Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
из математике

Модели геометрије Лобачевског

Ученик:
Борислав Петровић
IVб

Ментор:
Јелена Николић

Београд, јун 2020.

Садржај

1

Увод

1.1 Основна тврђења у геометрији

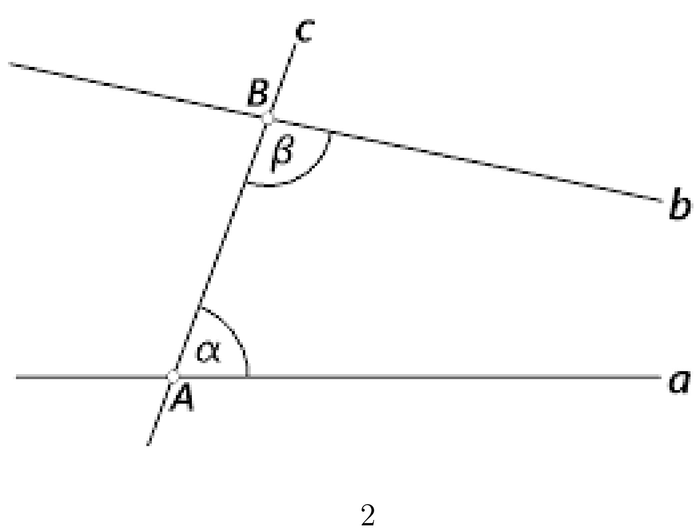
Геометрија, као и свака друга теорија, састоји се од скупа појмова и тврђења. При сваком увођењу новог појма дефиницијом, тај појам описујемо коришћењем других појмова. Да бисмо, уопште, могли да дефинишемо било који појам потребно је да имамо неке основне које не дефинишемо. Исказе који описују везе међу појмовима, као и њихове особине називамо тврђењима теорије. Како бисмо доказали да неко тврђење важи, потребно је да се позовемо на друга тврђења, за чије доказе су нам потребна нова тврђења. Очигледно, да бисмо доказали било које тврђење, потребна су нам нека основна тврђења која се не доказују и од којих ћемо почети како бисмо доказ било ког новог тврђења могли привести крају. Та основна тврђења се називају аксиоме. Тврђења теорије која су изведена из аксиома називају се теореме теорије. Доказ неког тврђења теорије је низ тврђења која логички следе једна из других, од којих је свако или аксиома или из аксиома изведено тврђење, а последње баш оно које се доказује. Аксиоме у некој теорији не смеју бити биране произвољно. Систем аксиома мора бити потпун. То значи да се из аксиома не могу извести теореме које су међусобно противречне, као и да аксиоме не смеју бити међусобно противречне и да се за свако тврђење у теорији може испитати тачност на основу аксиома. Систем аксиома треба да буде минималан, што значи да се аксиоме не могу извести једне из других. Геометрија није независна од других теорија у математици, тако да ћемо користити и појмове из теорије алгебре и логике.

1.2 Еуклидови "Елементи". Пети постулат

Геометрија је почела значајније да се развија још у Старој Грчкој. Прве геометријске доказе извели су Талес и Питагора. Један од првих покушаја аксиоматског заснивања геометрије било је Еуклидово дело "Елементи"(III век п. н. е). Еуклид је основна тврђења поделио на аксиоме и постулате, од којих се постулати односе искључиво на геометрију. Иако његов систем аксиома није био потпун, постулати се користе у еуклидској геометрији и дан данас.

Еуклидови постулати су дати у следећем облику:

1. Претпоставља се да је могуће од сваке тачке до сваке друге тачке конструисати праву линију.
2. Претпоставља се да се свака права, следујући њен правац, може неограничено продужавати.
3. Претпоставља се да се у некој равни око сваке њене тачке може описати круг било којег полупречника.
4. Претпоставља се да су сви прави углови међу собом подударни.
5. Ако нека права пресецајући друге две компланарне праве образује са њима са исте стране два унутрашња угла којима је збир мањи од збира два права угла, тада се те две праве, неограничено продужене секу са оне стране сечице са које је тај збир углова мањи од збира два права угла.



Пети постулат је веома значајан за даљи развој геометрије и заслужан је за настајање првих нееуклидских геометрија. Због своје сложености у исказу и значењу многи математичари су сматрали да га је могуће доказати преко осталих основних тврђења. Многи математичари су покушавали да докажу пети постулат, али тај проблем није био решен до XIX века.

1.3 Еквиваленти петог постулата. Плејферова аксиома

Показало се да постоје тврђења која је немогуће доказати (нити испитати им тачност) уз помоћ свих других основних тврђења изузимајући пети постулат. Та тврђења следе из петог постулата, али и он следи из њих, тако да их називамо еквивалентима петог постулата. Неки од тих еквивалената су:

1. Ако је $ABCD$ четвороугао код кога су углови при ивици BC прави, а ивице AB и CD подударне (Сакеријев четвороугао), тада су углови код друга два темена такође прави (Ђ. Ђ. Сакери 1667 – 1733, италијански математичар).

2. Права нормална на један крак оштрог угла сече други крак.

3. Око сваког троугла може се описати круг.

4. Ако су код неког четвороугла три угла права (Ламбертов четвороугао), тада је и четврти угао прав (Ј. Х. Ламберт 1728 – 1777, француски математичар).

5. Збир углова у троуглу једнак је опруженом углу (А. М. Лежандр 1752 – 1833, француски математичар).

6. За сваку праву и тачку ван ње у равни њима одређеној постоји највише једна права која садржи ту тачку и дисјунктна је са том правом (Џ. Плејфер 1748 – 1819, енглески математичар).

