Y$ је *хомеоморфизам* између два тополошка простора и пишемо $X \cong Y$ ако постоји функција f^{-1} и ако су f и f^{-1} непрекидне.

Дакле, тополошки простори су хомеоморфни ако постоји 1-1 функција и ако су сви оригинали отворених подскупова скупа Y отворени подскупови скупа X. Хомеоморфни простори се третирају као суштински исти. Да би описали тополошке просторе није неопходно да у потпуности знамо да опишемо отворене скупове тих простора и то се лакше ради помоћу појма *основа* за топологију.

Дефиниција 2.2.8. Нека је X тополошки простор и нека је $\mathcal{B}$ фамилија подскупова X. $\mathcal{B}$ је *основа* за топологију X ако је свака унија елемената $\mathcal{B}$ отворен скуп у X, при чему је овим покривен сваки отворен скуп у X (видимо да елементи $\mathcal{B}$ морају бити отворени скупови).

Даље, фамилија $\mathcal{S}$ подскупова X је *подоснова* за топологију X ако је скуп $\mathcal{B}$ чији су елементи коначни пресеци елемената скупа $\mathcal{S}$ основа за топологију X.

Дефиниција 2.2.9. Нека су X и Y тополошки простори. Функција $f : X \to Y$ је *отворена* ако је $f(U)$ отворен скуп у Y за сваки отворен скуп $U \subset X$. Функција је *затворена* ако је $f(U)$ затворен скуп у Y за сваки затворен скуп $C \subset X$.

Дефиниција 2.2.10. Тополошки простор задовољава *прву аксиому пребројивости* ако свака тачка има пребројиву базу околине.

Дефиниција 2.2.11. Тополошки простор задовољава *другу аксиому пребројивости* ако његова топологија има пребројиву основу.

Приметимо да су сви метрички простори прво пребројиви, али не и нужно друго пребројиви. На пример, метрички простори било којих непребројивих скупова са метриком $d(x, y) = 1$ за $x \neq y$ и $d(x, x) = 0$ (који ствара дискретну топологију) није друго пребројив. Са друге стране, сви Еуклидски простори су друго пребројиви, јер се ε- лопте око свих тачака са рационалним координатама могу узети као основе, где је ε рационално.

Дефиниција 2.2.12. Низ функција f_1, f_2,... које сликају тополошки простор X у тополошки простор Y *униформно (равномерно) конвергира* ка функцији f ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $i > n$ тако да важи $d(f_i(x), f(x)) < \varepsilon$ за све $x \in X$.

Теорема 2.2.2. *Ако низ f_1, f_2,... непрекидних функција које сликају тополошки простор X у тополошки простор Y униформно конвергира ка функцији $f : X \to Y$, онда је f непрекидна функција.*

Доказ. Нека за произвољно одабрано $\varepsilon > 0$ имамо n_0 тако да важи

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3 \quad \forall x \in X.$$

Узмемо произвољну тачку x_0. Због непрекидности функције f_{n_0} постоји околина S тачке x_0 тако да $x \in S \Rightarrow d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \varepsilon/3$. Дакле, за свако $x \in S$ важи

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &< d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \end{aligned}$$

чиме је теорема доказана. ∎

Неки примери топологија:

1. (Тривијална топологија) Било који отворен скуп X и празан скуп.
2. (Дискретна топологија) Било који скуп X чији су подскупови отворени (ово значи да је и X отворен, јер је подскуп самом себи).
3. Било који скуп X чији су отворени подскупови они скупови чији су комплементи коначни скупови и празан скуп, тј. било који скуп X чији су затворени скупови коначни.

2.3 Потпростори

Постоји више начина за конструисање нових тополошких простора из већ постојећих. Најлакши начин за то је прелазак на *потпростор*, који је произвољан подскуп који наслеђује топологију матичног простора на сасвим природан начин.

Дефиниција 2.3.1. Нека је X тополошки простор и $A \subset X$. *Релативна топологија (топологија простора)* на скупу A је фамилија свих скупова који настају као пресек скупа A и отворених скупова у X. Скуп A тада називамо *потпростор* од X.

Лема 2.3.1. *Нека је Y потпростор од X. Скуп $A \subset Y$ је затворен скуп у Y $\iff$ $A = Y \cap B$, где је B неки затворен подскуп од X.*

Доказ. $(\Rightarrow)$ Претпоставимо прво да је скуп A затворен у Y. Тада је $Y - A$ отворен у Y, па је по претходној дефиницији једнак пресеку отвореног скупа U у X са Y (можемо узети да је $U = Y - A$). Скуп $X - U$ је затворен у X, па имамо $A = Y \cap (X - U)$, као што је и тражено.

$(\Leftarrow)$ Сада, претпоставимо да је $A = B \cap Y$, где је B затворен у X. Онда је $X - B$ отворен у X, па је $(X - B) \cap Y$ отворен у Y. Видимо да је $(X - B) \cap Y = Y - A$. Самим тим је $Y - A$ отворен у Y, па је A затворен у Y. ■

Лема 2.3.2. *Нека је X тополошки простор и $A \subset X$. Тада постоји највећи отворен скуп $U \subset A$ који називамо* унутрашњост *A у X и пишемо* $\operatorname{int}(A)$.

Доказ. За $\operatorname{int}(A)$ узимамо унију свих отворених скупова садржаних у A. Јасно је да не може постојати већи отворен скуп који садржи A. ■

Лема 2.3.3. *Нека је X тополошки простор и $A \subset X$. Тада постоји најмањи затворен скуп F тако да важи $A \subset F \subset X$ који називамо* затворење *скупа A у X и пишемо $\bar{A}$.*

Доказ. За $\bar{A}$ узимамо пресек свих затворених скупова који садрже A. Јасно је да не може постојати мањи затворен скуп који садржи A. ■

Ако желимо да нагласимо и за који тополошки простор је дато затворење (у претходној леми је за X), користимо нотацију $\bar{A}^X$.

Лема 2.3.4. *Ако важи $A \subset Y \subset X$, онда је $\bar{A}^Y = \bar{A}^X \cap Y$. Дакле, ако је Y затворен скуп у X, онда је $\bar{A}^Y = \bar{A}^X$.*

Дефиниција 2.3.2. Нека је X тополошки простор и $A \subset X$. *Граница* од A се дефинише као $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X - A}$.

