Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

- из математике –

Конике и њихове особине у геометрији

ученик:
Антоније Суботић IVe

ментор:
проф. Бојана Матић

Београд, јун 2020. године

Садржај

1

Увод

Геометрија као прва практична примена математике била је развијена још код древних цивилизација. Свакодневно су људи уочавали тачке, линије, фигуре, површи. Због људске радозналости, одувек смо желели да нађемо повезаност између тих објеката на што једноставнији, елегантнији начин. Свако од нас има сопствени доживљај лепог, те не можемо генерализовати саму лепоту, међутим, у овом раду ћемо изложити тврђења која су за већину најпре занимљива, и која ће нам приказати савршен склад тачака и линија тј. уверити нас у лепоту геометрије

Сусретали смо се током школовања са правама, троугловима, квадратима, пирамидама, разним правилним и неправилним облицима, међутим фигура која се издвајала по својој савршености јесте круг. С његовом површином и обимом уједно се први пут срећемо са бројем π, за који знамо да је уско повезан са осталим гранама математике попут анализе, такође има посебно место у сликарству, архитектури, и многим другим делатностима. Ако погледамо у небо видећемо да нас Месец, Сунце, и све те сићушне тачкице на небу, за које данас знамо да су планете или звезде - све оне подсећају на круг, зар не? Чини се као да природа говори језиком круга…

Главна идеја овог рада јесте да нам прикаже нестандардне особине које поседују фигуре „сличне“ кругу, такорећи на вишем нивоу апстракције у односу на праве, криве другог реда, које једва да се спомињу у средњошколској литератури.

У поглављу број 2, најпре ћемо дефинисати објекте над којима радимо, осврнути са на њихову „алгебарску“ страну (којој потпуну пажњу посвећујемо у петом поглављу), дати основне исказе и доказе теорема које су од круцијалног значаја за наставак самог рада, које су саме по себи лаке, али које ћемо интензивно користити у доказима сложенијих теорема.

У трећем поглављу подсетићемо се најпре основних чињеница из инверзије, основних теорема пројективне геометрије које су битне за правилно разумевање остатка рада, и објаснити како нам те чињенице могу помоћу на овом пољу геометрије.

Четврто, вероватно и најтеже поглавље (јер подразумева да добро владамо претходним градивом), углавном ће се бавити пројективним особинама које су заједничке за све конике. Акценат ће бити на поларној усаглашености, Паскаловој и Бријаншоновој теореми.

Пето поглавље представља аналитички приступ теми. Показали смо како се долази до канонских једначина коника и понудили аналитичко решење једног на изглед чисто геометријског проблема.

Свака теорема пропраћена је доказом, а неколико тврђења(углавном из пројективне геометрије), користили смо без доказа да не би одлутали од главне теме. Већина примера има и одговарајућу слику како би се рад лакше пратио, а и да би се, као што смо већ рекли, увидела лепота коју геометрија носи.

2

Елементарне особине кривих другог реда

2.1. Дефиниције и класификација кривих другог реда

Дефиниција 2.1. Крива другог реда представља скуп тачака чије координате у Декартовом координатном систему задовољавају следећу једначину:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{1}$$

Ако је лева страна једнакости производ два линеарна фактора, тада је наша крива унија 2 праве (које се могу поклопити). У том случају крива је *дегенерисана*. Крива која садржи тачно једну тачку (нпр. $x^2 + y^2 = 0$), такође се назива дегенерисаном.

Као скупови тачака, конике су нам данас познате као параболе, хиперболе, елипсе, парови паралелних правих, парови правих које се секу, дупле праве (са једначином $(px + qy + r)^2 = 0$), тачке и празни скупови.

Такође, лако их је и другачије запамтити, као пресеке произвољне равни са конусом (о чему ћемо детаљније говорити у наставку).

Познат резултат из аналитичке геометрије јесте да за сваку недегенерисану криву постоји координатни систем у којем њена једначина има простију форму. Сам доказ овог тврђења се налази у петом поглављу које се више бави алгебарском страном ове теме, а ми ћемо овде изложити главну идеју:

Најпре, ротирајмо координатни систем за угао φ. То значи да у једначини (1), координате x і y требају бити замењене са $x\cos\varphi + y\sin\varphi$ и $-x\sin\varphi + y\cos\varphi$, респективно. Одабиром одговарајућег φ, можемо постићи то да коефицијент уз xy постане једнак нули. Следећи корак јесте одабир одговарајућег пара $(x_{0,}\ y_0)$, таквог да се транслацијом $x + x_{0,}$ и транслацијом $y + y_0$, једначина (1) трансформише у једну од следеће три *канонске једначине*:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0$ – једначина *елипсе*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$$ - једначина *хиперболе*

$$x^2 = 2py, p > 0$$ – једначина параболе

(касније ћемо доказати да су ово заиста једначине елипсе, хиперболе и параболе)

Крива задата једначином:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

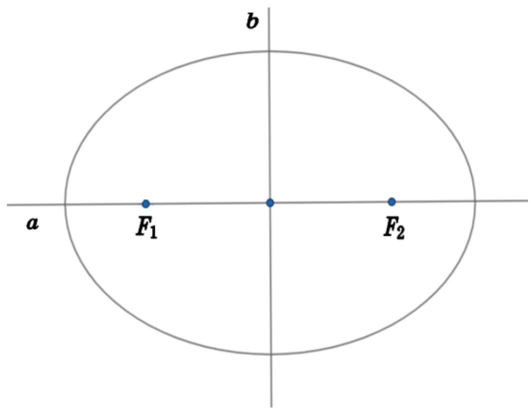
назива се имагинарна елипса. Ова крива не садржи реалне тачке.

Одсада, уколико није другачије наведено, крива другог реда ће за нас увек бити недегенерисана и не имагинарна.

У канонским једначинама јављају се коефицијенти a и b, са којима су конике очигледно врло уско повезане. Наш следећи задатак јесте да пронађемо ту врсту повезаности. Стога уводимо следеће нове појмове, као и саму дефиницију елипсе, параболе и хиперболе.

Дефиниција 2.2. Елипса представља геометријско место тачака за које је збир растојања од две фиксне тачке(жиже) константан.

Основни елементи елипсе су *две жиже(фокуси)*, *велика полуоса* и *мала полуоса*.



F_1 и F_2 су жиже, a и b су велика и мала полуоса

Теорема 2.1. Крива задата једначином :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geq b > 0$$

је елипса са жижама $F_1(\sqrt{a^2-b^2},0)$ и $F_2(-\sqrt{a^2-b^2},0)$, а велика и мала полуоса су једнаке a и b, респективно.

Доказ: За произвољну тачку $A(x,y)$ са елипсе збир F_1A+F_2A добијамо применом Питагориних теорема на троуглове F_1AB и F_2AB где је B подножје нормале из A на F_1F_2:

$$F_1A+F_2A=\sqrt{y^2+(\sqrt{a^2-b^2}+x)^2}+\sqrt{y^2+(\sqrt{a^2-b^2}-x)^2}$$

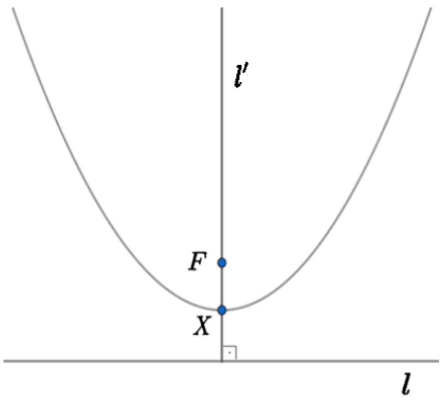
Из полазне једначине уврштавањем $y^2=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}$, добијамо:

$$F_1A+F_2A=\sqrt{(\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+a)^2}+\sqrt{(\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}-a)^2}$$

$F_1A+F_2A=2a$, после скраћивања, што је очигледно константно.

Дефиниција 2.3. Парабола представља геометријско место тачака за које је растојање од фиксиране тачке и праве једнако.

Основни елементи параболе су *жижа*, *теме параболе* и *директриса*(фиксирана права).



F је жижа, X је теме, l' је оса, а l је директриса параболе

Теорема 2.2. Крива задата једначином:

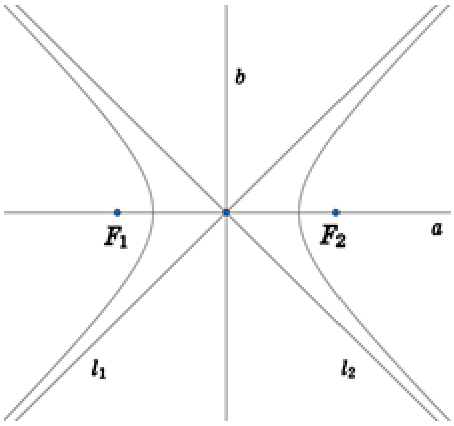
$$x^2=2py, p>0$$

је парабола са жижом $F(0,\frac{p}{2})$, осом која се поклапа са y осом и директрисом датом са $y=-p/2$.

Доказ: Уочимо произвољну тачку $A(x,\frac{x^2}{2p})$ са параболе. Растојање ове тачке од $F(0,\frac{p}{2})$ је $\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{2p}-\frac{p}{2})^2}=\frac{x^2}{2p}+\frac{p}{2}$, што је једнако растојању од праве $y=-p/2$, па су ова тачка, односно права, жижа, односно директриса параболе. Како је теме параболе у $(0,0)$, то се њена оса поклапа са y осом.