Посебно је значајна Плејферова аксиома. Она се користи као аксиома паралелности у еуклидској геометрији.

1.4 Откриће прве нееуклидске геометрије

Откриће прве нееуклидске геометрије приписује се руском матемтичару Николају Ивановичу Лобачевском ($1792 - 1856$). Он је разматрао проблем петог Еуклидовог постулата. Он је пошао од негације Плејферове аксиоме, тј. да за праву и тачку ван ње у некој равни постоје бар две праве које садрже дату тачку и дисјунктне су са датом правом, не би ли дошао до контрадикције и доказао пети постулат. Међутим, он је открио да његова полазна претпоставка није у контрадикцији ни са једном другом аксиомом, односно, када би се пети постулат заменио својом негацијом, систем аксиома би остао непротивречан. Тако је Лобачевски изградио целу нову геометрију у којој важе све еуклдске аксиоме и у којој је пети постулат замењен својом негацијом. Потребно је поменути да је до истих закључака независно од Лобачевског дошао и мађарски математичар Јанош Бољај ($1802-1860$), па се ова нееуклидска геометрија назива још и геометрија Бољај-Лобачевског. Потпуна потврда непротивречности ове геометрије дата је тек након смрти обојице математичара, када је Анри Поенкаре ($1854 - 1912$) изградио модел којим је показано да би противречност геометрије Лобачевског значила и противречност еуклидске геометрије. О овоме ће бити више речи касније.

2

Систем аксиома геометрије Лобачевског

2.1 Аксиоме

Како бисмо уопште разумели геометрију Лобачевског, потребно је прво навести све аксиоме које у њој важе.

Аксиоме инциденције:

I_1 Постоји најмање једна права која садржи две тачке.
I_2 Свака права садржи најмање две разне тачке.
I_3 Постоји највише једна права која садржи две разне тачке.
I_4 Свака раван садржи најмање три неколинеарне тачке.
I_5 Постоји најмање једна раван која садржи три тачке.
I_6 Постоји највише једна раван која садржи три неколинеарне тачке.
I_7 Ако две разне тачке неке праве припадају једној равни, онда свака тачка те праве припада истој равни.
I_8 Ако две разне равни имају једну заједничку тачку, онда оне имају најмање још једну заједничку тачку.
I_9 Постоје четирири некопланарне тачке.

Аксиоме распореда:

II_1 Ако је $B(A, B, C)$, тада су A, B, C три разне колинеарне тачке.
II_2 Ако је $B(A, B, C)$, тада је $B(C, B, A)$.
II_3 Ако је $B(A, B, C)$, тада није $B(B, A, C)$.

II_4 Ако су A, B и C три разне колинеарне тачке, тада је $B(A, B, C)$, или $B(B, A, C)$, или $B(A, C, B)$.
II_5 Ако су A, B две разне тачке, тада постоји тачка C, таква да је $B(A, B, C)$.
II_6 Ако су A, B и C три разне неколинеарне тачке и p права која припада равни ABC, не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да је $B(B, P, C)$, тада права p сече праву AC у тачки Q таквој да је $B(C, Q, A)$ или праву AB у тачки R, таквој да је $B(B, R, A)$.

Аксиоме подударности

III_1 Ако су A, B, C, D тачке такве да је $(A, B) \cong (C, D)$ и $A = B$, тада је и $C = D$
III_2 Ако су A и B две разне тачке, тада је $(A, B) \cong (B, A)$.
III_3 Ако су A, B, C, D, E, F тачке такве да $(A, B) \cong (C, D)$ и $(A, B) \cong (E, F)$, тада је $(C, D) \cong (E, F)$.
III_4 Ако су C и C' тачке двеју отворених дужи AB и $A'B'$, такве да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$, тада је и $(A, B) \cong (A', B')$.
III_5 Ако су A и B две разне тачке и тачка C теме неке полуправе, тада на тој полуправој постоји тачка D таква да је $(A, B) \cong (C, D)$.
III_6 Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и A', B' тачке руба неке полуравни, такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, тада у тој полуравни постоји јединствена тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$.
III_7 Ако су A, B, C и A', B', C' две тројке неколинеарних тачака и D и D' тачке полуправих BC и $B'C'$, такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$ и $(B, D) \cong (B', D')$, тада је и $(A, D) \cong (A', D')$.

Аксиоме непрекидности

IV_1 (Архимедова аксиома): Ако су AB и CD две произвољне дужи, тада на полуправој AB постоји коначан низ тачака $A_1, A_2, A_3 ... A_n$, таквих да је $B(A_1, A_2, ..., A_n)$, при чему је свака од дужи $A_1A_2, A_2A_3...$ подударна дужи CD и важи $B(A, B, A_n)$.
IV_2 (Канторова аксиома):Ако је $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3...A_nB_n...$низ затворених дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу, тада постоји тачка X таква да припада свакој дужи тог низа.

Аксиома паралелности

V_1 (Аксиома Лобачевског) Постоје права p и тачка A ван те праве, такве да у њима одређеној равни постоји више од једне праве која садржи тачку A и нема заједничких тачака са правом p.

Простор у коме су задовољене аксиоме геометрије Лобачевског зваћемо простором Лобачевског, а сваку раван тог простора равни Лобачевског.
Теорема 2.1: За сваку тачку A простора Лобачевског и праву p која је не садржи, у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже тачку A, а са правом p немају заједничких тачака.

2.2 Основни ставови и теореме геометрије Лобачевског

Да бисмо могли да докажемо неке основне теореме у геометрији Лобачевског, потребно је да уведемо следеће дефиниције и теореме.

