Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Основне теореме Лијевих група

Ученик:
Добрица Јовановић IVд

Ментор:
Лука Милићевић

Београд, јун 2021.

Садржај

1

Увод

1.1 Историја

Лијева теорија представља широку област у математици којом су се бавили разни математичари још од 19. века и која је и дан данас актуелна. Блиско је повезана са разним гранама математике: алгебре, анализе, геометрије, топологије, па и математичке физике. Самим тим је незаобилазна област за многе математичаре и физичаре.

Може се рећи да је један од првих зачетника Лијеве теорије норвешки математичар Софус Ли (1842 – 1899), који се занимао за класификацију свих могућих дејстава група на неке многострукости. Увео је Лијеву алгебру као објекат који је уско повезан са Лијевим групама, али има једноставнију структуру (структуру векторског простора), и самим тим је једноставнији за изучавање. Показао је такође неке од повезаности Лијевих група и Лијевих алгебра.

Његов рад надограђује немачки математичар Вилхем Килинг (1847 – 1923), који инсистира на томе да за класификацију дејства Лијевих група прво потребно класификовати Лијеве алгебре. Примећује да му је за класификацију Лијевих алгебри важна класификација простих (нерастављивих) Лијевих алгебри. Иако неки његови докази нису били скроз тачни, долази до отркића да су све нерастављиве Лијеве алгебре оне које везујемо за линеарне, ортогоналне и симплетичке групе, осим коначног броја специјалних изолованих случајева.

Овај проблем у потпуности решава француски математичар Ел Картан (1869 – 1951), који надограђује Килингове идеје, уноси значајне оригиналне иновације и успешно класификује нерастављиве Лијеве алгебре. Он такође доказује многе друге битне теореме за Лијеву теорију, од којих ћемо неке сусрести и у раду.

Ово је била кратка историја зачетка Лијеве теорије. Набрајање свих значајних доприноса овој теорији би потрајало, па ћу навести само неке: Давид Хилберт (1862 – 1943), Херман Вајл (1885 – 1955), Клод Чевалеј (1909 – 1984), Јевгениј Динкин (1924 – 2014)...

Лијева теорија се природно намеће и у физици као алат за проучавање симетрија објеката. Тако да су многи физичари значајно допринели развијању ове теорије.

1.2 Преглед садржаја

У овом раду ћемо прећи преко неких основа Лијеве теорије. Прво ћемо дефинисати у другој глави неке основне појмове из топологије и диференцијалне геометрије који су нам потребни за даљи рад. Даље ћемо дефинисати шта су то Лијеве групе и Лијеве подгрупе. Показаћемо нека основна тврђења за Лијеве групе које ће нам дати бољи увид у њихову структуру. Затим, у четвртој глави, дефинишемо експоненцијално пресликавање које нам даје везу између тангентног простора јединице неке Лијеве групе и те Лијеве групе. Ово пресликавање нам омогућава да дефинишемо операцију комутатора за тангенти простор јединице, које нам затим даје основа да уведемо појам Лијеве алгебре. Лијеве алгебре имају структуру векторског простора, па су лакше за проучавање него Лијеве групе. Међутим, у петој глави показујемо основне теореме Лијеве теорије, које нам дају везу између Лијевих група и Лијевих алгебри. Самим тим, сводимо изучавање Лијевих група на изучавање Лијевих алгебри.

2

Основни појмови топологије и диференцијалне геометрије

Дефиниција 2.0.1. Тополошки простор је уређени пар $(X, \mathcal{O})$, где је X скуп, а $\mathcal{O}$ колекција подскупова од X, који испуњавају следеће три аксиоме:

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$,

(2) пресек коначно много отворених скупова је отворен скуп,

(3) унија произвољно много отворених скупова је отворен скуп.

Елементе $\mathcal{O}$ зовемо отвореним скуповима.

Дефиниција 2.0.2. Околине (engl. *neighbourhood*) елемента x скупа X неког тополошког простора је отворен скуп који садржи x.

Дефиниција 2.0.3. Скуп A је отворен у скупу B неког тополошког простора, ако $A \subset B$ и за сваки елемент у A постоји околина тог елемента која припада B.

Дефиниција 2.0.4. Скуп A је затворен у скупу B неког тополошког простора, ако $A \subset B$ и A^C је отворен скуп у B. Овде A^C означава коплемент скупа A.

Дефиниција 2.0.5. Скуп X је повезан ако су једини подскупови скупа X тополошког простора $(X, \mathcal{O})$ који су и отворени и затворени баш X и $\emptyset$.

Дефиниција 2.0.6. Затворење $\overline{A}$ подскупа A од скупа B неког тополошког простора, чини сваки елемент у B такав да не постоји његова околина која је дисјунктна са A.

Дефиниција 2.0.7. Кажемо да је подскуп A густ у скупу B неког тополошког простора, ако је $B \subset \overline{A}$.

Дефиниција 2.0.8. Пресликавање $f : X \to Y$ између два тополошка простора X и Y је хомеоморфизам ако задовољава:

(1) f је бијекција

(2) f је непрекидно

(3) инверзна функција f^{-1} је непрекидна.

Дефиниција 2.0.9. Глатка многострукост (надаље подразумевамо да су многострукости глатке) је тополошки простор који задовољава:

(1) Тополошки простор је локално Еуклидски. То значи да за свако $m \in M$ постоји околина $U \subset M$ која садржи m и хомеоморфизам $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Уређен пар (U, φ) називамо картом.

(2) Тополошки простор је Хаусдорфов. Ово значи да за сваке две разне тачке у M постоје њихове околине које су дисјунктне.

(3) Постоји пребројива тополошка база. То значи да постоји препројиво отворено прекривање $B = B_i \subseteq M | i \in \mathbb{N}$ тако да за свако $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, тада постоји $B_k \in B$ тако да $B_k \subseteq B_i \cap B_j$.

(4) Дефинишимо атлас од M као скуп карти $A = (U_i, \varphi_i)$, тако да $\bigcup\limits_i U_i = M$. Многострукост је глатка ако постоји атлас тако да важи да за карте (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j), тако да важи $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, важи да је $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ глатко пресликавање Еуклидских простора.

Димензија многострукости M једнака је димензији Еуклидског простора кодомена карти.