Дефиниција 2.4. Хипербола представља геометријско место тачака за које је апсолутна вредност разлике растојања од две фиксне тачке константна.

Основни елементи хиперболе су *две жиже*, *две асимптоте*, *реална* и *имагинарна оса*. Тачка пресека асимптота представља центар симетрије хиперболе. Ако се асимптоте секу под правим углом реч је о *једнакостраничној* хиперболи.



F_1 и F_2 су жиже, l_1 и l_2 су асимптоте, a и b су реална и имагинарна оса хиперболе

Теорема 2.3. Крива задата једначином :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0, b > 0$$

је хипербола са жижама $F_1(\sqrt{a^2+b^2},0)$ и $F_2(-\sqrt{a^2+b^2},0)$, а једначине асимптота су $y = \pm xb/a$.

Аналогно доказу теореме 2.1 применом Питагориних теорема на троуглове F_1AB и F_2AB лако долазимо до закључка да је $|F_1A - F_2A| = 2a$.

Једначине асимптота налазимо класичном методом као:

Коефицијент правца асимптоте: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \pm\frac{b}{a}$.

Слободан члан: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = 0$.

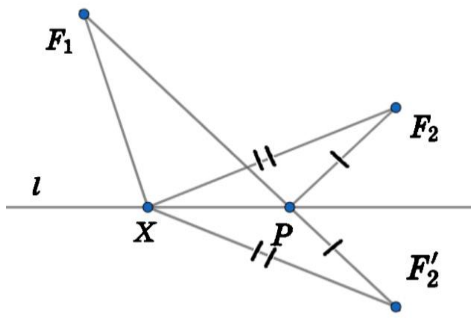
Са знањем ових дефиниција/теорема, сада смо коначно спремни да се окренемо геометријској страни овог рада.

2.2. Оптичко својство

Такозвано оптичко својство, једно је од најважнијих особина коника, а да бисмо доказ и тврђење истог изложили, најпре ћемо доказати неке познате, али веома корисне леме.

Лема 2.1. Дати су права l и тачке F_1 и F_2 са исте стране те праве. Нека је F_2' тачка симетрична тачки F_2 у односу на l, $\{P\} = l \cap F_1F_2'$ и Q произвољна тачка на l. Збир $QF_1 + QF_2$ је минималан ако и само ако је $P \equiv Q$, и у том случају је l симетрала спољашњег угла F_1PF_2.

Доказ: $\Leftarrow$: Узмимо произвољну тачку X различиту од P на l. Због симетрије је $PF_2 = PF_2'$ и $XF_2 = XF_2'$, односно $XF_1 + XF_2 = XF_1 + XF_2' > F_1F_2' = PF_1 + PF_2$.

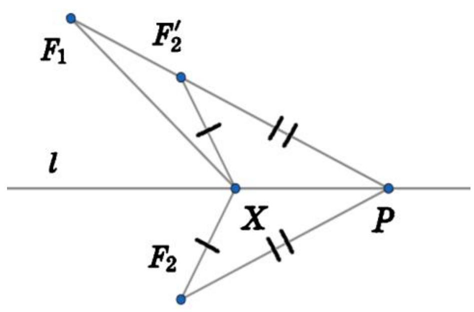


$\Rightarrow$: Ако је збир $QF_1 + QF_2$ минималан и ако се P и Q не поклапају одмах добијамо контрадикцију због претходног доказа.

Из симетрије и једнакости унакрсних углова следи други део тврђења леме.

Лема 2.2. Дати су права l и тачке F_1 и F_2 са различитих страна те праве. Нека је F_2' тачка симетрична тачки F_2 у односу на l, $\{P\} = l \cap F_1F_2'$ и Q произвољна тачка на l. Апсолутна вредност разлике $QF_1 - QF_2$ је максимална ако и само ако је $P \equiv Q$, и у том случају је l симетрала унутрашњег угла F_1PF_2 .

Доказ: $\Leftarrow$: Узмимо произвољну тачку X различиту од P на l. Због симетрије је $PF_2 = PF_2'$ и $XF_2 = XF_2'$, односно $XF_1 - XF_2 = XF_1 - XF_2' < F_1F_2' = PF_1 - PF_2$.



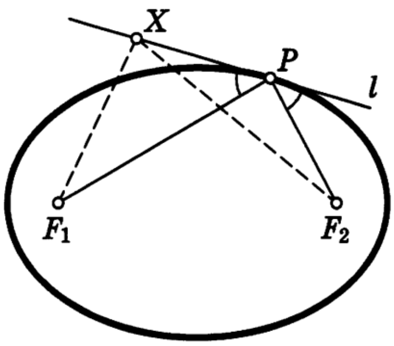
$\Rightarrow$: Ако је разлика $QF_1 - QF_2$ максимална и ако се P и Q не поклапају одмах добијамо контрадикцију због претходног доказа.

Из симетрије и једнакости унакрсних углова добијамо да је l симетрала унутрашњег угла F_1PF_2. Треба напоменути да ако је $F_1F_2' \parallel l$ не постоји максимум(достиже се у бесконачности).

Следе три основне теореме из овог поглавља:

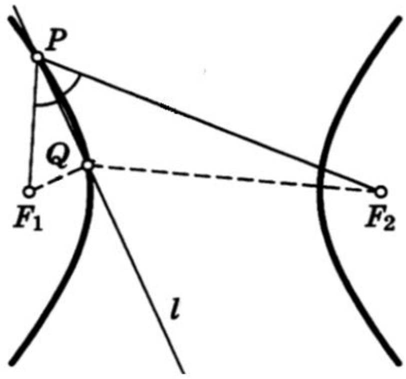
Теорема 2.4. (Оптичко својство елипсе). Нека је права l тангентна на елипсу у тачки P. Тада је l симетрала спољашњег угла F_1PF_2 где су F_1 и F_2 жиже елипсе.

Доказ: Уочимо произвољну тачку X различиту од P на l. Како је $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$ (ако је I тачка пресека XF_1 и елипсе, директно из неједнакости троугла важи $XF_2 + XI > IF_2$ тј. $XF_1 + XF_2 > IF_1 + IF_2 = PF_1 + PF_2$) то значи да од свих тачака на l, за тачку P важи да је збир $PF_1 + PF_2$ минималан. Ово тврђење неодољиво подсећа на лему 2.1 и заиста применом исте, моментално завршавамо доказ.



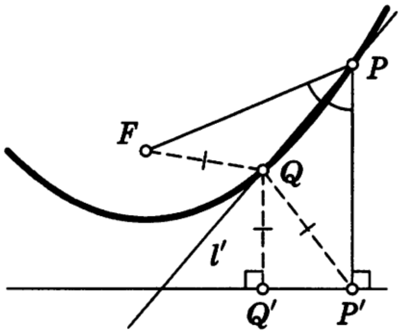
Теорема 2.5. (Оптичко својство хиперболе). Нека је права l тангентна на хиперболу у тачки P. Тада је l симетрала унутрашњег угла F_1PF_2 где су F_1 и F_2 жиже хиперболе.

Доказ: Нека је Q произвољна тачка на l различита од P. Како је $F_2P - F_1P > F_2Q - F_1Q$ (ако је I тачка пресека QF_1 и хиперболе онда важи $F_2Q - QI < F_2I$ тј. $F_2Q - F_1Q < F_2I - F_1I = F_2P - F_1P$) то значи да од свих тачака на l, за тачку P важи да је разлика $F_2P - F_1P$ максимална (без умањења општости можемо претпоставити да је P ближе F_1). Применом резултата из леме 2.2 добијамо тражено тврђење.



Теорема 2.6. (Оптичко својство параболе). Нека је права l тангентна на параболу у тачки P. Ако је P' подножје нормале из P на директрису, тада је l симетрала угла FPP' где је F жижа параболе.

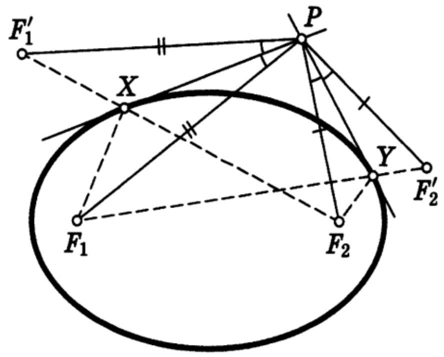
Доказ: Нека симетрала угла FPP' сече параболу у другој тачки Q(права l'), а подножје нормале из Q на директрису означимо са Q'. Из дефиниције параболе је $FQ = Q'Q$, а како Q лежи на l'(симетрали) следи да је $QQ' = FQ = P'Q$, а то је немогуће јер је $P'Q > QQ'$(из правоуглог троугла $QQ'P'$). Дакле, $l \equiv l'$.



Напоменули смо већ да су теореме изнад, једне од најважнијих у овој области, сходно томе наводимо неке занимљиве резултате где ове теореме налазе примену.

Теорема 2.7. Уочимо тачку P ван елипсе и из ње конструишимо тангенте на елипсу, с тачкама додира X и Y. Тада је $\angle F_1PX = \angle F_2PY$.