Дефиниција: Нека је p права и A тачка ван ње. Ако је q права која садржи тачку A и паралелна је са правом p и B подножје нормале из тачке A на праву p, тада се угао између правих q и AB који није већи од $\frac{\pi}{2}$ назива углао паралелности који одговара дужи AB.

Теорема 2.2: За сваку тачку у простору Лобачевског и праву која је не садржи постоје најмање две праве које садрже дату тачку и паралелне су са датом правом.

Теорема 2.3 (Лежандрова теорема): Збир унутрашњих углова у троуглу није већи од π.

Доказ: Претпоставимо супротно, да постоји троугао код кога је збир унутрашњих углова већи од π. Нека је то $\triangle ABC$. Нека су $A_1, A_2, ..., A_n$ тачке које припадају полуправој BA тако да важи $BA = AA_1 = ... = A_{n-1}A_n$ и $\beta(B, A, A_1, ..., A_n)$, а $C_1, ..., C_n$ тачке такве да важи $\triangle ABC \cong \triangle A_1AC_1 \cong \triangle A_2A_1C_2 \cong ... \cong \triangle A_nA_{n-1}C_n$, где је n произвољн природан број. Како је $\angle BAA_1 = \pi$, онда је $\angle BAC + \angle CAC_1 + \angle C_1AA_1 = \pi = \angle BAC + \angle CAC_1 + \angle CBA$. Из овога и полазне претпоставке следи да је $\angle BCA > \angle CAC_1$, па важи $AB > CC_1$. На основу првог става подударности (СУС) добијамо $\triangle CAC_1 \cong \triangle C_1A_1C_2 \cong ... \cong \triangle C_{n-1}A_{n-1}C_n$, па је $CC_1 = C_1C_2 = ... = C_{n-1}C_n$. Пошто је $BC + CC_1 + ... + C_{n-1}C_n + C_nA_n = BC + CA + nCC_1 > (n+1)BA$, тада важи $n(AB - CC_1) > BC + CA - AB$, што је у контрадикцији са Архимедовом аксиомом, јер је $AB - CC_1 > 0$ и n произвољан природан број.

Основни ставови геометрије Лобачевског

Теорема 2.4: Следећи искази су еквиваленти аксиоме Лобачевског:

1. Угао паралелности је оштар.
2. Збир унутрашњих углова сваког троугла је мањи од π.
3. Збир унутрашњих углова сваког простог, равног четвороугла је мањи од 2π.
4. Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су оштри.
5. Један угао Ламбертовог четвороугла је оштар.
6. Постоји права у равни оштрог угла која је управна на једном краку тог угла, а не сече његов други крак.

Доказ: Прва тврдња је еквивалентна са теоремом 2.2. Остале тврдње се добију као последице негације еквиваленaта петог Еуклидовог постулата и коришћењем Лежандрове теореме, па су самим тим еквиваленти аксиоме Лобачевског. На пример, негација Лежандровог еквивалента била би да је збир унутрашњих углова у троуглу различит од π, али на основу Лежандрове теореме (која важи на основу прве 4 групе аксиома) тај збир не може бити већи од π, па самим тим мора бити мањи.

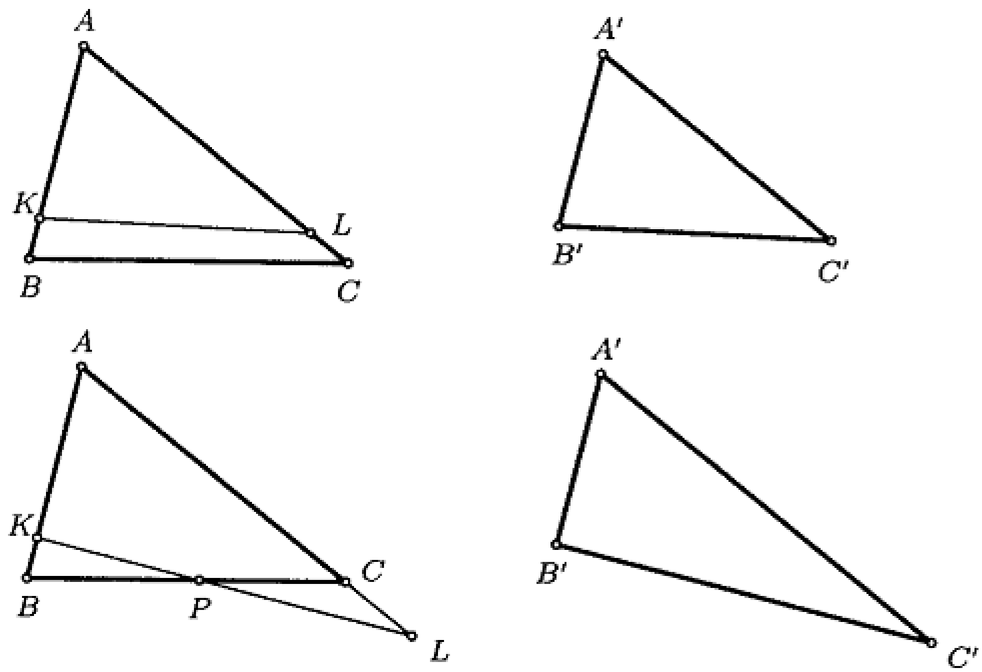
Подударност троуглова

У апсолутној геометрији могуће је доказати пет ставова о подударности троуглова. Поред тих пет ставова, у геометрији Лобачевског важи још један, шести став о подударности троуглова.