Дефиниција 2.0.10. Дифеоморфизам је глатки хомеоморфизам између глатких многострукости. Група дифеоморфизама који сликају многострукост M у саму себе означавају се са $\mathrm{Diff}\, M$.

Дефиниција 2.0.11. Кажемо да је функција глатка ако је непрекидна и диференцијаблина произвољно много пута на њеном домену.

Дефиниција 2.0.12. (Тангентни вектор) Разматрајмо многострукост M димензије n. Изаберимо карту (U, φ) тачке x, такав да је хомеоморфизам $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Нека је $\gamma : (-1, 1) \to M$ крива таква да је $\gamma(0) = x$ и да је $\varphi \circ \gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^n$ глатко пресликавање. Тада је $(\varphi \circ \gamma)'(0)$ тангентни вектор криве γ у тачки x. Кажемо да су две криве еквивалентне ако при датој карти добијамо исти тангентни вектор. Испоставља се да је оваква дефиниција независна од избора карте.

Дефиниција 2.0.13. Тангентни простор многострукости M у тачки x је скуп свих тангентних вектора у x и означавамо га са T_xM. Оваква дефиниција је независна од избора карте. Тангентни простор је векторски простор.

Дефиниција 2.0.14. Смештање (engl. *embedding*) је глатко пресликавање између глатких многострукости $f : M \to N$ тако да је домен овог пресликавања дифеоморфан његовој слици ($f : M \to f(M)$ је дифеоморфизам).

Дефиниција 2.0.15. M је смештена подмногострукост од глатке многострукости N ако је $M \subset N$ и индетитетско пресликавање $i : M \to N, i(m) = m$ је смештање.

Дефиниција 2.0.16. Потапање (engl. *immersion*) је глатко пресликавање многострукости $f : M \to N$ које је на локалном нивоу смештање. Односно, за сваки елемент $m \in M$ постоји његова околина U у M тако да је $f : U \to f(U)$ дифеоморфизам.

Дефиниција 2.0.17. M је потопљена подмногострукост од глатке многострукости N ако је $M \subset N$ и индентитецко пресликавање $i : M \to N, i(m) = m$ је потапање. Тада X има структуру многострукости и за свако $x \in X$ важи да је $T_xX \subset T_xN$.

Приметити да је смештање заправо потапање са додатним ограничењима.

Дефиниција 2.0.18. Покривање је локално хомеоморфно, сурјективно пресликавање између два тополошка простора $f : X \to Y$, тако да за сваки елемент $y \in Y$, важи да је $f^{-1}(y)$ дискретан подскуп од X и да је кардиналност овог скупа независна од избора y.

Дефиниција 2.0.19. Ендоморфизам је морфизам неке структуре у саму себе. Скуп ендоморфизама структуре V је затворен у односу на композицију и означава се са $\mathrm{End}(V)$. Специјално, ендоморфизми векторског простора су његова линеарна пресликавања.

У теорији репрезентације у поглављу 2.2, $\mathrm{End}(V)$ ће такође бити и група и може се означавати са $\mathrm{GL}(V)$(група линеарних инвертибилних трансфромација над V) за векторски простор V.

Дефиниција 2.0.20. Векторско поље v многострукости M је пресликавање сваког елемента $m \in M$ у неки његов тангентни вектор: $v(m) \in T_m G$.

Скуп свих векторских поља чини векторски простор над операцијом сабирања вектора (збир два векторска поља v_1, v_2 је векторско поље v тако да важи $v(m) = v_1(m) + v_2(m)$ за $\forall m \in M$). Овај векторски простор од M ћемо означавати са $\mathrm{Vect}(M)$.

Дефиниција 2.0.21. Интегрална крива за векторско поље *в* је непрекидна крива $\gamma \subset M$, тако да за свако $p \in \gamma$ имамо $v(p) \in \gamma_p$. Нећемо доказивати постојања интегралних криви, пошто се доказ базира на диференцијалној геометрији.

3

Лијеве групе

3.1 Лијеве групе и подгрупе

Дефиниција 3.1.1. *Лијева група* је скуп G са следеће две структуре: G је група и G је глатка многострукост. Такође важи да су множење и инверзија групе глатка пресликавања.

Јединични елемент Лијевих група ћемо означавати са 1 и зваћемо га јединица, док ћемо тангентни простор у 1 означавати са $\mathfrak{g} = T_1G$.

Пример 1. Ради лакшег разумевања наводимо неколико примера Лијевих група, које ћемо можда сретати у даљем раду:

(1) $(\mathbb{R}^n, +)$,

(2) $(\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}, *)$ – јединични круг у комплексној равни са операцијом множења комплексних бројева.

(3) $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), *)$ – општа линеарна група – група инвертибилних $n \times n$ матрица са стандардном операцијом множења матрица. За све наредне матричне групе подразумева се да је операција множење над матрицама.

(4) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ – специјална линеарна група – група матрица степена n са детерминантом 1, такође нормална подгрупа од $GL(n, \mathbb{R})$.

(5) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ – ортогонална група – група матрица степена n које чувају растојања када трансформишу Еуклидски простор (изометрије). Ове матрице задовољавају једнакост $AA^T = I$ (самим тим $\det(A) \in \{-1, 1\}$) и стога чине подгрупу од $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

(6) $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ – специјална ортогонална група – подгрупа од $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ таква да је $\det(A) = 1$ – чине ротације Еуклидског простора.

(7) $\mathrm{U}(n)$ – група комплексних матрица степена n које испуњавају $UU^* = I$, где је U^* коњугат транспоноване матрице U, такође подгрупа од $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

(8) $\mathrm{SU}(n)$ – подгрупа од $\mathrm{U}(n)$ таква да је $\det(\mathrm{U}) = 1$,

(9) $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ – симплетичка група – група матрица степена $2n$ које задовољавају

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2n \times 2n} \mid \; A^T \Omega A = \Omega\}$$

где је Ω дефинисано са

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

за јединичне матрице I_n. Ове матрице очигледно задовољавају $\det(A) = 1$, тако да је $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ заправо подгрупа од $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})$.

Групе матрица (2) – (8) заједно се називају класичним групама.