Доказ: Нека су F_1', F_2' тачке симетричне F_1 и F_2 у односу на PX и PY, редом. Важи $F_1P = F_1'P$ и $F_2P = F_2'P$ као и $F_1 - Y - F_2'$, $F_2 - X - F_1'$ (оптичко својство елипсе). Стога $F_1'F_2 = F_2X + F_1X = F_2Y + F_1Y = F_1F_2'$, подударност $\Delta F_1'PF_2$ и $\Delta F_2'PF_1$ (ССС) нам даје $\angle F_1P\,F_2' = \angle F_2PF_1' \Rightarrow F_1P\,F_1' = \angle F_2PF_2'$ и коначно $\angle F_1PX = \angle F_2PY$.

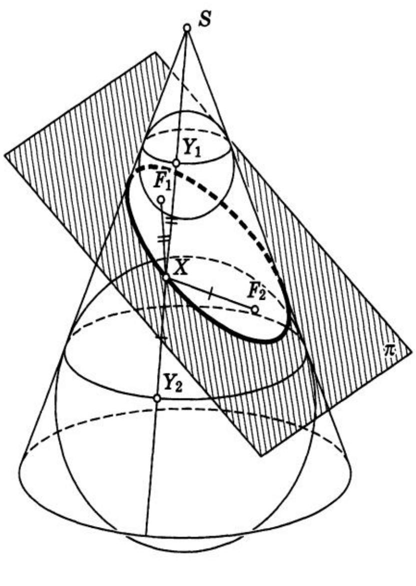


Слика изнад нас подсећа као на изогоналну особину елипсе које нам је из геометрије троугла и те како познато(појам изогонални конјугат). Међутим, код троугла се јављају и симетрале углова, те се природно намеће да потражимо и у овом случају неку везу са симетралама. Није тешко увидети да је $\angle XF_1P = \angle XF_1'P = PF_1F_2'(\Delta PF_1F_2' \cong \Delta PF_2F_1')$, дакле PF_1 је симетрала угла XF_1Y.

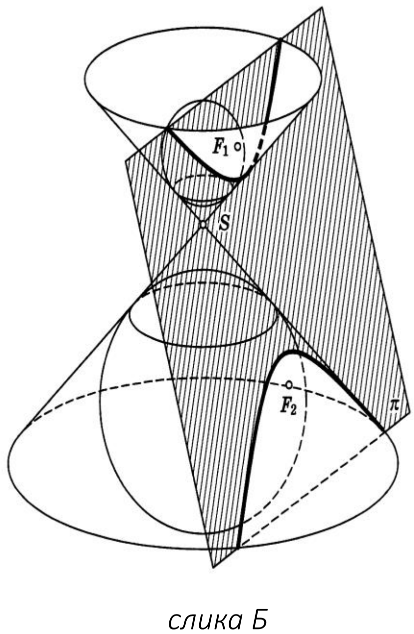
Наравно, слична тврђења важе и за хиперболу, а сада прелазимо на део рада који ће нам оправдати назив који су добиле ове криве тј. конике.

2.3. Криве другог реда као конусни пресеци

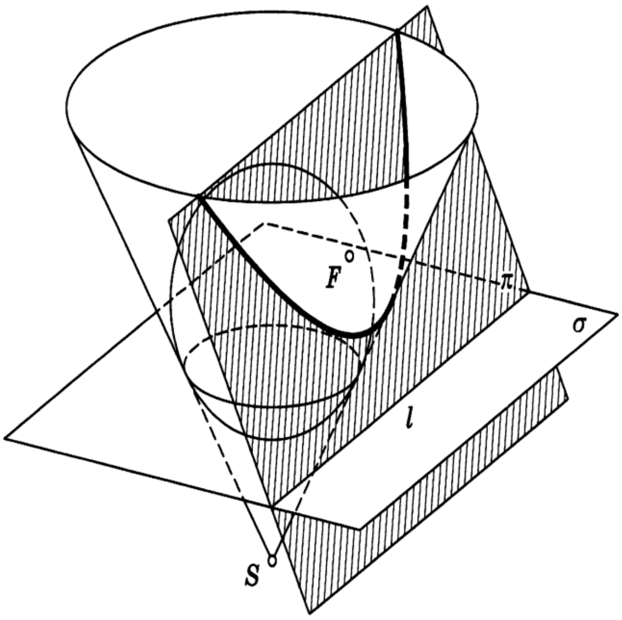
Већ смо на почетку споменули да су конике заправо конусни пресеци, те ћемо коначно доказати ово тврђење. Посматрамо конике као пројекције круга (основа конуса је круг). Разматрамо три случаја:



слика А



слика Б



слика В

1. Слика А: (елипса) Нека је π раван која сече дати конус са теменом у S и која није нормална на осу симетрије конуса. Упишимо сада у конус две сфере које додирују π у тачкама F_1 и F_2, нека је X произвољна тачка са пресека π и конуса, и Y_1 и Y_2 пресеци SX са датим сферама. Наиме, $XF_1 = X\,Y_1,\ XF_2 = XY_2$ (тангенте из исте тачке су једнаке). Одавде је $XF_1 + XF_2 = Y_1Y_2 = const.$ (не зависи очигледно од X). Стога дати пресек је елипса. Да ли је могуће овако „приказати“ сваку елипсу? Одговор је да, јер однос дужина полуоса зависи само од „искривљености“ равни π и може узети било коју вредност. Напомена: Пресек је изабран тако да пролази кроз све „ивице“ конуса.

2. Слика Б: (хипербола) Аналогно доказу за елипсу с тим што ћемо добити $XF_1 - XF_2 = Y_1Y_2 = const.$ што је једначина хиперболе.

3. Слика В: (парабола) Нека је π раван која сече дати конус са теменом у S и која је паралелна са једном од „ивица“ конуса. Упишимо у конус сферу која додирује π у тачки F. Нека је раван σ она раван која садржи круг који је пресек уписане сфере и конуса и $l = \pi \cap \sigma$. За произвољну тачку X са пресека равни π и конуса, $Y = SX \cap \sigma$, Z подножје нормале из X на l. Имамо $XF = XY$ као и $\angle(XY, \sigma) = \angle(\sigma, \pi) = \angle(XZ, \sigma)$, одакле следи $XF = XY = XZ$. Дакле пресек равни π и конуса је у овом случају парабола.

2.4. Ексцентрицитет, специјалан случај $e = 1$

Размотрићемо једну особину коника, која ће нам понудити још један начин дефинисања кривих другог реда.

Нека раван π сече све „ивице“ конуса са теменом S. Упишимо сферу у конус која додирује π у тачки F_1, а σ, X, Y и Z су дефинисани као у случају параболе. Нека је T подножје нормале из X на σ.

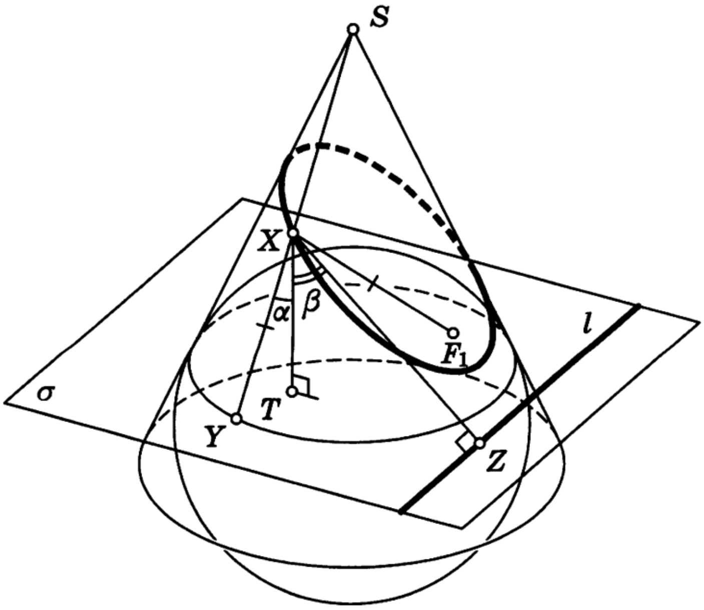
Уочимо да је(из тригонометрије ΔXYT и ΔXZT):

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{XY}{XT} \cdot \frac{XT}{XZ} = \frac{1}{\cos \angle YXT} \cdot \cos \angle TXZ = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

Како је $XY = XF_1$, следи да је XF_1/XZ независно од X.

Ако пажљивије погледамо, ми смо заправо закључили да за сваку конику постоји права таква да је за сваку тачку са конике однос растојања до жиже и линије константно. Тај однос се назива *ексцентрицитет*(обележаваћемо га са e), а таква права *директриса* (коју смо раније споменули).

Ако је $e > 1$ ради се о хиперболи, за $e = 1$ ради се о параболи, а за $e < 1$ одговарајућа крива је елипса.



Углавном смо током школовања видели да једнакостраничан, правоугли троугао, квадрат, тетиван четвороугао и сл. поседују неке необичне особине баш зато што су специјални случајеви фигура. Имајући то на уму, потражићемо особине криве баш у специјалном случају, $e = 1$.