Теорема 2.5: Два троугла су подударна ако и само ако су им одговарајући углови међусобно подударни.

Доказ: Претпоставимо да су углови код темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ подударни, редом, угловима код темена A', B', C' троугла $\triangle A'B'C'$, а да ивице AB и $A'B'$ нису међусобно подударне. Ако је , на пример,

$AB > A'B'$, тада између тачака A и B постоји тачка K таква да је $AK \cong A'B'$. Нека је L тачка полуправе AC таква да је $AL \cong A'C'$. Тада на основу првог става о подударности троуглова $\triangle AKL \cong \triangle A'B'C'$, па су углови код темена K и L троугла $\triangle AKL$ подударни угловима код темена B троугла $\triangle ABC$. Ако би тачке A и L биле са исте стране праве BC, онда би у четвороуглу $BCKL$ збир унутрашњих углова био 2π, што је немогуће. Ако тачке A и L не би биле са исте стране праве BC, онда би дуж KL секла дуж BC у тачки P, па би у $\triangle BPK$ спољашњи угао код темена K био подударан унутрашњем углу код темена B, што је немогуће.



Дакле, није $AB > A'B'$. На исти начин није ни $AB < A'B'$, па је $AB \cong A'B'$. тако да су, на основу другог става подударности (УСУ) троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ међусобно подударни.

Ова теорема има изузетно значајну последицу.
Последица: У геометрији Лобачевског свака сличност је подударност.

3

Поенкареови модели геометрије Лобачевског

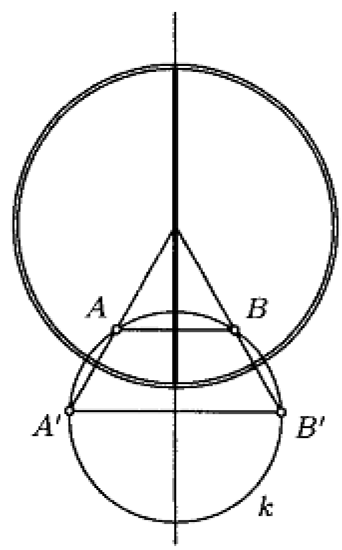
Геометрија Лобачевског се заснива на апстрактним појмовима за које важи неки систем аксиома. Моделом геометрије Лобачевског називамо интерпретацију те теорије којом апстрактним појмовима дајемо конкретна значења. У овом и наредном поглављу ћемо се бавити различитим интерпретацијама геометрије Лобачевског.

3.1 Поенкареов диск модел

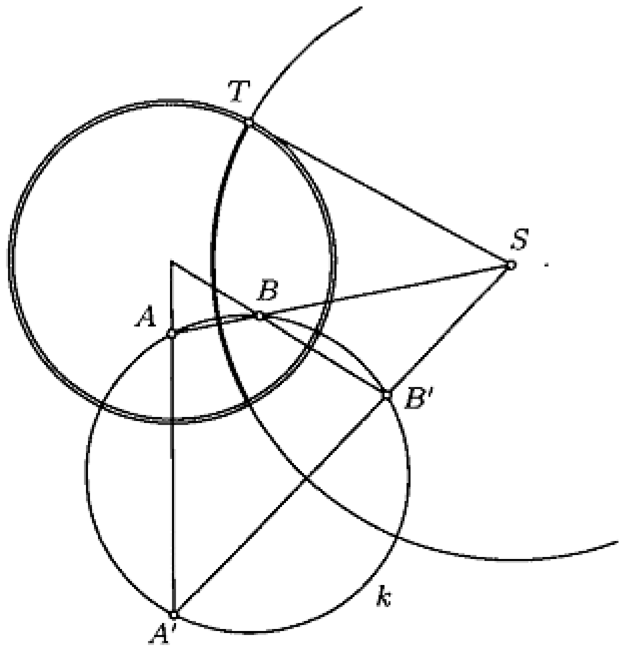
Нека је задат произвољан круг еуклидске равни. Тај круг зваћемо апсолутом, а његову унутрашњост h-равни. Сваку тачку h-равни зваћемо h-тачком. Ако је произвољан круг или права нормална на апсолуту, њихов пресек са h-равни зваћемо h-правом. Тачке у којима тај круг или права сече апсолуту зваћемо крајевима h-праве. Све сегменте тог круга или праве који припадају h-равни зваћемо h-дужима, а оне чије једно теме припада h-равни, а друго апсолути h-полуправама. Прво од та два темена зваћемо теменом, а друго крајем h-полуправе. Свака h-права дели h-раван на две h-полуравни и та h-права се назива рубом тих h-полуравни. Две h-праве са заједничким теменом деле h-раван на две области које ћемо звати h-угловима. Ако 3 тачке A, B, C не припадају истој h-правој, можемо дефинисати h-троугао као скуп тачака које припадају h-дужима AB, BC и CA. На врло сличан начин по аналогији са полигоном можемо дефинисати и h-полигон. Инверзија у односу на круг k управан на апсолути или осна рефлексија у односу на праву k управну на апсолути h-раван слика на себе. Наведена пресликавања зваћемо h-рефлексијом. Осом h-рефлексије зваћемо круг или праву k. Свака h-полураван се h-рефлексијом у односу на свој руб слика у своју комплементарну h-полураван. Увешћемо сада неколико теорема у вези са h-рефлексијом.

Теорема 3.1: За две разне h-тачке A и B постоји јединствена h-рефлексија којом се те две тачке пресликавају једна у другу.