Приметимо да не захтевамо да нам G, као тополошки простор, буде повезано. Заиста, на пример, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ није повезано, него имамо две повезане компоненте које одговарају детерминантама од $+1$ (група $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$) и -1. Међутим, следећа теорема нам омогућава да сведемо проучавање на повезане Лијеве групе и дискретне групе.

Теорема 3.1. Нека је G^0 повезана компонента јединице за Лијеву групу G. Тада је G^0 нормална подгрупа од G. Такође, косет G/G^0 чини дискретну групу.

Доказ. Приметимо да се особине многострукости и асоцијативности групе наслеђују од G и да јединица свакако припада G^0.
Покажимо затвореност групе, односно да ако $a, b \in G^0$, тада и $ab \in G^0$. Знајући да је множење глатко пресликавање, и то да постоји пут од a до 1, тада множењем здесна са b за сваки елемент пута од a до 1 добијамо и пут од ab до b. Али како постоји пут од b до 1, тада постоји пут од ab до 1 преко b.
Аналогно долазимо до тога да инверз елемента припада G^0 ако и сам тај елемент припада. Заиста, ако $a \in G^0$, онда постоји пут од a до 1, па тада множењем са a^{-1} добијамо да постоји пут од 1 до a^{-1}.
Овим смо показали да је G^0 заиста подгрупа. Да бисмо показали да је нормална подгрупа од G, односно да за свако $g \in G$ и $h \in G^0$ важи да $ghg^{-1} \in G^0$, довољно је да приметимо да важи $g^{-1}1g = 1 \in G^0$ и да је пресликавање $Ad_g : G \to G$, које дефинишемо да слика $x \in G$ у gxg^{-1}, такође глатко пресликавање, тако да је ghg^{-1} свакако повезано са $g1g^{-1}$, јер је h повезано са 1. Односно важи $ghg^{-1} \in G^0$. Пресликавање Ad_g зовемо адјунгованом репрезентацијом и касније

ћемо је детаљније изучити.
Чињеница да косет G/G^0 чини групу проилази из тога сто је G^0 нормална подгрупа, док чињеница да је дискретна група директно следи из:

$$a_1, a_2 \in A \in G/G^0 \Leftrightarrow a_1 a_2^{-1} \in G^0 \Leftrightarrow a_1 \to a_2$$

где последња еквивалентност означава да су a_1 и a_2 повезани и следи из десног множења са a_2 (односно његовим инверзом).

□

Дефиниција 3.1.2. Кажемо да је H смештена Лијева подгрупа Лијеве групе G, ако је подгрупа од G, која је такође и њена смештена подмногострукост.

Теорема 3.2. Свака непразна смештена Лијева подгрупа Лијеве групе G је затворена у G.

Доказ. Разматрајмо смештену Лијеву подгрупу H. Нека је $\overline{H}$ затворење од H у G.

Лема 3.1. $\overline{H}$ је подгрупа у G.

Доказ. Очигледно јединица припада $\overline{H}$, тако да треба да покажемо да су множење и инверз затворени.

Претпоставимо супротно: постоје $h_1, h_2 \in \overline{H}$ такви да $h_1 h_2 \notin \overline{H}$. То значи да постоји околина U од $h_1 h_2$ дисјунктна са $\overline{H}$. Међутим, узмимо неке $k_1, k_2 \in H$ тако да је k_1 у околини од h_1 и k_2 у околини од h_2. Тада знамо да $k_1 k_2 \in H$. Приметимо да, због непрекидности, можемо да изаберемо k_1 и k_2 тако да је $k_1 k_2 \in U$. Заиста, имамо да је множење k_1 са k_2 непрекидно како померамо k_1 до h_1 и k_2 до h_2. Како је $k_1 k_2 \in H$ и $k_1 k_2 \in U$ а U и H су дисјунктни, долазимо до контрадикције. Закључујемо да множење заиста јесте затворено.

Знамо да је инверзија исто непрекидно пресликавање, тако да аналогно као и за множење добијамо да је инверзија затворена унутар $\overline{H}$. □

Лема 3.2. За свако $x \in \overline{H}$ важи да је косет Hx отворен и густ у $\overline{H}$.

Доказ. Да бисмо показали да је отворен у $\overline{H}$, треба да покажемо да за сваки елемент у Hx постоји његова околина у $\overline{H}$ која је садржана у Hx.

Позовимо се на теорему из диференцијалне геометрије која гласи да за сваку смештену подмногострукост N неке многострукости M важи да је N локално затворено, односно за свако $x \in N$ важи да постоји околина од $x : U \subset M$ тако да је $N \cap V = \overline{N} \cap V$. Тврђење ове теореме се може наћи у додатку.

Применом ове теореме на H (које је смештена подмногострукост од G) добијамо да за свако $h \in H$ важи да постоји околина $U \subset G$ од h тако да је

$H \cap U = \overline{H} \cap U$. Помножимо обе стране здесна са $x \in \overline{H}$. Ово је дифеоморфизам који саље $H \cap U$ у $(H \cap U)x$, што је заправо $Hx \cap Ux$, и саље $\overline{H} \cap U$ у $\overline{H}x \cap U$. Позовимо се на лему 3.1. из које видимо да је $\overline{H}x = \overline{H}$. Закључујемо да важи: $Hx \cap Ux = \overline{H} \cap Ux$. С једне стране имамо да је $\overline{H} \cap Ux$ околина од hx у $\overline{H}$, а са друге стране имамо да је та околина садржана у Hx. Самим тим имамо да за сваки елемент од Hx важи да постоји његова околина у $\overline{H}$ која је садржана у Hx. Ово значи да је Hx отворен у $\overline{H}$.

Да бисмо показали да је густ, неопходно је да покажемо да не постоје елемент y у $\overline{H}$ и његова околина U, тако да је U дисјунктно са Hx. Претпоставимо супротно, да тако нешто постоји. Тада је Ux^{-1} околина од yx^{-1} које припада $\overline{H}$ зато што је то група. Али то значи да свака његова околина, па и Ux^{-1}, сече H, нека је то у елементу h. $h \in Ux^{-1} \Rightarrow hx \in U$, што је контрадикција. □

Лема 3.3. $H = \overline{H}$, односно H је затворено.