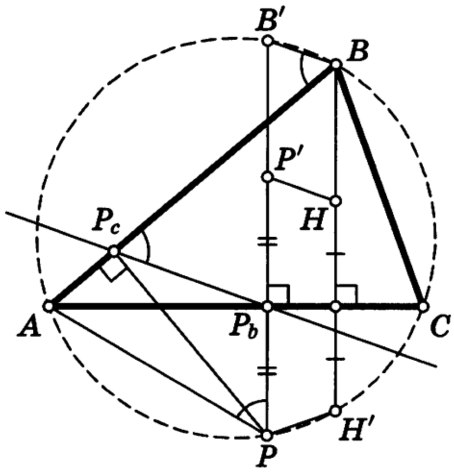
Како постоји „мали милион“ теорема и особина које се повезују с параболом, ми ћемо, базирано на личном укусу, одабрати неколико „слабијих“ теорема и путем њих доћи до једног елегантног тврђења. Стога наводимо следеће теореме:

Теорема 2.8. Нека је ΔABC описан око параболе. Тада жижа параболе F лежи на описаном кругу ΔABC.

Доказ: С обзиром да је у питању парабола, природно је да употребимо теорему 2.5 или неке њене последице. Наиме, у тој теореми је троугао FPP' једнакокраки, а права l полови дуж FP'(јер је симетрала у том троуглу). Ако посматрамо фамилије дужи FX где је X на директриси, видимо да се средине тих дужи све налазе на једној правој, која пролази кроз теме параболе и паралелна је директриси. Ако се вратимо на наш проблем и ако спустимо нормале из F на праве AB, BC, AC та подножја нормала леже на једној правој. Међутим по Симсоновој теореми ово је могуће само ако F лежи на описаном кругу ΔABC(те три тачке леже на Симсоновој прави). Тиме смо доказали тражено.

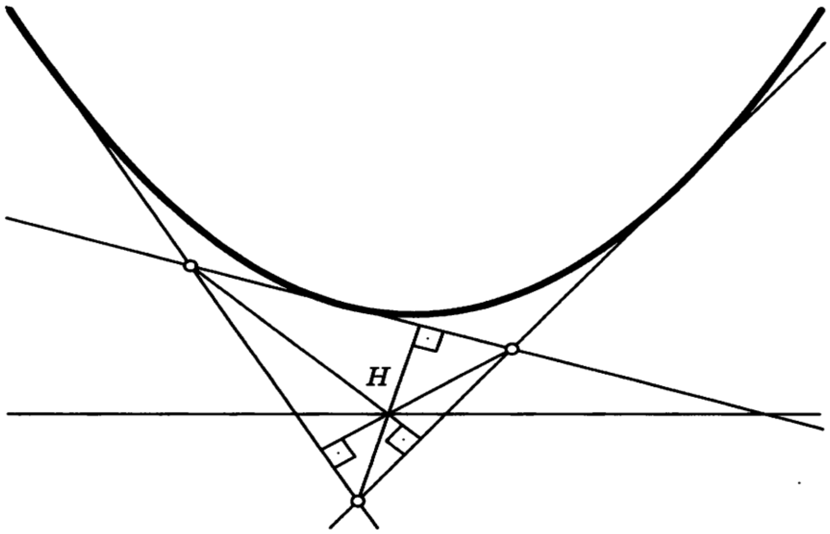
Теорема 2.9. Симсонова права за тачку P у ΔABC полови дуж PH где је H ортоцентар троугла ABC.

Доказ: Подножја нормала означимо са P_a, P_b, P_c, кружницу описану око ΔABC са k , а H' је тачка симетрична тачки H у односу на AC(познато је да ова тачка лежи на k). Нека је $PP_b \cap k = B'$ и P' тачка симетрична тачки P у односу на AC. Како је $B\,H' \parallel B'P$ следи да је $B\,H'PB'$ једнакокраки трапез, а пошто је $P'H$ симетрично PH' у односу на AC имамо да је $BH\,P'B'$ паралелограм. Из $\angle B'BA = \angle B'PA = \angle P_bP_cB$ имамо $P_bP_c \parallel B'B \parallel P'H$. Сада је P_bP_c средња линија у $\Delta P'HP$ и полови PH.



Теорема 2.10. Ортоцентар троугла описаног око параболе лежи на директриси параболе.

Доказ: Применом теорема 2.7 и 2.8 тврђење директно следи јер је Симсонова права ΔABC заправо права која садржи теме параболе и паралелна је директриси.


H

3

Резултати из класичне геометрије

Ово поглавље је првенствено посвећено класичној геометрији, чији су резултати веома битни за разумевање четвртог поглавља. Стога се нећемо превише задржавати на доказима неких основних тврђења, него ћемо се посветити теоремама које су нам неопходне за даљи рад.

3.1. Основе Инверзије

Дефиниција 3.1. Нека је $k(O,r)$ круг равни E^2. Пресликавање $\psi{:}E_*^2 \to E_*^2$ дефинисано са $\psi(X) = (X^*) \Leftrightarrow X^*$ припада полуправој OX и $OX \cdot OX^* = r^2$, назива се инверзија у односу на круг k, где је $E_* = E/\{O\}$.

Разлог зашто смо изабрали E_*^2 је баш тај што центар круга нема своју слику, односно постиже је у бесконачности.

Иначе, инверзија је веома моћна алатка, јер може неку компликовану слику са мноштвом кругова да замени са неколико правих и обрнуто. Наводимо неке елементарне особине ове трансформације без доказа:

Теорема 3.1. Нека је ψ инверзија у односу на круг $k(O,r)$ равни E^2. Ако је p права, а l круг те равни, тада важи:

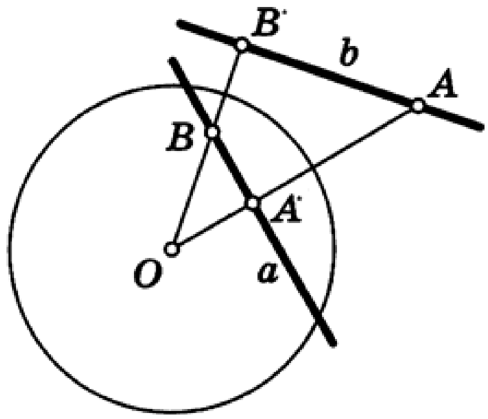
(1) Ако је $O \in p$, тада је $\psi(p) = p$;
(2) Ако је $O \notin p$, тада је $\psi(p) = j$, где је j круг који садржи тачку O;
(3) Ако је $O \in l$, тада је $\psi(l) = q$, где је q права која не садржи O;
(4) Ако је $O \notin l$, тада је $\psi(l) = r$, где је r круг који не садржи тачку O.

Дефиниција 3.2. Нека права a пролази кроз тачку X^* и нормална је на праву OX(тачке су дефинисане на исти начин као у дефиницији 3.1). Права a се назива *полара* тачке X, а X се назива *пол* праве a.

С обзиром да је геометрија тешко разумна и не тако лепа, кроз суве дефиниције, навешћемо један пример примене инверзије, да би се стекао осећај за нову материју, а пре тога наводимо теорему која је ће наћи своју примену у следећем поглављу.

Теорема 3.2. Нека се тачка A налази на полари тачке B. Тада се тачка B налази на полари тачке A.

Доказ: Дефинишимо инверзне тачке од A и B редом са A^* и B^*. Тада из $OA \cdot OA^* = OB \cdot OB^* = r^2$, односно $\frac{OA}{OB^*} = \frac{OB}{OA^*}$ и $\angle B^*OA = \angle A^*OB$ следи да је $\Delta B^*OA \sim \Delta A^*OB$ тј. $\angle OB^*A = \angle OA^*B = 90°$, одакле следи тврђење.



Пример 3.1. Нека уписани круг ΔABC додирује одговарајуће странице у тачкама A_1, B_1, C_1. Доказати са су центар описане и уписане кружнице ΔABC и ортоцентар $\Delta A_1B_1C_1$ колинеарне тачке.

Решење: Инверзију, а и било коју другу трансформацију, треба „наместити“ тако да неке тачке остану непокретне или да се пресликају у неке тачке са познатим особинама. У овом примеру најлогичније је уочити инверзију у односу на уписану круг. Тачке A, B, C се сликају у средишта страница B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1, респективно. Како је круг одређен са три тачке то се описани круг ΔABC слика у Ојлеров круг $\Delta A_1B_1C_1$. Ако са O, S и I редом означимо центар описане кружнице ΔABC, центар Ојлеровог круга $\Delta A_1B_1C_1$, центар уписане кружнице ΔABC тада из дефиниције инверзије следи да је $O \in SI$. Са друге стране ортоцентар $\Delta A_1B_1C_1$ лежи на правој SI, која представља Ојлерову праву тог трогла. Одавде следи тврђење задатка.

3.2. Основе пројективних трансформација

Трансформација равни која чува односе међу линијама познатија је као пројективна. Ми се нећемо бавити доказивањем основних особина(нпр. да је трансформација 1-1 и слично) као ни доказивањем неких тврдњи, већ ћемо за њих дати идеју или мотивацију како до истих доћи, јер су циљ овог рада првенствено конике. Такозвана *линија у бесконачности* је свакако први непознат појам. Тачке те линије посматрају се као пресеци паралелних правих и називају се *тачке у бесконачности* и за сваку такву тачку се сматра да припада свим правама са истим правцем.(Неку мотивацију можемо пронаћи у свакодневним примерима перспективе, односно о нашем личном утиску да су удаљени објекти међусобно ближи него у стварности и да је та „удаљеност“ обрнуто сразмерна растојању самих објеката од нас.) Раван која поседује овакве особине се назива *пројективна раван*, а трансформација која слика праве у праве се назива *пројективна*.