Дефиниција 2.3.3. Нека је X тополошки простор и $A \subset X$. Кажемо да је A *густ* у X ако је $\bar{A} = X$. Кажемо да A *није нигде густ* у X ако је $\operatorname{int}(\bar{A}) = \varnothing$.

Лема 2.3.5. *Нека су X, Y, Z тополошки простори, Y потпростор од X и Z потпростор од Y. Тада је и Z потпростор од X.*

Лема 2.3.6. *Нека је X метрички простор и $A \subset X$. Онда је $\bar{A}$ скуп лимеса у X низова тачака скупа A.*

Доказ. Нека је x лимес у X неких тачака скупа A. Тада било који отворен скуп око тачке x садржи тачке скупа A. Дакле, $x \notin \operatorname{int}(X - A)$. $X - \operatorname{int}(X - A) = \bar{A}$, па $x \in \bar{A}$. Обратно, ако $x \in \bar{A}$ и ако је $n > 0$ произвољан природан број, онда $B_{1/n}(x)$ мора да садржи неку тачку скупа A, јер би иначе важило да $x \in \operatorname{int}(X - A)$. Узмемо једну такву тачку из A и означимо је са x_n. Одатле следи да је $x = \lim(x_n)$ лимес низа тачака из A. ■

2.4 Повезаност и компоненте

Дефиниција 2.4.1. Тополошки простор X је *повезан* ако није дисјунктна унија два непразна отворена подскупа.

Дефиниција 2.4.2. Подскуп A тополошког простора X је *затворено-отворен* ако је и отворен и затворен у X.

Лема 2.4.1. *Тополошки простор X је повезан акко су једини његови затворено-отворени подскупови X и $\emptyset$.*

Дефиниција 2.4.3. *Пресликавање са дискретним вредностима* је пресликавање (непрекидно) које слика тополошки простор X у дискретан простор D.

Лема 2.4.2. *Тополошки простор X је повезан акко је свако пресликавање са дискретним вредностима константа на X.*

Доказ. Нека је X повезан, нека је $d : X \to D$ пресликавање са дискретним вредностима и нека за неко $y \in D$ важи $y \in d(X)$. Онда $d^{-1}(y)$ мора бити затворено-отворен и непразан, па мора бити једнак X. Одатле следи да је d константно са само једном вредношћу y.

Сада, нека је X неповезан. Онда важи $X = U \cup V$ за неке дисјунктне затворено-отворене скупове U и V. Онда је пресликавање $d : X \to \{0,1\}$ које узима вредност 0 на U и 1 на V неконстантно пресликавање са дискретним вредностима. ■

Лема 2.4.3. *Нека је $f : X \to Y$ непрекидна функција и нека је тополошки простор X повезан. Онда је и тополошки простор $f(X)$ повезан.*

Доказ. Нека је $d : f(x) \to D$ пресликавање са дискретним вредностима. Тада је $d \circ f$ пресликавање са дискретним вредностима на X, па је то пресликавање константно. Одатле следи да је d константно, па је скуп $f(X)$ повезан. ■

Лема 2.4.4. *Ако је $\mathcal{Y}_i$ фамилија повезаних скупова у тополошком простору X таква да никоја два скупа $\mathcal{Y}_i$ нису дисјунктна, онда је $\bigcup \mathcal{Y}_i$ повезан.*

Доказ. Нека је $d : \bigcup \mathcal{Y}_i \to D$ пресликавање са дискретним вредностима. Нека су p, q било које две тачке у $\bigcup \mathcal{Y}_i$. Претпоставимо да $p \in \mathcal{Y}_i$, $q \in \mathcal{Y}_j$ и $r \in \mathcal{Y}_i \cap \mathcal{Y}_j$. Онда, пошто d мора бити константно на сваком $\mathcal{Y}_i$, важи $d(p) = d(q) = d(r)$. Како су p и q произвољно изабрани, d мора бити константно. ■

Последица 2.4.5. *Релација „p и q припадају повезаном подскупу тополошког простора X" је релација еквиваленције.*

Дефиниција 2.4.4. Класе еквиваленције релације из последице 2.4.5 називамо *компонентама* тополошког простора X.

Лема 2.4.6. *Компоненте тополошког простора X су повезане и затворене. Сваки отворен скуп је садржан у некој компоненти. Односно, компоненте су „максимални повезани подскупови". Различите компоненте су дисјунктне.*

Доказ. Ово тврђење следи из тога да су компоненте класе еквиваленције. По дефиницији, компонента тополошког простора X која садржи p је унија свих повезаних скупова који садрже p и та унија је повезана по 2.4.4 Одавде следи и да је отворен скуп садржан у компоненти. Затворење повезаног скупа је повезан скуп, па је и компонента затворен скуп. ■

Лема 2.4.7. *Тврђење "$d(p) = d(q)$ за свако пресликавање са дискретним вредностима d над X"је релација еквиваленције.*

Дефиниција 2.4.5. Класе еквиваленције релације из става 2.4.7 се зову *квази-компоненте* тополошког простора X.

Лема 2.4.8. *Квази-компоненте тополошког простора X су затворене. Сваки повезан скуп је садржан у некој квази-компоненти. Конкретније, свака компонента је садржана у некој квази-компоненти. Различите квази-компоненте су дисјунктне и покривају цео тополошки простор X.*

Доказ. Ако $p \in X$, онда је квази-компонента која садржи p

$$\{q \in X | d(q) = d(p) \text{ за свако пресликавање са дискретним вредностима}\}.$$

То је

$$\bigcap \{d^{-1}(d(p)) | d \text{ је пресликавање са дискретним вредностима}\},$$

што је пресек затворених скупова, па је и сам затворен. Остатак доказа је тривијалан. ■

2.5 Компактност

Идеја компактности је једна од најбитнијих идеја у целој математици и није присутна само у топологији већ и у математичкој анализи.

Дефиниција 2.5.1. *Покривач* тополошког простора X је фамилија скупова чија је унија једнака X. Покривач је *отворен* ако су ти скупови отворени. *Потпокривач* је подскуп ове фамилије који је и даље покривач од X.

Дефиниција 2.5.2. За тополошки простор кажемо да је *компактан* ако за сваки отворен покривач од X постоји коначан потпокривач.