Доказ. Претпоставимо супротно. То значи да за неко $x \in \overline{H} \setminus H$ важи да су H и Hx дисјунктни. Но, као што смо доказали, Hx је густ у $\overline{H}$, тако да за сваку околину U од неког $h \in H$ важи да U сече Hx. Али пошто су Hx и H дисјунктни, значи да за сваку околину U неког $h \in H$ важи да $U \not\subset H$, што је контрадикторно са отвореношћу од H. □

Како је $\overline{H}$ затворено у G, онда је и H затворено. □

Занимљиво је да важи и обратно тврђење, које нећемо доказивати.

Теорема 3.3. (Картанова затворена-подгрупа теорема) Свака затворена (у тополошком смислу) подгрупа Лијеве групе је смештена Лијева подгрупа.

Последица 3.1. Повезана компонента јединице G^0 из теореме 3.1. је смештена Лијева подгрупа.

Доказ. У теореми 3.1. већ смо показали да је повезана компонента јединице подгрупа, тако да нам је довољно да покажемо да је затворена у тополошком смислу. Довољно је да приметимо да, ако свака околина неког елемента сече G^0, онда је тај елемент повезан са G^0 па свакако припада G^0. Стога за све $g \in G \setminus G^0$ важи да постоји околина од g у G која је дисјунктна са G^0. Самим тим је G^0 затворено. □

Последица 3.2. Ако је G повезана Лијева група и U нека околина јединице, онда U генерише G, односно множењем елемената из U можемо добити било који елемент из G.

Доказ. Нека је H подгрупа коју генерише U. Подгрупа је зато што било каквим даљим множењем не можемо добити ништа што није у H. То значи да за свако $h \in H, hU \subset H$, што значи да је H отворен у G. Такође, H је отворен подскуп многострукости, тако да је то смештена подмногострукост. Тако да закључујемо да је H смештена Лијева подгрупа. Но, као што смо видели из прошле теореме, H је затворен у G. Како је H и отворен и затворен подскуп од G, а знамо да је непразно, из повезаности G закључујемо да је $H = G$. $\square$

На неким местима у раду (глава 4 специфично) биће нам потребна другачија дефиниција Лијевих подгрупа.

Напомена: у некој литератури смештена Лијева подгрупа назива се затвореном Лијевом подгрупом (мотивисано теоремама 3.3. и 3.2.) или негде чак само Лијева подгрупа, док се потопљење Лијеве подгрупе, које ћемо сад дефинисати, називају Лијевим подгрупама.

Дефиниција 3.1.3. Лијева подгрупа H Лијеве групе G је подскуп $H \subset G$ који задовољава да је H подгрупа од G, као и да је H инјективна потопљена подмногострукост од G.

Подсетимо се из уводних појмова да, ако је H инјективна потопљена подмногострукост од G, то значи да постоји инјективно урањање $f : \tilde{H} \to G$, тако да је $H = f(\tilde{H})$.

Иако на први поглед изгледа да је инјективно урањање исто ствар као и смештање (што би значило да је потопљена Лијева подгрупа исто што и смештена Лијева подгрупа, тако да фактички нисмо морали да уводимо ову дефиницију) то заправо није увек тачно. смештање захтева да инверзно пресликавање буде непрекидно, док урањање то не захтева. Ово тврђење ће бити тачно ако је домен компактан, у супротном не мора да буде. Ово је аналогно томе што непрекидна бијекција није исто што и хомеоморфизам.

3.2 Дејство Лијевих група на многострукости

Дефиниција 3.2.1. Дејство Лијеве групе G на многострукост M је хомоморфизам $\rho : G \to \mathrm{Diff}\, M$, такав да је пресликавање:

$$G \times M \to M : (g, m) \to \rho(g).m$$

глатко пресликавање између многострукости $G \times M$ и M.

У овој дефиницији $\rho(g).m$ представља слику од m при дифеоморфизму $\rho(g)$. Наивним језиком, хоћемо некако да елементима Лијеве групе G придружимо трансформације многострукости M тако да се те трансформације понашају као група на исти начин као што се и G понаша.

Можда на први поглед изгледа вештачки, али у животу често срећемо дејство неке Лијеве групе на неку многострукост и самим тим је природно да то и проучавамо. У линеарној алгебри смо се већ сусретали са дејством неких група, тако да неке од следећих теорема неће бити апсолутно нове.

Дефиниција 3.2.2. Репрезентација Лијеве групе G представља векторски простор V, заједно са хомоморфизмом $\rho : G \to \mathrm{End}(M)$, такав да је пресликавање:

$$G \times V \to V : (g, v) \to \rho(g).v$$

глатко пресликавање између многострукости $G \times V$ и M.

Можемо приметити да репрезентација представља векторски простор заједно са дејством Лијеве групе над тим векторским простором.

Пример 2. Неколико примера дејстава Лијевих група

(1) Дејство групе $O(3, \mathbb{R})$ на $\mathbb{S}^2$ представља изометрије сфере у саму себе.

(2) Дејство групе $GL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$ представља инвертибилне линеарне трансформације векторског простора $\mathbb{R}^n$. Заједно са $\mathbb{R}^n$ оно представља репрезентацију од $GL(n, \mathbb{R})$.

(3) Дејство групе $SO(2, \mathbb{R})$ на $\mathbb{S}^1$ представља ротацију кружнице око центра. Приметимо да смо за исто дејство могли да пишемо и дејство S^1 на саму себе (пример 1.2).

Ради важних особина, дејство Лијеве групе на саму себе ћемо детаљније изучити у следећем поглављу.

Дефинишимо како деловање Лијеве групе G на многострукост M природно делује на тангентне просторе многострукости M.

Дефиниција 3.2.3. Нека Лијева група G делује на многострукост M, тада је $g_* : T_M M \to T_M M$ (где је $T_M M$ скуп свих тангентних простора над M) операција коју дефинишемо преко терминологије које смо користили у дефиницији тангентног вектора (дефиниција 2.0.12.):

Ако је γ крива преко које дефинишемо тангентни вектор a у тачки $x \in M$(дефиниција 2.0.12.), тада је $g_* a$ вектор који одговара криви:

$$r : (-1, 1) \to M, r(t) = g.\gamma(t)$$

(где је $g.$ деловање g на криву $\gamma(t)$) и хомеоморфизму f околине $U \subset M$ од a са Еуклидским простором:

$$f : U \to \mathbb{R}^n$$

Односно, $g_* a = (f \circ r)'(0)$.