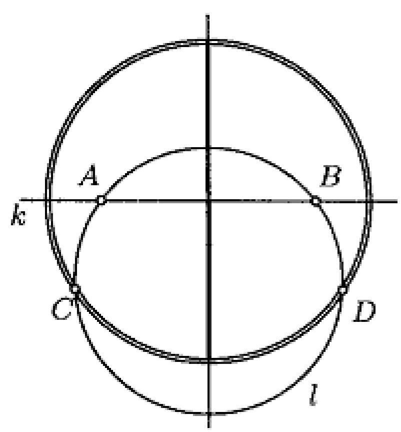
Доказ: Први случај: дуж AB не припада пречнику апсолуте. Нека су A' и B' редом слике тачака A и B инверзијом у односу на апсолуту. Ако су праве AB и $A'B'$ паралелне, тада је оса h-рефлексије која слика тачке A и B једну у другу је h-права која припада медијатриси дужи AB.



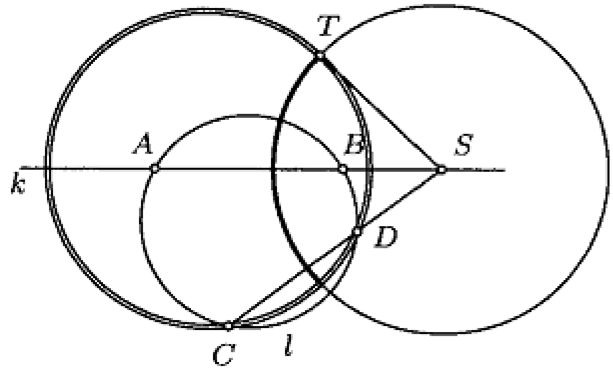
Ако се праве AB и $A'B'$ секу у тачки S, тада је оса тражене h-рефлексије h-права која припада кругу са центром у тачки S и полупречника дужине тангентне дужи из S на апсолуту.



Други случај: дуж AB припада пречнику апсолуте. Тада постоји круг k који садржи тачке A и B и сече апсолуту у тачкама C и D. Ако су праве AB и CD паралелне, тада је оса тражене h-рефлексије полупречник апсолуте који је нормалан на AB.



Међутим, ако се праве AB и CD секу у тачки S, тада је тражена оса h-рефлексије h-права која припада кругу са центром у тачки S који је управан на апсолути.



Теорема 3.2: Ако се две h-праве секу, тада постоје две h-рефлексије којима се оне пресликавају једна у другу, а ако су дисјунктне, тада постоји јединствена h-рефлексија којом се оне пресликавају једна у другу.

Доказ: Нека кругови k и k' садрже задате h-праве. Ако су задате h-праве дисјунктне, тада су k и k' дисјунктни или се додирују у тачки која не припада h-равни, па стога постоји јединствена инверзија којом се кругови пресликавају један у други. Како круг те инверзије има центар у пресеку заједничких спољашњих тангенти кругова k и k' и нормалан је а апсолуту, онда постоји јединствена h-рефлексија којом се задате праве сликају једна у другу и њена оса припада поменутом кругу инверзије. Ако се кругови k и k' секу, тада постоје две инверзије којима се ти кругови пресликавају један у други, па ће постојати и две h-рефлексије којима ће се задате праве сликати једна у другу. Оса једне од те две h-рефлексије припада кругу управном на апсолути са центром у пресеку заједничких тангенти k и k', а оса друге h-рефлексије припада кругу који садржи пресечне тачке кругова k и k' и управан је на апсолути.

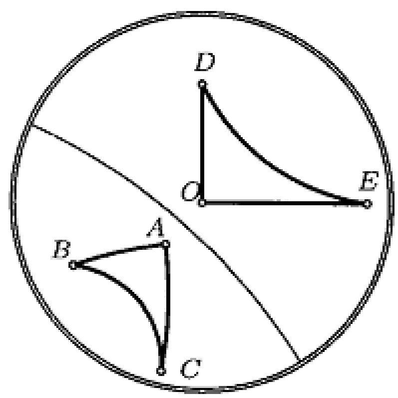
Из претходне теореме директно следи следеће тврђење.

Теорема 3.3: Постоји јединствена h-рефлексија којом се две h-полуправе са заједничким теменом пресликавају једна у другу.

Дефиниција: За h-тачку B која се разликује од двеју h-тачака A и C рећи ћемо да је h-између тих двеју h-тачака и писаћемо $B_h(A, B, C)$ ако h-тачка B припада h-дужи AC.

Дефиниција: За пар h-тачака (A, B) рећи ћемо да је h-подударан пару h-тачака (C, D) и писаћемо $(A, B) \cong_h (C, D)$ ако постоји низ h-рефлексија чији производ пресликава пар (A, B) на пар (C, D). Производ тих h-рефлексија зваћемо h-подударношћу или h-изометријом h-равни.

Теорема 3.4: Збир унутрашњих углова произвољног h-троугла је мањи од π.



Доказ: Ако је ABC h-троугао, а O центар апсолуте, тада постоји h-рефлексија која слика тачке A, B, C редом у тачке O, D, E. Том h-рефлексијом су углови h-троугла ABC пресликани у себи h-подударне углове који припадају h-троуглу ODE, а h-дужи AB и AC су пресликане у h-дужи OD и OE које припадају пречницима апсолуте. Како је угао код темена O једнак, а углови код темена D и E h-троугла ODE мањи од углова код истих темена еуклидског троугла ODE, збир унутрашњих углова h-троугла ODE је мањи од π. Пошто су h-троуглови ABC и ODE h-подударни, онда ће и збир унутрашњих углова h-троугла ABC бити мањи од π.