Дефиниција 2.5.3. За фамилију $\mathcal{C}$ кажемо да има *својство коначног пресека* ако је пресек било које коначне потфамилије непразан.

Теорема 2.5.1. *Тополошки простор X је компактан акко за сваку фамилију затворених подскупова простора X која има својство коначног пресека важи да је њен пресек непразан.*

Доказ. Ова чињеница следи из саме дефиниције компактности. ∎

Теорема 2.5.2. *Ако је тополошки простор X компактан и $f : X \to Y$ непрекидна функција, онда је и тополошки простор $f(X)$ компактан.*

Доказ. Уместо Y можемо једноставно писати $f(X)$ и претпоставити да је f сурјективна. Како је по дефиницији непрекидности инверзна слика при f сваког отвореног скупа из Y отворена, а X је компактан простор, тврђење следи. ∎

Теорема 2.5.3. *Ако је тополошки простор X компактан и ако је $A \subset X$ затворен скуп у X, онда је A компактан.*

Доказ. Нека је $C = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup \dots$ отворен покривач скупа A. Очигледно је и $C \cup (X - A)$ отворен покривач целог простора X. Како је X компактан, онда постоји коначни подскуп од C који покрива A, па је и A компактан. ∎

Теорема 2.5.4. *Јединични интервал $I = [0,1]$ је компактан.*

Доказ. Нека је $\mathbf{U}$ отворен покривач од I. Нека је

$$S = \{s \in I | [0, s] \text{ је покривен коначном потфамилијом од } \mathbf{U}\}.$$

Нека је b најмања горња граница S. Јасно је да S мора бити неког од облика $S = [0, b)$ или $S = [0, b]$. У првом случају, посматрајмо скуп $U \in \mathbf{U}$ који садржи тачку b. Овај скуп мора садржати и интервал облика $[a, b]$. Али онда можемо убацити U у претпостављени коначни покривач од $[0, a]$, како бисмо добили коначни покривач од $[0, b]$. Одатле следи да је S облика $S = [0, b]$ за неко $b \in [0, 1]$. Али ако је $b < 1$, онда на сличан начин доказујемо да постоји коначан покривач од $[0, c]$ за неко $c > b$, што је у контрадикцији са избором b. Следи да је $b = 1$, одакле имамо коначан покривач од $[0, 1]$. ∎

Треба напоменути да је сваки интервал облика $[a, b]$ хомеоморфан интервалу I, па је самим тим и компактан. Такође, сваки затворен подскуп од $[a, b]$ је компактан. Исто видимо да компактан скуп у $\mathbb{R}$ мора бити ограничен. Самим тим, подскуп од $\mathbb{R}$ је компактан акко је затворен и ограничен. Аналогно тврђење не важи у осталим метричким просторима.

Теорема 2.5.5. *Пресликавање са реалним вредностима над компактним простором узима максималну вредност.*

Доказ. Ако је $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и ако је X компактан тополошки простор, онда је и $f(X)$ компактан по теореми 2.5.2. Самим тим је $f(X)$ ограничен и затворен. Онда $\sup f(X)$ постоји и коначан је, а и припада $f(X)$ јер је $f(X)$ затворен. ■

Глава 3

Фундаментална група

Један од основних задатака топологије је да одреди да ли су два простора хомеоморфна. Не постоји начин да решимо овај проблем у општем случају, али сад ћемо приказати једну од основних техника за решавање овог проблема у специфичним случајевима.

Да бисмо показали да су два простора заиста хомеоморфна довољно је конструисати непрекидно пресликавање из једног простора у други тако да постоји непрекидан инверз, за шта већ имамо довољно развијене технике.

Међутим, доказати да два простора нису хомеоморфна је доста теже. Да бисмо то постигли, морамо показати да не постоји непрекидно пресликавање са непрекидним инверзом. Проблем би био решен ако бисмо пронашли неку тополошку карактеристику једног простора коју други простор не задовољава. На пример, затворени интервал $[0, 1]$ не може бити хомеоморфан отвореном интервалу $(0, 1)$, јер је први простор компактан, а други није. Исто тако, реална права $\mathbb{R}$ не може бити хомеоморфна са $\mathbb{R}^2$, јер брисањем једне тачке из првог простора он постаје неповезан, док брисањем једне тачке из другог простора он остаје повезан.

Иако нас некад могу довести до решења проблема, изучавање већ добро познатих тополошких карактеристика простора најчешће није довољно. На пример, како бисмо показали да раван $\mathbb{R}^2$ није хомеоморфна са тродимензионалним простором $\mathbb{R}^3$? Све тополошке карактеристике ових простора са којима смо се раније сусретали (повезаност, компактност,...) су исте у оба простора.

Ово нас мотивише да уведемо нове карактеристике простора које би нам помогле у решавању овог проблема. Једна карактеристика која се природно намеће је *проста повезаност* с којом се читалац, изучавајући линијске интеграле, можда већ сусрео у анализи. Грубо говорећи, за простор X кажемо да је просто повезан ако се свака затворена крива у X може смањити у тачку (прецизнију дефиницију овога наводимо касније). Ова карактеристика, како ћемо се и сами уверити касније, довољно добро разликује просторе $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Поред ове идеје, постоји и општија карактеристика која нам омогућава да разликујемо два тополошка простора, а то је *фундаментална група* простора. Видећемо да два хомеоморфна простора имају изоморфне фундаменталне групе.

У овом поглављу ћемо дефинисати фундаменталну групу и приказати неке њене основне карактеристике.

3.1 Хомотопије путева

Пре него што дефинишемо фундаменталну групу простора X, посматраћемо путеве у X и релацију еквиваленције над њима коју називамо *путна хомотопија*. Такође, дефинисаћемо и операцију над класама еквиваленције ове релације и добићемо алгебарску структуру *групоида*.

Дефиниција 3.1.1. Ако су f и f' непрекидна пресликавања простора X у простор Y, кажемо да су f и f' *хомотопне* ако постоји непрекидно пресликавање $F : X \to Y$ тако да је

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{и} \quad F(x, 1) = f'(x)$$

за свако x. Пресликавање F је *хомотопија* између f и f'. Ако су f и f' хомотопне, пишемо $f \simeq f'$. Ако је $f \simeq f'$ и f' је константно пресликавање, кажемо да је f *нулхомотопно*.