Помоћ у визуализацији пројективних трансформација видљива је у следећем примеру. Пројектујмо слику са стаклене плоче на зид, где се пројекција врши уз помоћ малог светлосног извора(замишљамо га као тачку). Иако је слика можда изгледа искривљено, али праве са стакла се сликају у праве на зиду. Раван паралелна зиду, која пролази кроз извор светлости сече стаклену плочу по некој линији. Тачке се те праве се неће пресликати на зид, те можемо да представимо слику те праве као праве у бесконачности на зиду. Може се показати да је свака пројективна трансформација композиција централне пројекције и „промене“ простора који слика раван пројекције у оригиналну раван.(***)

Испричали смо оквирно како се пројективне трансформације препознају, као и вероватно најважнији део, визуализацију како би се створила одређена геометријска интуиција. Прелазимо на основне тврдње/теореме пројективне геометрије.

Тврђење: За било које четворке тачака у општем распореду A, B, C, D и A', B', C', D' постоји јединствена пројективна трансформација која тачку A слика у A', B у B', C у C' и D у D'.

Теорема 3.3. За пет тачака у општем положају постоји јединствена коника која их садржи.

Доказ: Уочимо произвољне четири тачке и трансформишимо их у квадрат чија су темена у тачкама $(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)$. Ово можемо извршити због претходног тврђења. Уочимо да коника која пролази кроз ове четири тачке има једначину $ax^2 + (1-a)y^2 = 1$. Ако су координате пете тачке (x_0, y_0) , онда очигледно постоји само један параметар a за који је $a{x_0}^2 + (1-a){y_0}^2 = 1$.

Теорема 3.4. Пројективна трансформација чува дворазмеру, односно за колинеарне тачке A, B, C и D и њихове слике при пројективној трансформацији A', B', C' и D' , редом, важи да је $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

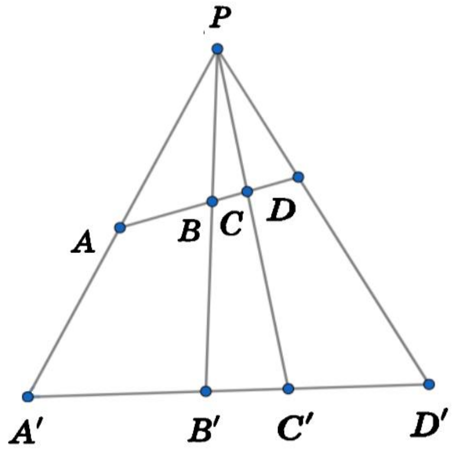
Доказ: Како се свака пројективна трансформација може видети као централна пројекција, означимо са P центар те пројекције. Имамо:

$$(A,B;C,D)=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{P_{\Delta ACP}\cdot P_{\Delta BDP}}{P_{\Delta ADP}\cdot P_{\Delta BCP}}=\frac{AP\cdot CP\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot BP\cdot DP\cdot\sin(\beta+\gamma)}{AP\cdot DP\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cdot BP\cdot CP\cdot\sin\beta}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}=const.$$

Где је $\alpha=\angle(PA,PB)$, $\beta=\angle(PB,PC)$ и $\gamma=\angle(PC,PD)$.

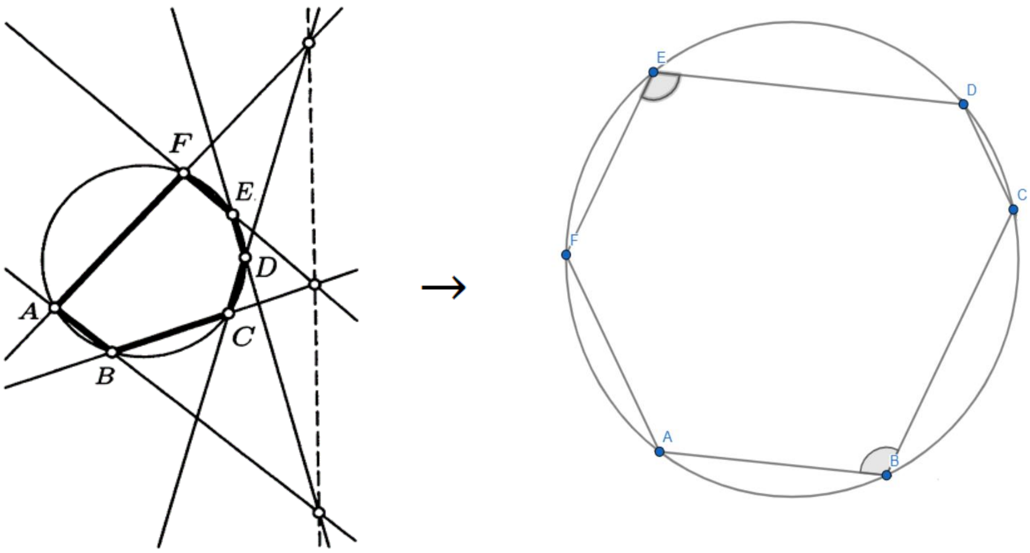
Овај однос не зависи од праве на којој се тачке налазе те је $(A,B;C,D)=(A',B';C',D')$.



Уочимо да ако знамо слике три тачке при оваквој трансформацији, слика четврте је јединствено одређена.

Теорема 3.5. (Паскалова теорема) Пресечне тачке пресека насупротних страна уписаног шестоугла леже на једној линији.

Доказ: Нека је $ABCDEF$ посматрани шестоугао. Као што смо напоменули, сврха сваке трансформације је да нам олакша посао. Ситуација у којој имамо огроман број пресека између правих представља одличну подлогу за пројективне трансформације. Главни разлог јесте тврђење које смо навели пре ових теорема, као и особина да пројективне трансформације чувају односе међу правама. Имајући то у виду, коришћењем трансформације која пресеке парова правих AB и DE, BC и EF слика у тачке у бесконачности, добијамо да је тада $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$ и одмах смо растеретили цртеж. Преостаје нам само да докажемо $CD \parallel FA$, одакле следи тврђење теореме. Како је $\angle ABC=\angle DEF$, следи да је $AC=FD$, односно да су праве CD и FA паралелне.

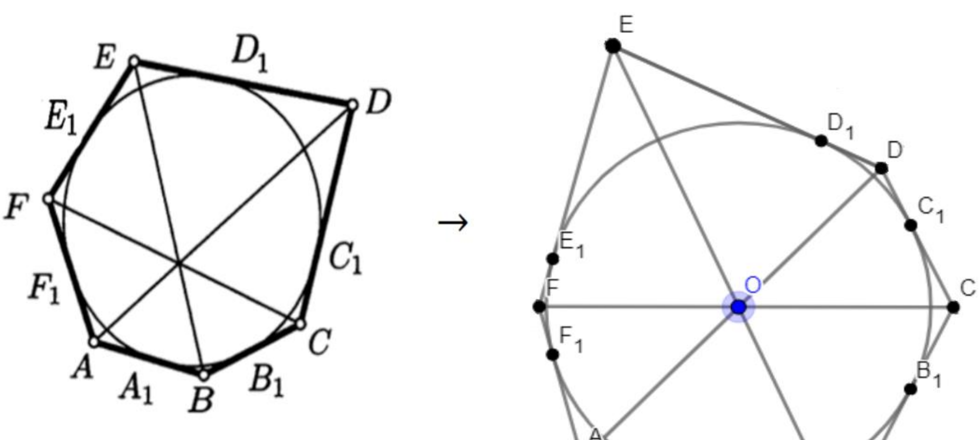


Теорема 3.6. (Бријаншонова теорема) Главне дијагонале описаног шестоугла секу се у једној тачки.

Доказ: Нека је посматрани шестоугао $ABCDEF$. Уочимо трансформацију која пресек неке две главне дијагонале слика у центар круга. Сада је неопходно доказати да и трећа дијагонала пролази кроз центар круга O. Означимо са A_1, B_1,..., F_1 тачке додира круга са страницама $AB, BC, \dots, FA$, респективно. Нека дијагонале AD и BE пролазе кроз центар круга. Сада само из рачунања углова имамо:

$\angle E_1OC_1 = \angle F_1OB_1, \angle E_1OF = \angle FOF_1, \angle B_1OC = \angle COC_1$, односно:

$360° = \angle FOF_1 + \angle F_1OB_1 + \angle B_1OC + \angle E_1OC_1 + \angle E_1OF + \angle COC_1 = 2(\angle FOF_1 + \angle F_1OB_1 + \angle B_1OC)$, стога су тачке F, O и C колинеарне.



Треба напоменути да су у теореми 3.5 и 3.6 коришћене чисте пројективне трансформације те оне важе и за конике (ми смо користили круг). Зашто? Користећи (***) и целокупни део 2.3 имамо да се при пројективним трансформацијама конике сликају у конике. Заиста, таква пројективна трансформација је композиција две трансформације – прва која слика конику у круг, и друга која слика круг у конику. У следећем поглављу видећемо како теореме 3.5 и 3.6 гласе у општем случају.