Последица 3.3. Нека су $g, h \in G, a \in T_M M$, тада је: $g_*(h_* a) = (gh)_* a$.

Доказ. Нека је $\gamma(t)$ крива која дефинише a. Тада је крива која дефинише $(gh)_* a$ баш $(gh)\gamma(t)$. Но крива која дефинише $h_* a$ је $h\gamma(t)$, тако да је крива која дефинише $g_*(h_* a)$ исто $(gh)\gamma(t)$. Тако да су ова два тангентна вектора иста. □

Дејство Лијеве групе G на многострукост M на природан начин доводи до репрезентација G на разним векторским просторима које везујемо за M.

Пример 3.

(1) Репрезентација G на векторском простору глатких функција над M, које можемо да дефинишемо са:

$$\rho : G \to C^\infty(M) : g \in G, f \in C^\infty(M), m \in M, (\rho(g).f)(m) = f(g^{-1}m)$$

Где је $g^{-1}m$ дејство g^{-1} на m.
Заиста, овакво дефинисано пресликавање ρ је хоморфизам јер важи:

$$(\rho(a).(\rho(b).f))(m) = (\rho(b).f)(a^{-1}m) = f(b^{-1}a^{-1}m) = (\rho(ab).f)(m)$$

(2) Репрезентација G на векторском простору векторских поља над M (које смо дефинисали у 2. глави), које можемо да дефинишемо аналогно као под (1):

$$\rho : G \to \mathrm{Vect}(M) : g \in G, v \in Vect(M), m \in M, (\rho(g).v)(m) = g_*(v(g^{-1}m))$$

Где је

Ова операција нам омогућава да имамо дејство елемента Лијеве групе на тангентне вектроре многострукости које разматрамо.

3.3 Лево, десно и обострано дејство

Као што смо најавили, следи анализа неких од најважнијих дејстава Лијеве групе на саму себе.

Лево дејство $L_g : G \to G$ представља пресликавање $L_g(h) = gh$
Десно дејство $L_g : G \to G$ представља пресликавање $R_g(h) = hg^{-1}$
Обострано дејство $L_g : G \to G$ представља пресликавање $Ad_g(h) = ghg^{-1}$

Можемо приметити да важи $Ad_g(h) = L_g(h)R_g(h) = R_g(h)L_g(h)$.

Исто овако можемо дефинисати лево дејство на тангентне векторе.

$$L_{g*} : T_M M \to T_M M : v \in L_{g*}(a) = g_* a$$

Аналогно дефинишемо за десно и обострано дејство. Ради лакшег писања, за лево дејство над елементима групе ћемо користити ознаку $g.h$ а за лево дејство над векторима $g_* a$.

Дефиниција 3.3.1. Векторско поље $v \in \mathrm{Vect}(G)$ је лево-инваријантно ако $L_{g*}(v) = v$ за свако $g \in G$ и десно-инваријантно ако $R_g(v) = v$ за свако $g \in G$.

Теорема 3.4. Постоји изоморфизам између $T_1 G$ и векторског простора лево-инваријантних векторских поља над G (дефиниција 2.0.20.). Исто важи и за векторски простор десно-инваријантих векторских поља.

Доказ. Заиста, разматрајмо пресликавање $\phi : L_v \to T_1 G$ које дефинишемо са:

$$v \in L_v, v \to v(1)$$

Ово пресликавање слика лево-инваријантно векторско поље у вектор тог поља у јединици који очигледно припада $T_1 G$.

Довољно је да покажемо да за сваки вектор $a \in T_1 G$ постоји јединствено векторско поље v тако да $v(1) = a$. Заиста, дефинишимо то поље са: $v(g) = g_* a$. Остаје да проверимо да је овакво поље лево-инваријантно, односно да $g_* v(h) \in v$. Али, $g_* v(h) = g_*(h_* a) = (gh)_* a = v(gh) \in v$. Чињеница да је јединствено захтева да за свако a за свако g, $g_* a$ припада векторском пољу, што и јесте по конструкцији. $\square$

Последица 3.4. Приметимо да $Ad_g : G \to G$ чува јединицу, тако да има смисла дефинисати обострано дејство g на тангентни простор јединице $T_1 G$:

$$Ad_{g*} : T_1 G \to T_1 G, x \in T_1 G, x \to g_* x_* g^{-1},$$

где је g_* лево дејство са g, а $_* g^{-1}$ десно дејство са g^{-1}.

4

Лијева алгебра

У овом поглављу ћемо разматрати пресликавање које слика тангентни простор јединице неке Лијеве групе у ту Лијеву групу. Самим тим, добијамо повезаност ове две структуре. Надаље ћемо видети како нас то мотивише да дефинишемо појам који зовемо Лијева алгебра и какве све повезаности постоје између Лијевих алгебра и Лијевих група.

4.1 Есkпоненцијално пресликавање

Теорема 4.1. Нека је G Лијева група, $\mathfrak{g} = T_1 G$ и нека је $x \in \mathfrak{g}$. Тада постоји јединствени хомоморфизам $\gamma_x : (\mathbb{R}, +) \to G$ такав да је $\gamma_x'(0) = x$.

Извод у овој теореми је по параметру t домена хомоморфизма. Приметимо да је слична поставка дефиниције тангентног вектора, тако да бисмо могли да преформулишемо ову теорему да тврди да постоји јединствена крива, која је хомоморфизам, чији је тангентни вектор у нули баш једнак x.

Такође, приметимо да комутативност сабирања над $\mathbb{R}$, због хомоморфизма, повлачи да ће кодомен овог пресликавања бити Абелова група.

Доказ. Прво ћемо показати јединственост оваквог хомоморфизма. Нађимо $\gamma_x'(t)$. По дефиницији извода имамо:

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t)\gamma(h) - \gamma(t)\gamma(0)}{h}$$

$$= \gamma(t) \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h}$$

$$= \gamma(t)\gamma'(0),$$

где друга једнакост следи из чињенице да је γ хомоморфизам, док трећа једнакост следи из тога да за јако мало х $\gamma(t+h)$ и $\gamma(h)$ се налазе у околинама од $\gamma(t)$ односно $\gamma(0)$ за које можемо наћи хомеоморфизам са Еуклидским простором, тако да можемо да извршимо дистрибутивност и разлику.