Ако означимо други параметар пресликавања F са t и замислимо да он представља време, онда хомотопија F представља непрекидну „деформацију" пресликавања f у пресликавање f', кад t иде од 0 до 1.

Сада посматрамо специјалан случај у ком је f *пут* у X. То значи да је $f : [0, 1] \to X$ непрекидно пресликавање такво да важи $f(0) = x_0$ и $f(1) = x_1$, и кажемо да је f пут у X од x_0 до x_1. Тачку x_0 називамо *почетна тачка*, а тачку x_1 *крајња тачка* пута f. Надаље за I увек користимо интервал $[0, 1]$ као домен за све путеве.

Дефиниција 3.1.2. Два пута f и f' која сликају $I = [0, 1]$ у X су *путно хомотопна* ако имају исту почетну тачку x_0 и исту крајњу тачку x_1 и ако постоји непрекидно пресликавање $F : I \times I \to X$ такво да је

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) \qquad & F(s, 1) &= f'(s) \\ F(0, t) &= x_0 \qquad & F(1, t) &= x_1 \end{aligned}$$

за свако $s \in I$ и свако $t \in I$. Пресликавање F је *путна хомотопија* између f и f'. Пишемо $f \simeq_p f'$.

Следећу лему и теорему наводимо без доказа.

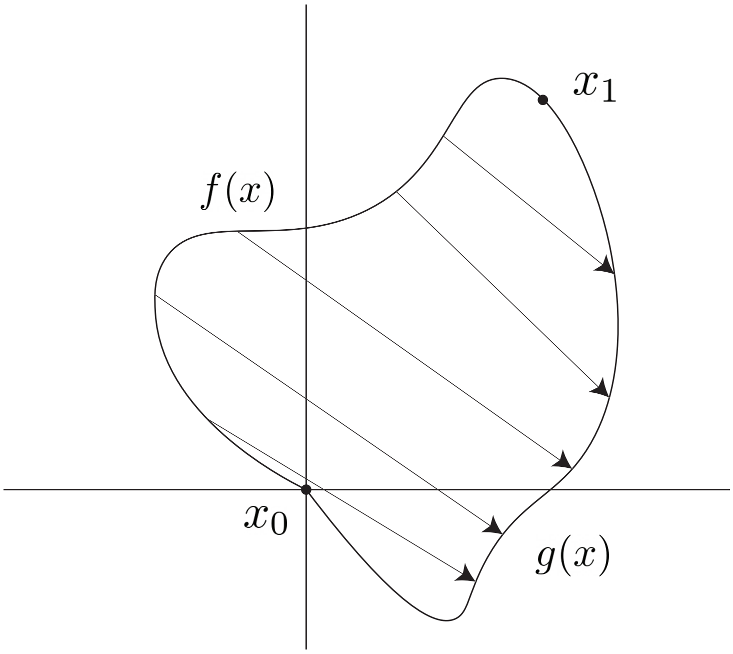
Лема 3.1.1. *Релације $\simeq$ и $\simeq_p$ су релације еквиваленције.*

Пример 1. Нека су f и g нека два пресликавања из простора X у простор $\mathbb{R}^2$. Пресликавање

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

је очигледно хомотопија између f и g. Ову хомотопију називамо *праволинијска хомотопија* (слика 3.1), јер помера сваку тачку $f(x)$ у тачку $g(x)$ дуж праве линије која их спаја.

Општије, нека је A било који конвексни подскуп простора $\mathbb{R}^n$. Онда су свака два пута f и g у A од x_0 до x_1 путно хомотопна у A.



Слика 3.1: Праволинијска хомотопија

Дефинишимо још и операцију над класама еквиваленције ових релација.

Дефиниција 3.1.3. Ако је f пут у X од x_0 до x_1 и g пут у X од x_1 до x_2, производ $f * g$ је дат једначинама:

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{за } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2s-1) & \text{за } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Функција h је добро дефинисана, непрекидна и представља пут од x_0 до x_2. У суштини, h је пут чија је прва половина пут f, а друга половина пут g.

Лако се можемо уверити и да је операција $*$ добро дефинисана јер важи

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Теорема 3.1.2. *Операција $*$ има следећа својства:*

1. *(Асоцијативност) Ако је $[f]*([g]*[h])$ дефинисано, онда је и $([f]*[g])*[h]$ дефинисано, и ти изрази су једнаки.*

2. *(Леви и десни неутрал) Ако $x \in X$, нека e_x означава константан пут $e_x : I \to X$ који слика цело I у тачку x. Ако је f пут у X из x_0 у x_1, онда је*

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad \text{и} \quad [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

3. *(Инверз) Нека је f пут у X из x_0 у x_1 и нека је $\bar{f}(s) = f(1-s)$. Пут $\bar{f}(s)$ називамо* повратак *од f. Онда је*

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \textit{и} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Наводимо још једну особину операције $*$ која нам може бити од користи.

Теорема 3.1.3. *Нека је f пут у X, и нека су $a_0, \dots, a_n$ бројеви такви да је $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$. Нека је $f_i : I \to X$ пут који слика линеарно пресликан интервал $[a_{i-1}, a_i]$ из I преко f у X. Тада је*

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n].$$

3.2 Фундаментална група

Као што видимо, скуп класа путне хомотопије у X са операцијом $*$ није група, зато што производ две класе није увек дефинисан.

Дефиниција 3.2.1. Нека је X тополошки простор и нека $x_0 \in X$. Пут у X који почиње и завршава се у тачки x_0 назива се *петља* са базном тачком x_0. Скуп класа еквиваленције путне хомотопије петљи са базном тачком x_0 заједно са операцијом $*$ назива се *фундаментална група* простора X са базном тачком x_0. Означавамо је са $\pi_1(X, x_0)$.

Дефиниција 3.2.2. Нека је α пут у X од x_0 до x_1. Дефинишемо пресликавање

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

једначином

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

Пресликавање $\hat{\alpha}$ је добро дефинисано, јер је операција $*$ добро дефинисана. Због асоцијативности операције $*$ видимо да ако је f петља са базом у x_0, онда је $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ заиста петља са базом у x_1.

Теорема 3.2.1. *Пресликавање $\hat{\alpha}$ је изоморфизам.*

Доказ. Прво показујемо да је $\hat{\alpha}$ хомоморфизам.