Такође у пројективној геометрији велику улогу имају Дезаргова и Папусова теорема, међутим оне нам неће бити од значаја у наставку, те их овде нисмо ни навели.

Следи још један пример који илуструје моћ пројективних трансформација :

Пример 3.2. Дат је ΔABC и његове чевијане AA_1, BB_1, CC_1 које се секу у тачки P. Нека је C' пресек правих AB и A_1B_1. Тачке B' и A' дефинишимо аналогно. Доказати да су тачке A', B' и C' колинеарне.

Решење: Очигледно веома битна тачка у овом примеру јесте тачка P јер кроз њу пролазе три праве, те је природно покушати да P „померимо“ на неко значајно место. И заиста, пројективном трансформацијом која слика P у тежиште троугла добијамо да су тачке A', B' и C' у бесконачности, јер су парови правих AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 сада паралелни. A', B' и C' су тачке у бесконачности те леже на истој правој.

Приликом дефинисања инверзије рекли смо да тачка O нема своју слику и тај начин дефинисања користимо у еуклидској геометрији. Међутим, сада ћемо дефинисати полару центра круга као праву у бесконачности(што се поклапа са нашом интуицијом). За тачку у бесконачности дефинишемо полару као праву која садржи пречник нормалан на паралелне праве које пролазе кроз ту тачку. Видимо да је сада однос пол – полара попримио карактеристике појма из пројективне геометрије упркос новим дефиницијама. Другим речима, ако пројективна трансформација чува дати круг и ако слика тачку A у A^*, тада се полара a тачке A слика у полару a^* тачке A^*. Ово нам даје следећи резултат:

Принцип дуалности: Ако је нека тврдња важи у пројективној геометрији, тада је истинита и тврдња добијена од почетне заменом следећих појмова:

1. тачка ↔ линија
2. лежи на линији ↔ пролази кроз тачку
3. лежи на кругу ↔ додирује круг

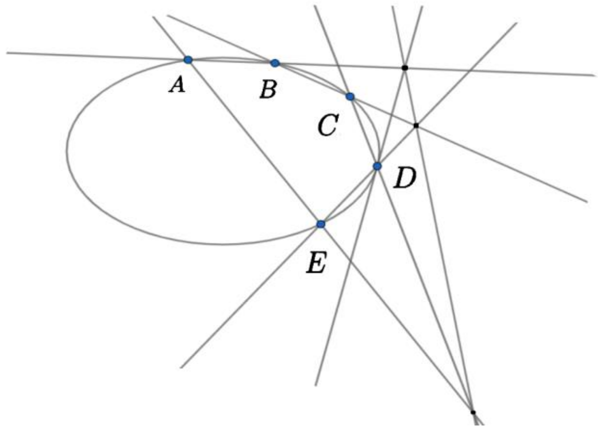
Мотивација за овако нешто долази из симетрије нпр. исказ „тачка као пресек две конкурентне праве“ сличан је исказу „права која пролази кроз две колинеарне тачке“. Примери принципа дуалности су свакако Паскалова и Бријаншонова теорема једна у односу на другу.

3.3. Специјални случајеви Паскалове и Бријаншонове теореме

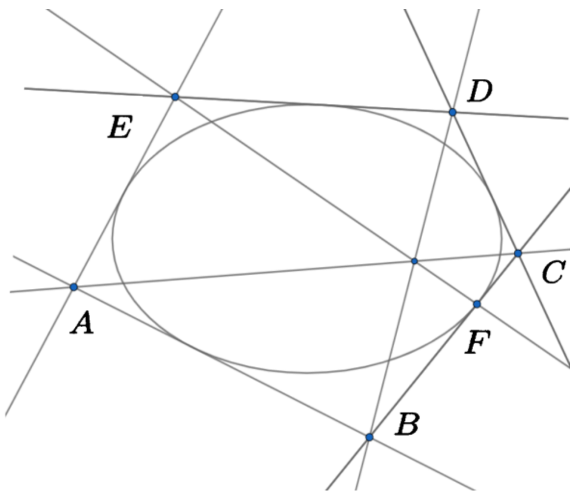
Тврђења теорема 3.5 и 3.6 остају на снази и за многоуглове са мањим бројем темена. Наиме, ако се нека два темена шестоугла поклапају, у случају Паскалове теореме, односно ако се неке две праве на којима леже странице шестоугла поклапају, у случају

Бријаншонове теореме, долазимо до петоугла, четвороугла или троугла(за две тачке и једну тачку теореме немају значај).

На пример, ако посматрамо уписани петоугао $ABCDE$ у конику, Паскалову теорему можемо да применимо ако неко теме, рецимо D, посматрамо као двојну тачку. Насупротне стране су сада AB и DD(тангента на конику у тачки D), BC и DE и CD и EA и пресеци ових парова леже на једној линији. За четвороугао, односно троугао, две, односно три тачке посматрамо као двојне.



У случају Бријаншонове теореме, за петоугао $ABCDE$ долази до поклапања две праве на којима леже неке странице. Пресек те две праве постаје тачка додира те дуалне праве и конике, што се може закључити из принципа дуалности. Означимо ту тачку са F. Главне дијагонале су сада AC, BD и EF и секу се у једној тачки. За четворугао, односно троугао, две, односно три праве посматрамо као двојне.



4

Пројективна својства коника

4.1. Обрнута Паскалова и Бријаншонова теорема

Теорема 4.1. (Обрнута Паскалова теорема) За било којих шест тачака X_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ за које важи да пресеци правих X_1X_2 и X_4X_5, X_2X_3 и X_5X_6, X_3X_4 и X_6X_1 леже на једној правој, постоји коника која пролази кроз све X_i.

Доказ: Из теореме 3.3 знамо да постоји јединствена коника која пролази кроз пет тачака. У нашем случају, без умањења општости, узмимо тачке X_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Означимо са A, B, C редом тачке пресека правих X_1X_2 и X_4X_5, X_2X_3 и X_5X_6, X_3X_4 и X_6X_1. Нека је Y пресек уочене конике и праве BX_5. Из теореме 3.5(Паскалове теореме) имамо да пресек X_3X_4 и X_1Y лежи на AB, односно подудара се са тачком C тј. $Y \equiv X_6$.

Теорема 4.2. (Обрнута Бријаншонова теорема) За произвољних шест линија l_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ нека A_{ij} представља пресек правих l_i и l_j. Ако се праве $A_{12}A_{45}$, $A_{23}A_{56}$ и $A_{34}A_{61}$ секу у једној тачки, тада постоји коника која додирује сваку l_i.

Доказ: Најпре докажимо да постоји јединствена коника која додирује пет датих линија. Из теореме 3.6. те тачке се могу јединствено конструисати (на основу примера специјалног случаја Бријаншонове теореме за петоугао). Сада јединственост конике следи из теореме 3.3. Стога конструишимо јединствену конику која додирује праве l_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Нека тангента из тачке A_{61} сече праву l_5 у тачки Y. Тада на основу Бријаншонове теореме примењене на шестоугао $YA_{61}A_{12}\ A_{23}A_{34}A_{45}$ имамо да тачка Y лежи на $A_{23}A_{56}$, а како је $Y, A_{56} \in l_5$ следи $Y \equiv\ A_{56}$.

4.2. Пол и полара. Принцип дуалности

Нека је дата коника и тачка A. Размотримо неку пројективну трансфорамцију која слика дату конику у круг. Означимо са A', a', a слику тачке A при овој трансформацији, полару тачке A' у односу на новонастали круг и слику a' приликом инверзне трансфорамције, респективно. Праву a конструишемо на следећи начин:

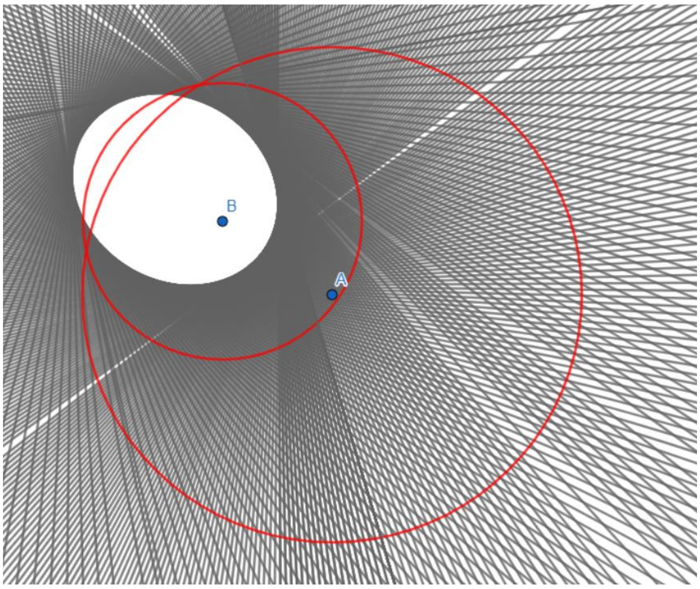
Уочимо две произвољне праве које пролазе кроз A и секу дату конику у тачкама X_1, X_2 и Y_1, Y_2. Означимо са X пресек тангенти на конику у тачкама X_1 и X_2, а са Y пресек тангенти на конику у тачкама Y_1 и Y_2. Тада се праве XY и a поклапају. Ако потпуно исту конструкцију применимо на тачку A' и круг, добијамо праву a', јер би у том случају тачка A' лежала на поларама тачака X и Y, а на основу теореме 3.2 X и Y леже на полари тачке A'. Како је у питању пројективна трансформација, која чува односе између правих и коника, добијамо да a не зависи од изабране трансформације. Штавише, праву a можемо конструисати као праву која пролази кроз пресеке парова правих X_1Y_1, X_2Y_2 и X_1Y_2, X_2Y_1, што опет закључујемо на основу примера са кругом.