Због претходно споменуте комутативности такође добијамо $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$. Ова формула нас подсећа на конструкцију лево-инваријантног векторског поља из теореме 3.4. Заиста, ако $\gamma'(t)$ посматрамо као тангентни вектор у $y = \gamma(t)$, важи: $v(y) = y_* v(1)$. Али како је ово поље јединствено одређено из теореме 3.4. тада је и γ јединствено и то баш интегрална крива овок векторског поља. Ово доказује јединственост.

За доказ постојања разматрајмо лево-инваријантно векторско поље v за које је $v(1) = x$. Нека је $\Phi^t : G \to G$ временска функција за векторско поље v која, наивним језиком, сваки елемент $g \in G$ слика у елемент од G у ком би се он нашао крећући се по вектроском пољу брзином вектора у тачки у којој се тренутно налази. Ову функцију правилно можемо да дефинишемо само за мало t (за које је $g(t)$ у Еуклидској околини) када важи $g(t) = g(0) + v(g(0)) * t$. Приметимо да нам лева-инваријантност од v узрокује леву-инваријантност временске функције: $\Phi^t(ab) = a\Phi^t(b)$.

Дефинишимо сада $\gamma(t) = \Phi^t(1)$. Тада је:

$$\gamma(t+s) = \Phi^{t+s}(1) = \Phi^t(\Phi^s(1)) = \Phi^t(\gamma(s).1) = \gamma(s).\Phi^t(1) = \gamma(s).\gamma(t)$$

$\gamma(t+s) = \gamma(s).\gamma(t)$ нам омогућва да γ дефиничемо за било које $t \in R$ и такође значи да γ заиста јесте хомоморфизам, који очигледно испуњава услове теореме. □

Последица 4.1. Приметимо одмах да нам јединственост овакве функције даје: $\gamma_{kx}(t) = \gamma_x(kt)$ за $\forall k \in \mathbb{R}$. Заиста, обе функције испуњавају услове теореме 4.1. и имају извод у нули једнак kx.

Дефиниција 4.1.1. Нека је G Лијева група, $\mathfrak{g} = T_1 G$. Дефинишемо пресликавање $\exp : \mathfrak{g} \to G$ са:

$$\exp(x) = \gamma_x(1),$$

где је $\gamma_x(1)$ хомоморфизам из теореме 4.1.

Ово пресликавање нам даје везу између тангентног простора јединице и Лијеве групе.

Последица 4.2. Из теореме 4.1. добијамо да за лево-инваријантно векторско поље v, такво да је $v(1) = x$, важи да је временска функција тог поља дата пресликавањем: $g \to g.\exp(tx)$.

Последица 4.3. Директно из последице 4.1. и дефиниције exp добијамо $\exp(tx) = \gamma_x(t)$.

Сада следи неколико особина овог пресликавања. У наредних пет теорема G је нека Лијева група, $\mathfrak{g}$ је тангентни простор у јединици од G и x је неки елемент од $\mathfrak{g}$.

Теорема 4.2. Постоји околина нуле $\mathfrak{u}$ у $\mathfrak{g}$ тако да за све $x \in \mathfrak{u}$ важи:

$$\exp(x) = 1 + x + ...$$

Доказ. У доказу теореме 4.1. већ смо користици идеју да за неку околину јединице U у G која је хомеоморфна Еуклидском простору важи: $\Phi^t(1) = 1 + v(1)t$, где је (као у доказу теореме 4.1.) $\Phi^t(1)$ временска функција која одговара лево-инваријантном векторском пољу за које је $v(1) = x$. Тада је: $\gamma_x(t) = 1 + xt \Rightarrow \gamma_x(1) = 1 + x$, односно $\exp(x) = 1 + x$. Приметимо да ово важи само за неку околину $\exp(x) \in U$, односно само зе неку околину нуле $\mathfrak{u}$ у $\mathfrak{g}$. □

Теорема 4.3. $\exp((t + s)x) = \exp(tx)\exp(sx)$

Доказ. Из дефиниције exp и особина хомоморфизма γ_x добијамо:

$$\exp((t+s)x) = \gamma_{(t+s)x}(1) = \gamma_x(t+s) = \gamma_x(t)\gamma_x(s) = \gamma_{tx}(1)\gamma_{st}(1) = \exp(tx)\exp(sx)$$

□

Теорема 4.4. Пресликавање exp представља дифеоморфизам између неке околине 1 у G са неком околином 0 у $\mathfrak{g}$. Инверз овог локалног пресликавања ћемо означавати са log.

Доказ. Постојање хомеоморфизма између околине 0 у $\mathfrak{g}$ и околине 1 у G је показано у теореми 4.2. Чињеница да постоји дифеоморфизам следи из примене теореме инверзне функције – за неку околину кодомена хомеоморфизма важи да је хомеоморфизам инвертабилан, односно да је дифеоморфизам. □

Дефиниција 4.1.2. Нека су G_1 и G_2 Лијеве групе и нека је φ хомоморфизам између њих. Дефинишемо морфизам $\varphi_* : T_1G_1 \to T_1G_2$ између одговарајућих тангентних простора јединице на следећи начин: за $x \in T_1G_1$, нека је $\gamma(t)$ крива која дефинише x (дефиниција 2.0.12), онда дефинишемо да је $\varphi(\gamma(t))$ крива којом дефинишемо $\varphi_*(x)$ преко дефиниције 2.0.12.

Теорема 4.5. Нека су G_1 и G_2 Лијеве групе и нека је φ хомоморфизам између њих. Ако $x \in \mathfrak{g}_1$ тада $\exp(\varphi_* x) = \varphi.\exp(x)$

Доказ. Из теореме 4.1. видимо да постоји јединствени хомоморфизам $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to G_2$ такав да је $\gamma'(0) = \varphi_* x$. Са једне стране, $\exp(t\varphi_* x)$ ово очигледно задовољава. С друге стране, пошто је $\exp(tx)$ крива која дефинише x, онда из дефиниције 4.1.2. имамо да је тангентни вектор за $t = 0$ од $\varphi(\exp(tx))$ баш $\varphi_* x$. Стога су $\exp(t\varphi_* x)$ и $\varphi(\exp(tx))$ исте криве у G_2, па је свакако $\exp(\varphi_* x) = \varphi . \exp(x)$. □

Теорема 4.6. Нека је G Лијева група. За било које $X \in G, y \in \mathfrak{g}$, важи: $Ad_X(\exp(y)) = \exp(Ad_{X*}(y))$, где смо Ad_{X*} дефинисали у последици 3.4.