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g])\end{aligned}$$

Да бисмо показали да је $\hat{\alpha}$ изоморфизам, доказаћемо да ако β означава пут $\bar{\alpha}$, што је повратак од α, онда је $\hat{\beta}$ инверз од $\hat{\alpha}$. Сада за сваки елемент $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ имамо

$$\begin{aligned}\hat{\beta}([h]) &= [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}] \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) &= [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h].\end{aligned}$$

Слично доказујемо и да је $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([h])) = [h]$ за свако $[h] \in \pi_1(X, x_0)$. ∎

Последица 3.2.2. *Ако је простор X путно повезан и ако су x_0 и x_1 две тачке простора X, онда је $\pi_1(X, x_0)$ изоморфно са $\pi_1(X, x_1)$.*

Дефиниција 3.2.3. Простор X је *просто повезан* ако је путно повезан и ако је $\pi_1(X, x_0)$ тривијална група за неко $x_0 \in X$ (па самим тим и за свако $x_0 \in X$). Како бисмо нагласили да је $\pi_1(X, x_0)$ тривијална група пишемо $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Лема 3.2.3. *У просто повезаном простору X, било која два пута са истим почетним и крајњим тачкама су хомотопна.*

Доказ. Нека су α и β два пута од x_0 до x_1. Тада је $\alpha * \bar{\beta}$ дефинисано и представља петљу у X са базном тачком x_0. Пошто је X просто повезан, ова петља је путно хомотопна са петљом-неутралом око x_0. Онда имамо

$$[\alpha] = [\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta],$$

чиме је доказано да су α и β путно хомотопни. ■

Дефиниција 3.2.4. Нека је $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ непрекидно пресликавање. Дефинишимо

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

једначином

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

Пресликавање h_* називамо *хомоморфизам индукован са h* у односу на тачку x_0.

Пресликавање h_* је добро дефинисано, јер ако је F путна хомотопија између путева f и f', онда је $h \circ F$ путна хомотопија између путева $h \circ f$ и $h \circ f'$. Из следеће једначине је очигледно да је h_* хомоморфизам.

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g)$$

У случају да посматрамо различите базне тачке простора X користимо нотацију

$$(h_{x_0})_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

за индукован хомоморфизам око тачке x_0.

Следећу теорему наводимо без доказа јер следи из саме дефиниције индукованог хомоморфизма.

Теорема 3.2.4. *Ако су пресликавања $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ и $k : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ непрекидна, онда је $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Ако је $i : (X, x_0) \to (X, x_0)$ идентичко пресликавање, онда је i_* идентички хомоморфизам.*

Последица 3.2.5. *Ако је* $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *хомеоморфизам, онда је* h_* *изоморфизам између* $\pi_1(X, x_0)$ *и* $\pi_1(Y, y_0)$.

Доказ. Нека је $k : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ инверз од h. Онда је $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$, где је i идентичко пресликавање простора (X, x_0), док је $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$, где је j идентичко пресликавање простора (Y, y_0). Како су i_* и j_* идентички хомоморфизми група $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(Y, y_0)$, редом, онда је k_* инверз хомоморфизма h_*, па је h_* изоморфизам. ■

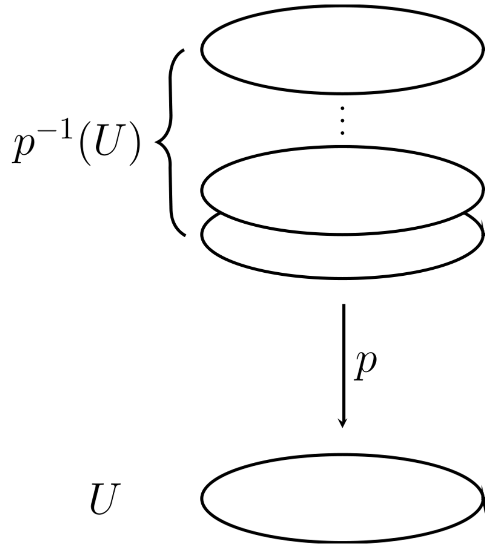
Пример 2. Сада можемо да покажемо да је фундаментална група за било који конвексан скуп $X \subset \mathbb{R}^n$ тривијална. И заиста, лако се види да је конвексан скуп $X \subset \mathbb{R}^n$ просто повезан, јер је за неке две петље f и f' око исте тачке $x_0 \in X$ пресликавање $F(s,t) = (1-t)f(s) + tf'(s)$ хомотопија. Одавде следи да је фундаментална група простора B^n такође тривијална.

Пример 3. У прошлом примеру смо показали да је $\mathbb{R}^n$ просто повезан. Такође, лако се види да је и $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ просто повезан, док $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ није. Одатле следи да $\mathbb{R}^3$ не може бити хомеоморфан са $\mathbb{R}^2$.

3.3 Простор покривача

Дефиниција 3.3.1. Нека је $p : E \to B$ непрекидно сурјективно пресликавање. Отворен скуп $U \subset B$ је *равномерно покривен* пресликавањем p ако инверзна слика $p^{-1}(U)$ може бити представљена као унија дисјунктних отворених скупова V_α у E, тако да је за свако α рестрикција p на V_α ($p\mid_{V_\alpha}$) хомеоморфизам V_α на U. Фамилију $\{V_\alpha\}$ називамо подела $p^{-1}(U)$ на *кришке*.

Ако пресликавање p равномерно покрива отворен скуп U, $p^{-1}(U)$ можемо замислити као мноштво палачинки истог облика и величине као U које лебде изнад U. Пресликавање p све ове „палачинке“ лепи на U (слика 3.2). Из дефиниције је јасно да је и сваки отворен подскуп W скупа U равномерно покривен пресликавањем p.



Слика 3.2: Интуитивно, пресликавање p лепи „палачинке“ на U.

Дефиниција 3.3.2. Нека је $p : E \to B$ непрекидно сурјективно пресликавање. Ако свака тачка $b \in B$ има околину U која је равномерно покривена пресликавањем p, онда пресликавање p називамо *покривајуће пресликавање*, а скуп E *простором покривача* скупа B.

Теорема 3.3.1. *Пресликавање $p : \mathbb{R} \to S^1$ дато једначином*

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

је покривајуће пресликавање.