Овако дефинисан однос између тачака и правих називамо *поларна усаглашеност* у односу на дату конику. Аналогно дефиницији 3.2, a је *полара* тачке A, а A је *пол* праве a. Очигледно, због пројективне еквивалентности коника, све особине односа пол-полара споменуте у трећем поглављу за круг, важе и за остале конике.

Сада ћемо дефинисати нове појмове и показати неке резултате из ове области:

Дефиниција 4.1. Уочимо конике α и β. Поларе свих тачака са α у односу на β „обухватају" криву коју називамо *поларна крива* криве α у односу на β.

На слици испод приказана је поларна крива(у овом случају елипса чија је унутрашњост бела површина), где је α круг са центром A, β круг са центром B, а сиве линије представљају све могуће поларе тачака са α у односу на β.



Међутим, шта ако α и β нису кругови? Како изгледа поларна крива и ког је реда? На та питања одговара следећа теорема:

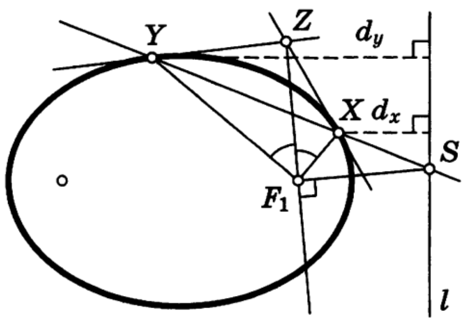
Теорема 4.3. Поларна крива конике у односу на конику је такође коника.

Доказ: Нека је α коника чију поларну криву тражимо, β коника у односу на коју тражимо поларе. Фиксирајмо пет тачака X_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ са α. Поларе ових пет тачака у односу на β одређују пет правих, стога постоји јединствена коника, зваћемо је γ, која их све додирује. Желимо да видимо шта „описују" поларе, а како полара зависи од тачке са α, узмимо да се тачка X помера по α. Последице Паскалове теореме су примењиве на тачке $X_1, X_2, \dots, X$. Сходно томе, последице Бријаншонове теореме су примењиве на поларе ових тачака. Обрнута Бријаншонова теорема тврди да постоји јединствена коника која додирује тих шест полара. Међутим, на основу теореме 3.3 то је коника γ која већ додирује пет од шест полара. Стога полара сваке тачке са α додирује γ. Проласком кроз све тачке X, потпуно се „описује“ цела коника γ.

Теорема 4.4. Директриса и жижа одговарајуће конике су поларно усаглашене.

Доказ: Разматрамо три случаја у зависности од врсте саме конике:

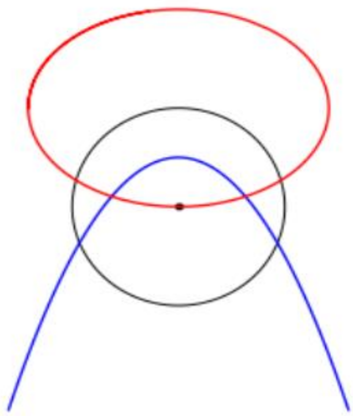
1) Елипса - Уочимо жижу елипсе F_1 и њену полару l. Да би се l и директриса поклапале, треба доказати да за било коју тачку са конике, однос растојања те тачке од F_1 и растојања те тачке од l не зависи од избора саме тачке. Стога уочимо две произвољне тачке X и Y са дате конике и означимо са S пресек l и праве XY. Нека је Z пресек тангенти на конику у тачкама X и Y. Због особина поларне трансформације, F_1Z је полара од S, па ако означимо тачке пресека F_1Z са коником као E и F тада су SE и SF тангенте на дату конику, а због оптичког својства елипсе S је центар приписаног круга ΔF_2EF, односно угао SF_1Z је прав (F_1 полови обим ΔF_2EF, ту особину има и тачка додира приписаног круга са страницом EF те се оне поклапају). Из последица теореме 2.7 је F_1Z симетрала угла XF_1Y. Стога је $\frac{F_1X}{SX} = \frac{F_1Y}{SY}$ (из синусних теорема на ΔF_1XS и ΔF_1YS) тј. $\frac{F_1X}{d_x} = \frac{F_1Y}{d_y}$ где су d_x и d_y редом растојања X и Y од l.



2) Парабола или *хипербола* – Докази су аналогни доказу за елипсу, с тим што ћемо користити оптичка својства параболе, односно хиперболе(у питању су минималне разлике, али је идеја потпуно иста).

Дефиниција 4.2. Дуална крива „глатке“ криве представља скуп свих полова тангенти на дату криву.

Под „глатке“ криве подразумевамо криве које у свакој тачки имају дефинисан извод, односно постоји тангента кроз ту тачку. Важна особина овако дефинисаног дуалног односа је следећа(строг доказ овог тврђења захтева чињенице са којима не баратамо, те га изостављамо, иако је интуитивно логично да ово тврђење важи): *Ако је крива α дуална крива криве β, онда је β дуална крива криве α.* Такође, неопходно је напоменути у односу на коју криву се посматрају полови (на слици испод та крива је круг).



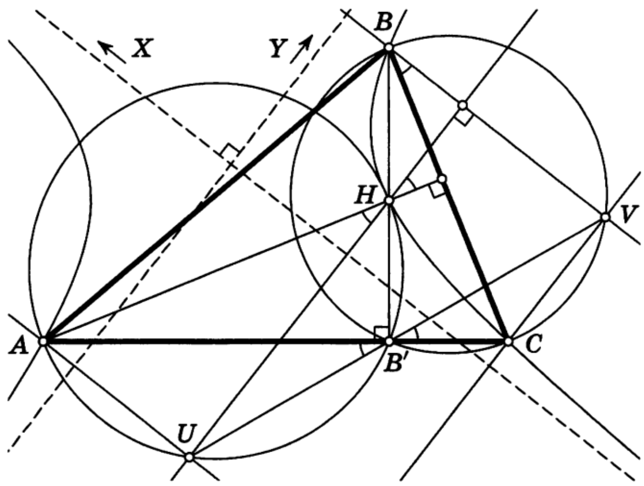
Дуалне конике: $y = \frac{1}{2} - x^2$ (плава) и $(y-1)^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1$ (црвена)

Занимљив пример тврдњи које су замењене поларним трансформацијама налазимо у теореми 2.10 и следећој теореми:

Теорема 4.5. Коника описана око ΔABC је једнакостранична хипербола ако и само ако она пролази кроз ортоцентар тог троугла.

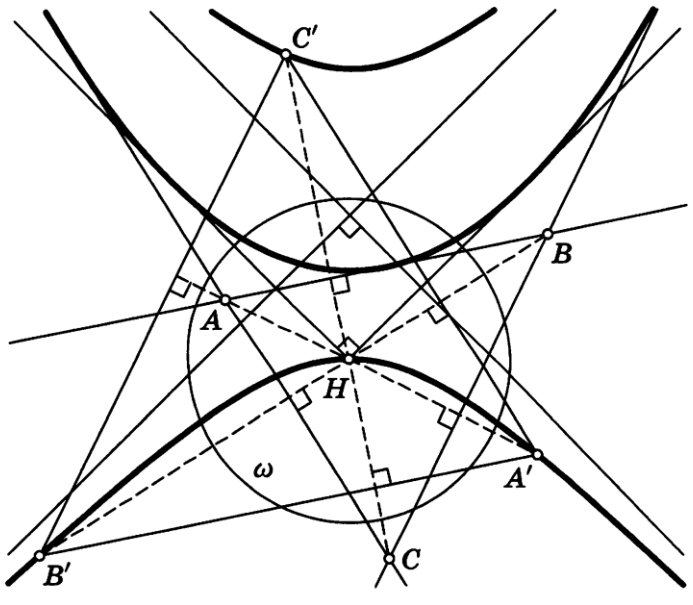
Доказ: Најпре докажимо да једнакостранична хипербола пролази кроз ортоцентар. Нека су X и Y две тачке са линија у бесконачности чији су одговарајући правци нормални. Уочимо следеће праве: кроз A и B паралелне правцу праве која садржи X и кроз C и H(ортоцентар) паралелне правцу праве која садржи Y. Подножје висине из темена B означимо са B'. Са U и V означимо пресеке новонасталих линија(слика). Четвороуглови $BB'CV$ и $AUB'H$ су тетивни, па је $\angle AB'U = \angle AHU$ и $\angle CBV = \angle CB'V$, а због $\angle CBV = \angle AHU$ следи да су тачке U, B' и V колинеарне. Међутим, U је пресек AX и HY, B' је пресек BH и CA, а V је пресек BX и CY, те на основу обрнуте Паскалове теореме примењене на шестоугао $AXBHYC$, добијамо да једнакостранична хипербола $ABCXY$ пролази кроз H (X и Y представљају пресеке хиперболе са правама у бесконачности те јој зато X и Y припадају).