Пошто смо доказали неке од битних теорема у вези са h-пресликавањем, сада можемо да испитамо да ли Поенкареов диск модел задовољава све аксиоме геометрије Лобачевског.

Теорема 3.5: h-раван је модел равни Лобачевског.

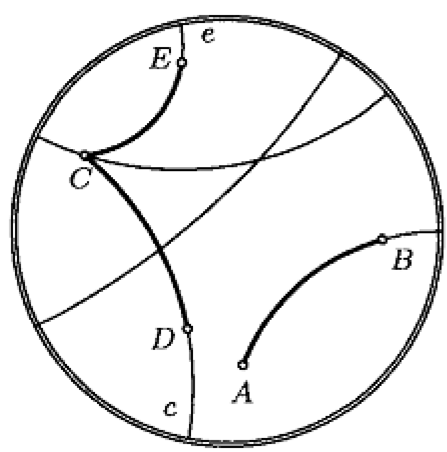
Доказ: Потребно је доказати да појмови h-тачке, h-праве, h-равни,

h-између и h-подударности парова тачака задовољавају све аксиоме геометрије Лобачевског.

Будући да сваки круг садржи бар две тачке и да постоји јединствен круг управан на апсолути који садржи две разне тачке, биће задовољене прве три аксиоме инциденције. Ако тачке једне h-праве назовемо h-колинеарним, а тачке које не припадају једној h-правој h-неколинеарним, тада h-раван садржи најмање 3 неколинеарне тачке. Стога су задовољене све аксиоме прве групе.

За све аксиоме распореда се лако проверава да важе.

Из дефиниције h-подударности директно следи да важи прва аксиома подударности: ако су A, B, C, D h-тачке такве да је $(A, B) \cong_h (C, D)$ и $A = B$, тада је $C = D$. Релација h-подударности задовољава другу аксиому треће групе пошто за сваке две h-тачке постоји h-рефлексија којом се те две тачке сликају једна у другу. Дакле, ако су A и B било које две h-тачке, тада је $(A, B) \cong_h (B, A)$. Како је свака инверзија инволуција, трећа аксиома подударности се лако проверава: ако су A, B, C, D, E, F h-тачке такве да је $(A, B) \cong_h (C, D)$ и $(A, B) \cong_h (E, F)$, тада је $(C, D) \cong_h (E, F)$. Да бисмо доказали да важи пета аксиома подударности, претпоставимо да су A и B две произвољне h-тачке и да је C теме неке h-полуправе c.



На основу теореме 3.1 постоји јединствена h-рефлексија која слика h-тачку A у h-тачку C. Ако се том h-рефлексијом h-полуправа AB слика у h-полуправу e, тада се h-тачка B слика у неку тачку E h-полуправе e. Како, на основу теореме 3.3, постоји јединствена h-рефлексија која слика h-полуправу e у h-полуправу ,тада та h-рефлексија слика h-тачку E

у h-тачку D h-полуправе c, па је на основу дефиниције h-подударности $(A, B) \cong_h (C, D)$. Дакле, ако су A и B две разне h-тачке и C теме неке h-полуправе, тада на тој h-полуправој постоји h-тачка D таква да је $(A, B) \cong_h (C, D)$. Доказаћемо да важи шеста аксиома подударности. Ако се (A, B) неком h-подударношћу слика у (A', B'), тада се нека тачка C, која не припада h-правој AB, том h-подударношћу пресликава у h-тачку C' тако да је $(A, C) \cong_h (A', C')$ и $(B, C) \cong_h (B', C')$. У h-полуравни са рубом $A'B'$, којој припада тачка C', постоји јединствена таква h-тачка, јер h-подударност чува h-углове, пошто их чува и свака инверзија и рефлексија. Да бисмо доказали да важи седма аксиома подударности претпоставићемо да су A, B, C и A', B', C' две тројке h-неколинеарних h-тачака и D, D' h-тачке h-полуправих $BC, B'C'$ редом такве да је $(A, B) \cong_h (A', B')$, $(B, C) \cong_h (B', C')$, $(C, A) \cong_h (C', A')$, $(B, D) \cong_h (B', D')$. Постоји јединствена h-рефлексија која пресликава уређену тројку (A, B, C) у уређену тројку (A', B', C'). Како на основу шесте аксиоме подударности на h-полуправој $B'C'$ постоји јединствена h-тачка D' таква да је $(B, D) \cong_h (B', D')$, тада ова h-рефлексија пресликава h-тачку D у D', па је $(A, D) \cong_h (A', D')$. Што се тиче аксиома подударности, остало нам је још само да докажемо четврту аксиому. Нека су C, C' h-тачке h-дужи AB и $A'B'$ такве да је $(A, C) \cong_h (A', C')$ и $(B, C) \cong_h (B', C')$. Пошто на h-полуправој $A'B'$ постоји јединствена h-тачка C' таква да је $(A, C) \cong_h (A', C')$, а на h-полуправој $C'A'$ постоји јединствена h-тачка B' таква да је $(B, C) \cong_h (B', C')$, онда h-рефлексијом којом се уређени пар (A, C) пресликава у (A', C'), уређени пар (B, C) се пресликава у (B', C'), па се том h-рефлексијом и уређени пар (A, B) пресликава у (A', B').