Доказ. Довољно је да приметимо да је Ad_X ендоморфизам, тако да можемо да применимо теорему 4.5. из чега следи тврђење. □

Последица 4.4. Нека су G_1, G_2 повезане Лијеве групе. Тада је било који моргизам $\varphi : G_1 \to G_2$ јединствено одређен морфизмом тангентних простора у јединици $\varphi_* : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$.

Доказ. Теорема 3.4 нам даје да φ_* јединствено одређује φ за неку околину јединице у G_1. Заиста, ако се $x \in \mathfrak{g}_1$ слика у $y \in \mathfrak{g}_2$ значи да се $\exp(x) \in G_1$ слика у $\exp(y) \in G_2$. Из последице 3.1. видимо да околина јединице генерише целу групу ако је она повезана, тако да добијамо да је φ јединствено одређено за цео домен G_1. □

Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 4.7. Нека је $m : G_1 \to G_2$ хомоморфизам повезаних Лијевих група, тако да је G_2 просто повезано. Ако је $f_* : T_1 G_1 \to T_1 G_2$ изоморфизам, тада је и f изоморфизам.

4.2 Комутатор

Из теореме 3.4. видимо повезаност између $\mathfrak{g}$ и G. Можемо да приметимо је да је смислено да множење у G допринесе некој операцији у $\mathfrak{g}$. Заиста, на основу теореме 3.4. за $a, b \in \mathfrak{g}$ довољно блиске нули, можемо да пишемо:

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(\mu(a, b).$$

Односно $\mu(a, b)$ ће нам бити операција која одговара множењу у G при дифеоморфизму из теореме 3.4.

Теорема 4.8. При Тејлоровом развоју функције μ на чланове степена ≤ 2 добијамо:

$$\mu(a, b) = a + b + \frac{1}{2}[a, b] + ...$$

где је $[a, b]$ билинеарно кососиметрично пресликавање, а ... одговара пресликавањима у Тејлоровом развоју степена већег од 2. Билинеарност подразумева да важе следеће две једнакости за свако x, y, z из домена и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z],$$

$$[z, \alpha x + \beta y] = \alpha[z, x] + \beta[z, x].$$

Кососиметричност пресликавања значи да за свако x из домена важи $[x, x] = 0$.

Доказ. Глатка пресликавања могу да се прикажу у форми

$$\mu(a, b) = L(a) + L(b) + K(a) + K(b) + J(a, b)...$$

где су L линеарна пресликавања, K квадратна пресликавања и J билинеарна, а ... одговара пресликавањима вишег степена.

Из $\mu(a, 0) = a$ закључујемо да важи $K(a) = 0$ и $L(a) = a$. Аналогно из $\mu(0, b) = b$ закључујемо да важи $K(b) = 0$ и $L(b) = b$.

Из теореме 3.3. имамо $\exp(2x) = \exp(x)\exp(x)$, тако да важи:$\mu(a, a) = 2a$ одакле добијамо $J(a, a) = 0$. Али то значи да је $J(a, b)$ кососиметрично билинеарно пресликавање. □

Дефиниција 4.2.1. Операцију $[,]$ називамо комутатором.

Лема 4.1. Билинеарна кососиметрична пресликавања $[,]$ задовољавају $[x, y] = -[y, x]$.

Доказ. Пошто важи $[x, x] = 0$, за све x из домена, важи и $[x + y, x + y] = 0$. Из билинеарности имамо да је

$$[x + y, x + y] = [x, x + y] + [y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y]$$

али $[x, x] = 0$ и $[y, y] = 0$, тако да добијамо

$$0 = [x, y] + [y, x],$$

из чега следи $[x, y] = -[y, x]$. □

Лема 4.2. Билинеарна кососиметрична пресликавања такође задовољавају $[x, -y] = -[x, y]$.

Доказ.

$$[x, -y] + [x, y] = [x, y - y] = [x, 0],$$

али $[x, 0] = [x, 0] + [x, 0]$, тако да је $[x, 0] = 0$. Стога важи $[x, -y] = -[x, y]$ □

Теорема 4.9. Нека је $\varphi : G_1 \to G_2$ хомоморфизам Лијевих група где је G_1 повезано, а φ_* морфизам одговарајућих тангентних простора. Тада φ_* чува комутатор, наиме:

$$\varphi_*[x,y] = [\varphi_* x, \varphi_* y]$$

за свако $x, y \in \mathfrak{g}_1$.

Доказ. Из теореме 4.5. имамо:

$$\exp(\varphi_* x) = \varphi(\exp(x)) \wedge \exp(\varphi_* y) = \varphi(\exp(y)),$$

одакле добијамо:

$$\varphi(\exp(x))\varphi(\exp(y)) = \exp(\varphi_* x)\exp(\varphi_* y).$$

Из особина хомоморфизма φ закључујемо:

$$\varphi(\exp(x)\exp(y)) = \exp(\varphi_* x)\exp(\varphi_* y).$$

По дефиницији комутатора важи:

$$\varphi(\exp(x + y + \frac{1}{2}[x,y] + ...)) = \exp(\varphi_* x + \varphi_* y + \frac{1}{2}[\varphi_* x, \varphi_* y] + ...)$$

$$\Rightarrow \exp(\varphi_*(x + y + \frac{1}{2}[x,y] + ...)) = \exp(\varphi_* x + \varphi_* y + \frac{1}{2}[\varphi_* x, \varphi_* y] + ...),$$

међутим, из теореме 4.4. имамо да је exp инјективно за околину нуле, тако да добијамо:

$$\varphi_* x + \varphi_* y + \varphi_*(\frac{1}{2}[x,y]) + ... = \varphi_* x + \varphi_* y + \frac{1}{2}[\varphi_* x, \varphi_* y] + ...$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\varphi_*[x,y] + ... = \frac{1}{2}[\varphi_* x, \varphi_* y] + ...$$

$$\Rightarrow \varphi_*[x,y] = [\varphi_* x, \varphi_* y]$$

□

Последица 4.5. Обострано дејство очувава комутатор:

$$Ad_{g*}[x,y] = [Ad_{g*}x, Ad_{g*}, y]$$

Ово је тачно за било које $g \in G$, јер је Ad_{g*} ендоморфизам.