Претпоставимо сада да коника пролази кроз тачке A, B, C и H. Те четири тачке представљају темена неконвексног четвороугла, те једина коника која их може садржати јесте хипербола. Ако је X једна тачка пресека хиперболе са тачком у бесконачности, а Y тачка у бесконачности на правој која је нормална на правац праве која садржи X, онда и Y припада датој коници, односно ради се о једнакостраничној хиперболи.



Сада се вратимо на теорему 2.10. Означимо ортоцентар ΔABC са H. Поларна трансформација у односу на круг ω са центром у H слика ΔABC у $\Delta A'B'C'$(A' је пол праве BC, B' је пол праве AC и C' је пол праве AB). Како парабола додирује странице ΔABC, тада, директно из дефиниције, њена дуална крива пролази кроз тачке A', B' и C'. Међутим, пол праве у бесконачности је H, те дуална крива пролази и кроз ортоцентар. На основу теореме 4.5 та крива је једнакостранична хипербола. Пресеци ове хиперболе са правом у бесконачности проузрокују нормалне правце (због асимптота), односно поларе ових тачака су нормалне. Са друге стране, поларе ових тачака су тангенте на нашу параболу из тачке H, па како су нормалне, H припада директриси параболе.

Сличним аргументима можемо доказати теорему 4.5 преко 2.10. Стога су ове две теореме међусобно дуалне.



5

Још о кривама другог реда

Ова област посвећена је алгебарском виђењу коника као и алгебарском приступу решавања одређених геометријских проблема чија су решења кроз кратак рачун заиста лакша од синтетичког.

5.1. Канонске једначине недегенерисаних коника

Доказаћемо да за сваку недегенерисану криву другог реда постоји координатни систем у којем њена једначина има простију форму.

Посматрамо једначину: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

Најпре ротирајмо координатни систем за угао φ. Одговарајуће координате x и y се трансформишу у $x\cos\varphi + y\sin\varphi$ и $-x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Када убацимо нове координате у полазну једначину коефицијент уз xy постаје:

$$(a-c)\sin 2\varphi + 2b\cos 2\varphi$$

Очигледно увек можемо одабрати φ тако да овај коефицијент постане нула, односно можемо без умањења општости претпоставити да је у полазној једначини $b = 0$.

Разматрамо два случаја:

1. Коефицијенти a и c су различити од нуле.

Применимо транслацију $x' = x + \frac{d}{a}$ и $y' = y + \frac{e}{c}$ и убацимо у полазну једначину:

$a(x' - \frac{d}{a})^2 + c(y' - \frac{e}{c})^2 + 2d\left(x' - \frac{d}{a}\right) + 2e\left(y' - \frac{e}{c}\right) + f = 0$, што се редукују на:

$$a{x'}^2 + \ c{y'}^2 + m = 0$$

Разликујемо следеће подслучајеве:

1.1. $m \neq 0$, коефицијенти a и c су истог знака, различитог од знака m .

Без умањења општости можемо претпоставити да је m негативно, тада после дељења целог израза са m добијамо једначину елипсе:

$$\frac{{x'}^2}{\alpha^2} + \frac{{y'}^2}{\beta^2} = 1$$

1. 2. $m \neq 0$, коефицијенти c и m су истог знака, различитог од знака a.

Слично као у претходном случају, с тим што добијамо једначину хиперболе облика:

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} - \frac{y'^2}{\beta^2} = 1$$

1.3. $m \neq 0$, коефицијенти a, c и m су истог знака.

Ниједна тачка са реалним координатама не задовољава добијену једначину имагинарне елипсе:

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} = -1$$

1.4. $m = 0$.

Овај случај нас не интересује јер посматрамо само недегенерисане криве.

2. Један од коефицијената a и c је једнак нули, можемо претпоставити да је $c = 0$.

Применимо транслацију $x' = x + \frac{d}{a}$ и $y' = y$ и убацимо у полазну једначину:

$a(x' - \frac{d}{a})^2 + 2d\left(x' - \frac{d}{a}\right) + 2ey' + f = 0$, што се редукује на:

$$ax'^2 + 2ey' + m = 0$$

Разматрамо следеће подслучајеве:

2.1. $e \neq 0$.

Новом транслацијом $x'' = x'$ и $y'' = y' + \frac{m}{2e}$ добијамо једначину параболе:

$$x''^2 = 2py'$$

2.1. $e = 0$.

Овај случај нас не интересује јер посматрамо само недегенерисане криве.

5.2. Дијаметри коника

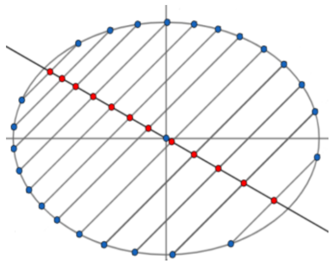
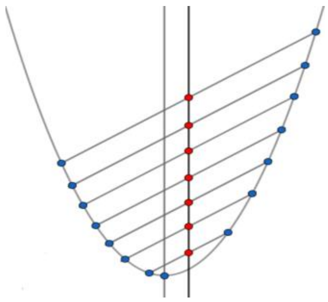
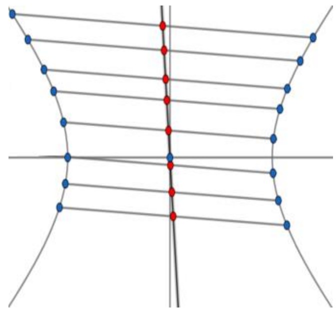
Дијаметром елипсе/хиперболе назива се произвољна права која пролази кроз центар елипсе/хиперболе. *Дијаметром параболе* назива се произвољна права паралелна њеној оси, такође и сама оса параболе. Ако права сече конику у тачно две тачке, тада се дуж ограничена тачкама пресека назива *тетива*.

Теорема 5.1. Средишта паралелних тетива конике леже на истом дијаметру.

Доказ: Ово је очигледно ако су праве нормалне на осу симетрије криве. У општем случају су једначине правих облика $y = kx + b$ где је k константно.

У случају елипсе/хиперболе одговарајућа једначина криве је облика $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$.

Крајеви тетива задовољавају систем: $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$, $y = kx + b$, па кад убацимо из друге једначине y у прву добијамо једначину $(\alpha + \ bk^2)x^2 + 2\beta kbx + \beta b^2 = 1$ која има два решења (имамо два краја тетиве), па ако су x_1 и x_2 вредности апсциса онда из Вијетеових формула имамо: $x_1 + x_2 = \frac{-2\beta kb}{\alpha + bk^2}$. Апсциса средине тетиве је $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\beta kb}{\alpha + bk^2}$, а y_c слично налазимо као $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-\beta k^2 b}{\alpha + bk^2} + b = \frac{\alpha b}{\alpha + bk^2}$, одакле је $y_c = \frac{-\alpha}{\beta k} x_c$ тј. средишта посматраних тетива леже на правој $y = \frac{-\alpha}{\beta k} x$ која очигледно садржи центар криве, а самим тим представља и дијаметар конике.

У случају параболе, одговарајућа једначина је $x^2 = 2py$.

Крајеви тетива задовољавају систем: $x^2 = 2py$, $y = kx + b$, односно елиминацијом y добијамо једначину $x^2 - 2pkx - 2pb = 0$, па је $x_1 + x_2 = 2p$ и $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} = p = const.$ и сада је очигледно да је права која садржи средишта паралелна оси параболе, а самим тим и представља њен дијаметар.

6

Закључак

У раду су представљене теореме и тврђења за која верујемо да ће најпре приближити читаоцима појам геометрије коника, а истовремено их и заинтересовати за ову област.

Током школовања, ова страна геометрије једва да се помиње. Међутим, за њено разумевање од математичких алатки су нам потребне чињенице које су опште познате, те свако ко воли математику може разумети идеје и заиста елегантне теореме изнете у раду.

Почевши од оптичког својства кроз рад смо доказивали мање тривијалне резултате истовремено класичне и савремене. Поглавље број 4 представља и најтежи део овог рада, али је такође и највише отворено за истраживање. Наравно, како би дужина рада остала у границама нормале, у овом поглављу издвојили смо теореме које углавном приказују особине поларне усаглашености. Занимљива тема и потпуно друга страна ове теме јесу праменови коника и Понселеова теорема(енг. Poncelet's theorem) које заинтересовани читалац може детаљно проучити у књизи [1].

Цео рад претежно демонстрира предност геометријског приступа учењу коника. Тема је свакако занимљива и перспективна, те бих њено проучавање препоручио сваком љубитељу математике.

Литература

[1] А. В. Акопян, А. А. Заславский, *Геометрические свойства кривых второго порядка*, МЦНМО, 2007.

[2] А. В. Погорелов, *Геометрия*, Наука; Главная редакция физико – математической литературы, 1983.

[3] М. Митровић, С. Огњановић, М. Вељковић, Љ. Петковић, Н. Лазаревић, *Геометрија за први разред математичке гимназије*, Круг, 2013.

[4] H. S. M. Coxeter, *Projective geometry*, Blaisdell Publishing Company, 1964.

[5] R. Bix, *Conics and cubics: an elementary introduction to the algebraic geometry*, Springer – Verlag, 2006.