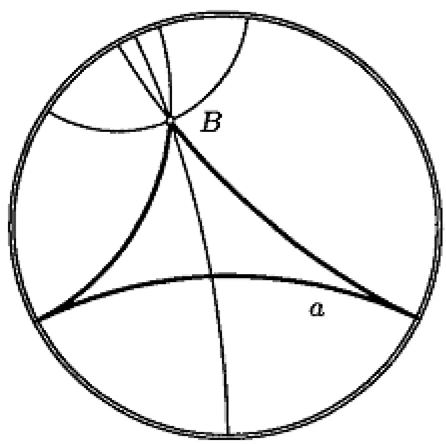
Будући да аксиоме непрекидности важе и за кружне лукове, важе и за h-праве.

Остало нам је још само да докажемо да важи аксиома Лобачевског. Како је према теореми 3.4 збир унутрашњих h-углова у сваком h-троуглу мањи од π, а то је еквивалент аксиоме Лобачевског, тако добијамо да у Поенкареовом диск моделу важи и та аксиома.

Како је паралелност врло битан појам у геометрији, дефинисаћемо h-паралелност на следећи начин.

Дефиниција: За две h-праве кажемо да су h-паралелне ако имају један заједнички крак.

На слици испод приказане су две h-праве које садрже дату h-тачку B и паралелне су са датом правом a.



Пример 1: Дате су h-тачке X и Y. Конструисати h-круг k са h-центром у h-тачки X који садржи h-тачку Y.

Решење: Да бисмо решили овај задатак дефинишимо најпре h-круг са h-центром у h-тачки S као скуп h-тачака h-равни тако да за призвољне две тачке тог скупа A, B важи $(S, A) \cong_h (S, B)$. За произвољан h-круг са h-центром у тачки O, где је O центар апсолуте, тривијално важи да је то еуклидски круг са центром (у еуклидском смислу) у тачки O. На основу овога, можемо закључити да ако се h-тачке X и O поклапају, тада тражени h-круг конструишемо тако што једноставно констришемо еуклидки круг са центром у тачки X и полупречником XY. У случају да се X и O не поклапају, тада ћемо изабрати h-рефлексију ψ која h-тачку X пресликава у h-тачку O. Тако ψ пресликава Y у Y' тако да важи $(X, Y) \cong_h (O, Y')$. Затим ћемо конструисати h-круг l са h-центром у h-тачки O који садржи h-тачку Y' (тј. еуклидски круг за који то важи). Ако сада h-рефлексијом ψ пресликамо h-круг l, за произвољне две h-тачке A, B добијене слике k постојаће h-тачке A', B' које припадају h-кругу l и за које важи $(O, A') \cong_h (O, B')$. Како је h-троугао XAB слика троугла OAB у пресликавању ψ, тада ће важити $(O, A') \cong_h (O, B') \cong_h (X, A) \cong_h (X, B)$, па ће k бити тражени h-круг. Пошто је ψ инверзија или рефлексија, она слика еуклидски круг у еуклидски круг, тако да ће

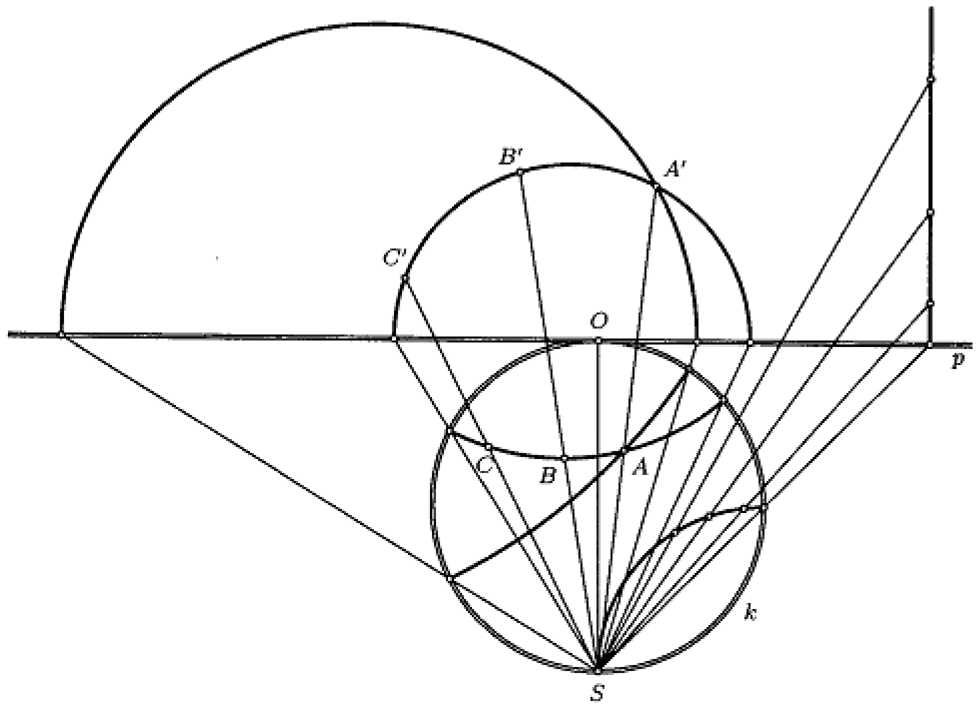
h-круг k бити еуклидски круг, али његов h-центар неће се поклапати са његовим еуклидским центром.

Пример 2: У h-равни су дате h-тачке A и B. Одредити h-тачку C те h-равни тако да је h-троугао ABC правилан.