Пресликавање p се може замислити као функција која обмотава реалну праву $\mathbb{R}$ око круга S^1, тако да пресликава сваки интервал $[n, n+1]$ на S^1.

Доказ. Закључак да је p покривајуће пресликавање изводимо из основних својстава синуса и косинуса. Размотримо, на пример, скуп $U \subset S^1$ који се састоји само од оних тачака које имају позитивну прву координату. Скуп $p^{-1}(U)$ се састоји од оних тачака x за које је $\cos 2\pi x$ позитиван, а то је заправо унија интервала

$$V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$$

за све $n \in \mathbb{Z}$. Даље, пресликавање p ограничено на било који затворени интервал $\bar{V_n}$ је инјективно, јер је $\sin 2\pi x$ строго монотона функција на том интервалу. Такође, пресликавање p слика сурјективно скуп $\bar{V_n}$ у скуп $\bar{U}$ и скуп V_n у U, према теореми о средњој вредности. Како је $\bar{V_n}$ компактан, $p\mid_{\bar{V_n}}$ је хомеоморфизам између $\bar{V_n}$ и $\bar{U}$. Специјално, $p\mid_{V_n}$ је хомеоморфизам између V_n и U. Слични аргументи се могу применити на пресек S^1 са доњом и горњом отвореном полуравни и са левом отвореном полуравни. Ови отворени скупови покривају S^1 и сваки од њих је равномерно покривен пресликавањем p. Дакле, $p : \mathbb{R} \to S^1$ је покривајуће пресликавање. $\blacksquare$

Теорема 3.3.2. *Нека је $p : E \to B$ покривајуће пресликавање. Ако је B_0 потпростор B и ако је $E_0 = p^{-1}(B_0)$, онда је пресликавање $p_0 : E_0 \to B_0$ добијено рестрикцијом p покривајуће пресликавање.*

Доказ. Нека $b_0 \in B_0$. Нека је отворен подскуп U скупа B који садржи b_0 равномерно покривен пресликавањем p. Нека је фамилија V_α партиција $p^{-1}(U)$ на кришке. Тада је $U \cap B_0$ околина b_0 у B_0, скупови $V_\alpha \cap E_0$ су дисјунктни отворени скупови у E_0 чија је унија $p^{-1}(U \cap B_0)$ и сваки је хомеоморфно пресликан функцијом p на $U \cap B_0$. $\blacksquare$

Теорема 3.3.3. *Ако су $p : E \to B$ и $p' : E' \to B'$ покривајућа пресликавања, онда је*

$$p \times p' : E \times E' \to B \times B'$$

покривајуће пресликавање.

Доказ. Нека $b \in B$ и $b' \in B'$. Нека су U и U' редом околине b и b' које су равномерно покривене пресликавањима p и p', редом. Нека су фамилије V_α и V'_β партиције $p^{-1}(U)$ и $(p')^{-1}(U')$ на кришке, редом. Онда је инверзна слика при $p \times p'$ отвореног скупа $U \times U'$ унија свих скупова $V_\alpha \times V'_\beta$. Ово су дисјунктни отворени скупови од $E \times E'$ и сваки је хомеоморфно пресликан функцијом $p \times p'$ на $U \times U'$. ■

3.4 Фундаментална група кружнице

Дефиниција 3.4.1. Нека је $p : E \to B$ пресликавање. Ако је f непрекидно пресликавање неког простора X у B, *подизање* је пресликавање $\tilde{f} : X \to E$ такво да је $p \circ \tilde{f} = f$.

Дефиниција 3.4.2. Нека је $p : E \to B$ покривајуће пресликавање. Нека $b_0 \in B$. Изаберемо e_0 такво да је $p(e_0) = b_0$. Нека је $[f]$ елемент групе $\pi_1(B, b_0)$, нека је $\tilde{f}$ подизање пута f у пут у E који почиње у e_0. Са $\phi([f])$ означимо крајњу тачку $\tilde{f}(1)$ пута $\tilde{f}$. Тада је ϕ добро дефинисано пресликавање

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0).$$

Пресликавање ϕ је добијено из покривајућег пресликавања p. Оно зависи од избора тачке e_0.

Теорема 3.4.1. *Нека је $p : E \to B$ покривајуће пресликавање. Нека је $p(e_0) = b_0$. Ако је E путно повезан, онда је*

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

сурјективно пресликавање. Ако је E просто повезан, онда је ϕ бијекција.

Доказ. Ако је E путно повезан, онда за неко $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ постоји пут $\tilde{f}$ у E од e_0 до e_1. Тада је $f = p \circ \tilde{f}$ петља у B у b_0 по дефиницији.
Претпоставимо да је E просто повезан. Нека су $[f]$ и $[g]$ два елемента групе $\pi_1(B, b_0)$ таква да је $\phi([f]) = \phi([g])$. Нека су $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ подизања од f и g, редом, у пут у E који почиње у e_0. Тада је $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Како је E просто повезан, постоји путна хомотопија $\tilde{F}$ у E између $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$. Онда је $p \circ \tilde{F}$ путна хомотопија у B између f и g. ■

Теорема 3.4.2. *Фундаментална група S^1 је изоморфна адитивној групи целих бројева.*

Доказ. Нека је $p : \mathbb{R} \to S^1$ покривајуће пресликавање из теореме 3.3.1. Нека је $e_0 = 0$ и $b_0 = p(e_0)$. Тада је $p^{-1}(b_0)$ скуп $\mathbb{Z}$ целих бројева. Како је $\mathbb{R}$ просто повезан,

$$\phi : \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z}$$

је бијективно пресликавање. Желимо да докажемо да је ϕ хомоморфизам, одакле непосредно следи теорема. Нека су $[f]$ и $[g]$ у групи $\pi_1(B, b_0)$. Нека су $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ њихова подизања до путева у $\mathbb{R}$ који почињу у 0. Нека је $n = \tilde{f}(1)$ и $m = \tilde{g}(1)$. Тада је $\phi([f]) = n$ и $\phi([g]) = m$ по дефиницији. Нека је $\tilde{\tilde{g}}$ пут

$$\tilde{\tilde{g}}(s) = n + \tilde{g}(s)$$

у $\mathbb{R}$. Пошто је $p(n+x) = p(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$, пут $\tilde{\tilde{g}}$ је подизање од g које почиње у n. Онда је $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ дефинисано и представља подизање $f * g$ које почиње у 0. Крајња тачка овог пута је $\tilde{\tilde{g}}(1) = n + m$. Онда је по дефиницији

$$\phi([f] * [g]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g]).$$

■

3.5 Ретракција и фиксне тачке

Дефиниција 3.5.1. Ако је $A \subset X$, *ретракција* простора X на A је непрекидно пресликавање $r : X \to A$, такво да је $r \mid_A$ идентичко пресликавање скупа A. Ако такво пресликавање постоји, кажемо да је A *ретракт* од X.