Решење: Нека је k h-круг са h-центром у h-тачки A који садржи h-тачку B, а l h-круг са h-центром у h-тачки B који садржи h-тачку A. Нека се h-кругови k и l секу у тачкама C_1 и C_2. Тада на основу дефиниције h-круга важи $(A, B) \cong_h (A, C_1) \cong_h (B, C_1) \cong_h (A, C_2) \cong_h (B, C_2)$, па су h-троуглови ABC_1 и ABC_2 правилни, односно, C_1 и C_2 су тражене тачке.

3.2 Поенкареов полуравански модел

Нека су задати права p и круг k који је додирује у тачки O. Нека се тачка S налази у пресеку пречника круга k који садржи тачку O са кругом k. Инверзијом ψ у односу на круг са центром у тачки S са полупречником SO, круг k се пресликава у праву p, а његова унутрашњост σ у полураван π, чији је руб права p. Лако се проверава да је пресликавање ψ бијекција.



Дефиниција: Полураван π зваћемо h-равни, а сваку њену тачку h-тачком. Инверзија ψ h-праве h-равни σ слика у (еуклидске) полукругове и полуправе које су нормалне на рубу полуравни π и те полукругове и полуправе ћемо звати h-правама h-равни π.

Дефиниција: Ако је тачка B h-равни σ h-између тачака A и C, тада ћемо за слику B' тачке B рећи да је h-између слика A' и C' тачака A и C у инверзији ψ и писаћемо $B_h(A', B', C')$.

Дефиниција: Ако су (A, B) и (C, D) h-подударни парови h-тачака h-равни σ и ако је $(A', B') = \psi(A, B)$ и $(C', D') = \psi(C, D)$, тада за парове h-тачака (A', B') и (C', D') кажемо да су h-подударни парови h-тачака h-равни π и писаћемо $(A', B') \cong_h (C', D')$.

Теорема 3.6: h-раван π је модел геометрије Лобачевског.

Доказ: Појмови h-тачке, h-праве, h-између и h-подударности парова тачака h-равни σ задовољавају све аксиоме геометрије Лобачевског, h-тачке и h-праве h-равни σ се пресликавају у h-тачке и h-праве h-равни π. Како инверзија ψ чува релације h-између и h-подударности, појмови h-тачке, h-праве, h-између и h-подударности ће, такође, задовољавати аксиоме геометрије Лобачевског.

3.3 Поенкареови модели стереометрије Лобачевског

По аналогији са појмом инверзије у односу на круг, може се увести и појам инверзије у односу на сферу. Тако се, по аналогији са Поенкареовим диск моделом равни Лобачевског, може увести Поенкареов диск модел простора Лобачевског. Апсолута тог модела је произвољна сфера, а њена унутрашњост зваћемо h-простором. Пресек сфера или равни нормалних на апсолуту са апсолутом биће h-равни, а пресек кругова или права нормалних на апсолуту биће h-праве тог h-простора. Појмови h-између и h-подударности h-простора се дефинишу по потпуној аналогији са истим појмовима у h-равни. По аналогији са теоремом 3.5 доказује се да модел h-простора задовољава све аксиоме апсолутне планиметрије и аксиому паралелности. Непосредно се проверава да задовољава и стереометријске особине прве групе.

По аналогији на Поенкареов полуравански модел, можемо увести и Поенкареов полупросторни модел. Дата је сфера σ која додирује дату раван π у тачки O. Инверзијом у односу на сферу са центром у тачки S на сфери σ, дијаметрално супротној тачки O, сфера σ слика се у раван π, а њена унутршњост у отворени полупростор чији је руб раван π који представља модел простора Лобачевског.

4

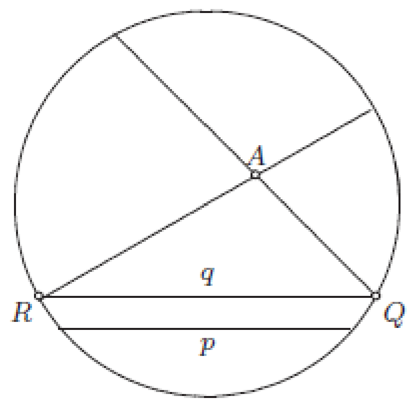
Клајнов модел геометрије Лобачевског

Дефиниција: Нека је задат произвољан круг неке еуклидске равни који ћемо назвати апсолутом. Унутрашњост апсолуте зваћемо h-равни, а сваку тачку h-равни h-тачком. Произвољну отворену дуж која представља тетиву апсолуте зваћемо h-правом. Еуклидске дужи чија оба темена припадају h-равни зваћемо h-дужима, а оне којима једно теме припада h-равни, а друго апсолути h-полуправама са теменом у оној тачки која не припада апсолути.

Дефиниција: Ако за три колинеарне еуклидске тачке A, B, C које припадају h-равни важи да је тачка B између тачака A и C, односно $B(A, B, C)$, тада за h-тачку B кажемо да је h-између h-тачака A и C и пишемо $B_h(A, B, C)$.

Теорема 4.1: У Клајновом моделу равни Лобачевског важи аксиома Лобачевског.

Доказ: Нека је p произвољна h-права и A произвољна h-тачка ван ње. Изаберимо једну еуклидску праву q која је паралелна (у еуклидском смислу) са правом p тако да се тачка A и права p налазе са разних страна праве q. Нека права q сече апсолуту у тачкама R и Q. Тада су h-праве AR и AQ дисјунктне са h-правом p.


A
q
R
Q
p

5

Литература

[1] Еуклидска и хиперболичка геометрија, Зоран Лучић, Београд, 1997.

[2] Геометрија за први разред Математичке гимназије, Милан Митровић, Михаило Вељковић, Ненад Лазаревић, Срђан Огњановић, Љубинка Петковић, Београд, 1996.