Лема 3.5.1. *Ако је A ретракт простора X, онда је хомоморфизам фундаменталних група индукован инклузијом $j : A \to X$ инјективан.*

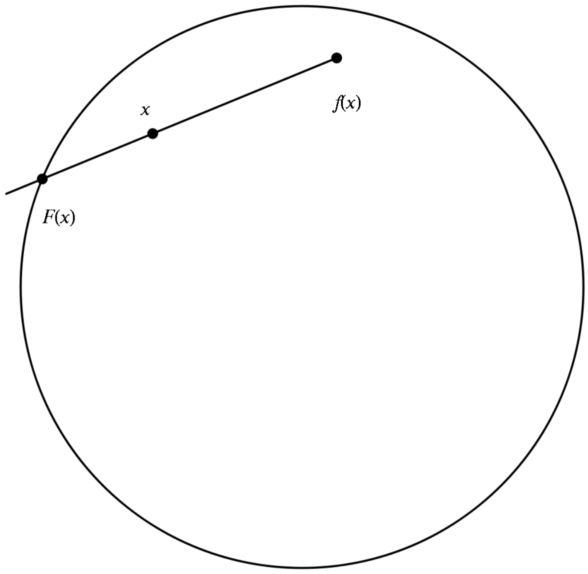
Доказ. Ако је $r : X \to A$ ретракција, онда је композиција пресликавања $r \circ j$ идентичко пресликавање скупа A. Онда је $r_* \circ j_*$ идентичко пресликавање групе $\pi_1(A, a)$, па j_* мора бити инјективно пресликавање. ■

Теорема 3.5.2. *Не постоји ретракција простора B^2 на простор S^1.*

Доказ. Ако би S^1 био ретракт простора B^2, онда би хомоморфизам индукован инклузијом $j : S^1 \to B^2$ био инјективан. Међутим, фундаментална група S^1 није тривијална (знамо да је изоморфна адитивној групи целих бројева), док фундаментална група B^2 јесте тривијална. ■

Теорема 3.5.3 (Брауерова теорема за две димензије)**.** *Непрекидно пресликавање $f : B^2 \to B^2$ мора садржати бар једну фиксну тачку тј. мора постојати $x \in B^2$ тако да је $f(x) = x$.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Не постоји фиксна тачка пресликавања f. Онда постоји пресек кружнице и праве између тачака $f(x)$ и x за свако $x \in B^2$. Уочимо пресликавање $F : B^2 \to S^1$ које слика свако $x \in B^2$ у пресек полуправе између тачака $f(x)$ и x са кружницом. Ово пресликавање је ретракција (слика 3.3). Како смо доказали да не постоји ретракција између B^2 и S^1, онда добијамо контрадикцију, па пресликавање f има бар једну фиксну тачку. ■



Слика 3.3: Приказ претпостављене ретракције $F(x)$

Глава 4

Хомологије

Поред хомотопија, у решавању проблема класификације тополошких простора нам може помоћи и хомологија простора, која се састоји од низа тополошких инваријанти које представљају хомолошке групе:

$$H_0(X), H_1(X), H_2(X), \ldots$$

где k-та хомолошка група $H_k(X)$, неформално говорећи, описује број k-димензионалних рупа у X. Специјално, $H_0(X)$ описује путно повезане компоненте простора X. Неки примери хомолошких група:

1. За n-димензионалну сферу која има једну путно повезану компоненту и једну n-димензионалну рупу хомолошке групе су:

$$H_k\left(S^n\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ \{0\} & \text{у супротном.} \end{cases}$$

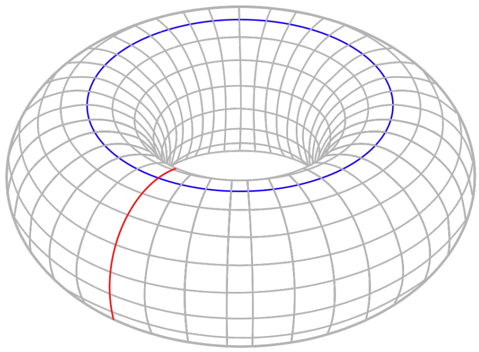
2. За n-димензионалну лопту која има само једну путно повезану компоненту хомолошке групе су:

$$H_k\left(B^n\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ \{0\} & \text{у супротном.} \end{cases}$$

3. За торус који има једну путно повезану компоненту, једну дводимензионалну рупу и две једнодимензионалне рупе хомолошке групе су:

$$H_k(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & k = 1 \\ \{0\} & \text{у супротном.} \end{cases}$$

За разлику од хомотопија, хомологије су много лакше за израчунавање у великим просторима и, такође, не захтевају од нас да пазимо на базне тачке приликом рада са њима.



Слика 4.1: Торус има две једнодимензионалне и једну дводимензионалну рупу.

4.1 Аксиоме хомолошке теорије

Следеће аксиоме мора да испуњава свака хомолошка теорија и у овом раду их наводимо само информативно, јер разјашњавање појмова из теорије категорија и апстрактне алгебре потребних за потпуно разумевање хомологија превазилази опсег овог рада.

Дефиниција 4.1.1. *Хомолошка теорија* (над категоријама свих парова тополошких простора и непрекидних пресликавања) је функтор H који сваком пару простора (X, A) додељује абелову групу $H_p(X, A)$, и сваком пресликавању хомоморфизам $f : (X, A) \to (Y, B)$, заједно са природним трансформацијама функтора $\partial_* : H_p(X, A) \to H_{p-1}(A)$ које се називају повезујући хомоморфизми (где користимо $H_*(A)$ као ознаку за $H_*(A, \varnothing)$), тако да је задовољено следећих пет аксиома:

1. (Аксиома хомотопности)

$$f \simeq g : (X, A) \to (Y, B) \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X, A) \to H_*(Y, B).$$

2. (Аксиома тачности) За инклузије $i : A \hookrightarrow X$ и $j : X \hookrightarrow (X, A)$ низ

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

   је тачан.

3. (Аксиома сечења) Ако узмемо пар (X, A) и отворен скуп $U \subset X$, тако да $\bar{U} \subset \operatorname{int}(A)$, онда инклузија $k : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ индукује изоморфизам

$$k_* : H_*(X - U, A - U) \xrightarrow{\approx} H_*(X, A).$$

4. (Аксиома димензије) За простор P са једном тачком, $H_i(P) = 0$ за свако $i \neq 0$.

5. (Аксиома адитивности) За тополошку суму $X = +_\alpha X_\alpha$ хомоморфизам

$$\bigoplus (i_\alpha)_* : \bigoplus H_n(X_\alpha) \to H_n(X)$$

   је изоморфизам, где је $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ инклузија.

У наставку наводимо једну од најпознатијих хомолошких теорија.

4.2 Сингуларна хомологија

Дефиниција 4.2.1. Нека је $e_0, e_1, e_2, \dots$ стандардна база простора $\mathbb{R}^\infty$. Онда је

$$\Delta_p = \left\{ x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i | \sum \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

стандардни p-симплекс. Бројеве λ_i називамо *барицентричне координате.*

Слика 4.2: Симплекси до треће димензије

Дефиниција 4.2.2. Нека су дате тачке $v_0, \dots, v_n$ у $\mathbb{R}^n$ и нека $[v_0, \dots, v_n]$ означава пресликавање $\Delta_n \to \mathbb{R}^n$, тако да слика $\sum_i \lambda_i e_i \to \sum_i \lambda_i v_i$. Ово се назива *афин сингуларни n-симплекс.*

Дефиниција 4.2.3. Афин сингуларни симплекс $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p]$ називамо *i-та страна* и означавамо са F_i^p.

Приметимо да i-та страна која је наведена у претходној дефиницији означава страну симплекса наспрам i-тог чвора симплекса.

Дефиниција 4.2.4. Ако је X тополошки простор, онда је *сингуларни p-симплекс* простора X пресликавање $\sigma_p : \Delta_p \to X$. *Сингуларна група p-ланаца* $\Delta_p(X)$ је слободна абелова група над сингуларним p-симплексима.

Дефиниција 4.2.5. Ако је $\sigma_p : \Delta_p \to X$ сингуларни p-симплекс, онда је i-та страна σ једнака $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p$. *Обод* од σ је $\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)}$, што је $(p-1)$-ланац. Ако је $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ p-ланац, онда пишемо $\partial_p c = \partial_p (\sum_\sigma n_\sigma \sigma) = \sum_\sigma n_\sigma \partial_p \sigma$. Тачније, ∂_p постаје хомоморфизам

$$\partial_p : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X).$$

Следећу лему наводимо без доказа.

Лема 4.2.1. *Важи* $\partial_p \partial_{p+1} = 0$.

Такође, дефинишимо $\Delta_p(X) = 0$ за свако $p < 0$ и ∂_p за $p \leq 0$. Самим тим, композиција

$$\Delta_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} \Delta_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \Delta_{p-1}(X)$$

је увек нула. Ланци у $\ker \partial_p$ се називају p-циклуси, а они у $\operatorname{im} \partial_{p+1}$ се називају p-ободи:

$$\begin{aligned} p\text{-циклуси} &= \ker \partial_p = Z_p(X) \\ p\text{-ободи} &= \operatorname{im} \partial_{p+1} = B_p(X). \end{aligned}$$

Дефиниција 4.2.6. Сингуларну хомолошку групу простора X дефинишемо као

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X) = (\ker \partial_p)/(\operatorname{im} \partial_p).$$

Испоставља се да овако дефинисана хомолошка теорија задовољава све претходно наведене аксиоме. Применом ове хомолошке теорије, у коју сад нећемо улазити, добијамо следеће две леме.

Лема 4.2.2. *Хомолошка група $H_{n-1}(B^n)$ је тривијална група.*

Лема 4.2.3. *Хомолошка група $H_{n-1}(S^{n-1})$ је изоморфна цикличној групи.*

У другој глави смо навели доказ Брауерове теореме за случај дводимензионалних тополошких простора. Сада имамо довољно алата да докажемо и општију формулацију теореме која представља једну од првих и најутицајнијих примена хомологије.

Теорема 4.2.4 (Брауерова теорема)**.** *Непрекидно пресликавање $f : B^n \to B^n$ мора садржати бар једну фиксну тачку тј. мора постојати $x \in B^n$ тако да је $f(x) = x$.*

Доказ. Истим геометријским аргументом који смо искористили у доказу Брауерове теореме за $n = 2$ сводимо теорему на доказивање да ретракција $F : B^n \to S^{n-1}$ не постоји. Како је $H_{n-1}(B^n)$ тривијална група, $H_{n-1}(S^{n-1})$ изоморфна цикличној групи, а инклузија $i : S^{n-1} \to B^n$ би морала да индукује инјективни хомоморфизам између S^{n-1} и B^n, добијамо да ретракција не постоји, па пресликавање f мора садржати бар једну фиксну тачку. ∎

Глава 5

Закључак

Надамо се да је овај рад успео у намери да приближи алгебарску топологију читаоцима. Свесни смо да је алгебарска топологија једна од најапстрактнијих области математике која, наравно, због свог обима није могла бити у потпуности покривена овим радом. Зато смо се потрудили да кроз кратке неформалне текстове, примере и слике дамо читаоцима потребну интуицију, како би са што већом лакоћом разумели овај рад. Такође, рад смо завршили доказом Брауерове теореме која своје примене налази не само у топологији, већ и у другим математичким областима попут статистике, теорије игара, математичке анализе и економије, чиме смо желели да истакнемо да је топологија заступљена у различитим гранама математике. Надамо се да смо тиме читаоцима дали довољну мотивацију да надограде стечено знање и наставе да изучавају топологију у своје слободно време.

Библиографија

[1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer, Graduate texts in mathematics 1993.

[2] James Munkres. *Topology; a first course*. Pearson, 2000.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*.