Теорема 4.10. За $x, y \in \mathfrak{g}$, тангентног простора јединице Лијеве алгебре, важи следеће:

$$\exp(x)\exp(y)\exp(-x)\exp(-y) = \exp([x, y] + ...)$$

Доказ. Применом дефиниције комутатора, чувањем чланова степена ≤ 2 добијамо:

$$\exp(x)\exp(y)\exp(-x)\exp(-y) = \exp(x+y+\frac{1}{2}[x,y]+...)\exp(-x+(-y)+\frac{1}{2}[-x,-y]+...)$$

$$= \exp(x+y+-x+(-y)+\frac{1}{2}[x,y]+\frac{1}{2}[-x,-y]+[x+y+...,-x+(-y)+...]+...)$$

$$= \exp(\frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{2}[-x,-y] + [x+y+...,-(x+y)+...] + ...)$$

$$= \exp(\frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{2}[-x,-y] + ...)$$

Но, из билинеарности:

$$[-x,-y] = -[-x,y] = [x,y]$$

$$= \exp(\frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{2}[-y,-x] + [x+y+...,-(x+y)+...] + ...)$$

$$= \exp(\frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{2}[-y,-x] + ...)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{2}[-y,-x] = 0$$

Али из леме 4.2. $[-y,-x] = -[-x,-y]$

$$\Rightarrow \exp(x)\exp(y)\exp(-x)\exp(-y) = \exp([x,y] + ...).$$

$\square$

Теорема 4.11. Комутатор из дефиниције 4.2.1. такође испуњава Јакобијев индентитет - за $x, y, z \in T_1G$ важи:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Доказ овог тврђења нећемо наводити.

Занимљиво је да знамо како изгледају и чланови већег степена у Тејлоровој експанзији. Наиме, важи следећа теорема, чији доказ такође нећемо наводити.

Теорема 4.12. Ако користимо терминологију из дефиниције комутатора, односно ако важи $\exp(x)\exp(y) = \exp(\mu(x,y))$, тада Тејлоров развој за $(x,y) \to (0,0)$ на чланова степена ≤ 4 гласи:

$$\mu(x,y) = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}[x,[x,y]] + \frac{1}{12}[y,[y,x]] + \frac{1}{24}[y,[x,[y,x]] + ...,$$

где ... означава степене у Тејлоровом развоју степена већег од 4.

Приметимо да нам Јакобијев индентитет даје $[y,[x,[y,x]]] = [x,[y,[y,x]]]$. Заиста, важи:

$$[y,[x,[y,x]]] + [x,[[y,x],y]] + [[y,x],[y,x]] = 0.$$

Али $[[y,x],[y,x]] = 0$ и $[x,[[y,x],y]] = [x,-[y,[y,x]]] = -[x,[y,[y,x]]]$, из чега закључујемо:

$$[y,[x,[y,x]]] = [x,[y,[y,x]]]$$

Сада можемо да дефинишемо ста је реална Лијева алгебра.

Дефиниција 4.2.2. Реална Лијева алгебра је векторски простор $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ са билинеарном операцијом $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, која је кососиметрична и задовољава Јакобијев индентитет.

Приметимо да тангентни простор јединице (T_1G) са комутатором из дефиниције 4.2.1. очигледно испуњава услове реалне Лијеве алгебре. Стога наводимо следећу теорему.

Теорема 4.13. Нека је G Лијева група. Тангентни простор у јединици T_1G са операцијом комутатора има структуру реалне Лијеве алгебре; ову Лијеву алгебру Лијеве групе G можемо означавати са $Lie(G)$.

Дефиниција 4.2.3. Нека је $\mathfrak{g}$ Лијева алгебра. Подпростор $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ је Лијева подалгебра од $\mathfrak{g}$ ако је затворена у односу на комутатор:

$$\forall x, y \in \mathfrak{h}, [x,y] \in \mathfrak{h}$$

Теорема 4.14. Ако је H Лијева подгрупа Лијеве групе G са Лијевом алгебром $\mathfrak{g}$, тада је $\mathfrak{h} = T_1H$ Лијева подалгебра од $\mathfrak{g}$.

Доказ. Треба да покажемо затвореност у односу на комутатор. Приметимо да за $x, y \in \mathfrak{h}$ важи да $\exp(xt), \exp(yt) \in H$. Заиста, $\exp(xt)$ је подгрупа која је свакако генерисана неком околином јединице која припада H (јер та околина дефинише x). Онда и $\exp(xt)\exp(yt) \in H$, односно $\exp(\mu(x,y)t) \in H$. Али то значи да тангентни вектор за $t = 0$ припада $\mathfrak{h}$, односно $\mu(x,y) \in \mathfrak{h}$, али самим тим $[x,y] \in \mathfrak{h}$, јер је $\mathfrak{h}$ векторски простор. $\square$

5

Основне теореме Лијеве теорије

5.1 Основне теореме Лијеве теорије

До сада смо показали да хомоморфизам Лијевих група $\varphi : G_1 \to G_2$ дефинише хомоморфизам Лијевих алгебра $\varphi_* : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, као и да је за повезано G_1, пресликавање између ових хомоморфизама инјективно:

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) : \varphi \mapsto \varphi_*$$

Овде и надаље $\mathrm{Hom}(A, B)$ означава скуп хомоморфизама између A и B.

Надаље користимо стандардне ознаке које смо до сада користили без посебног наговештаја дефиниције.

Следеће три теореме зовемо основним теоремама Лијеве теорије.

Теорема 5.1. Ако је G_1 повезана и просто повезана Лијева група, тада постоји бијекција између скупа хомоморфизама $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ и скупа хомоморфизама $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$.

Теорема 5.2. Постоји бијекција између повезаних потопљених Лијевих подгрупа $H \subset G$ и подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Та бијекција је дата са $\mathfrak{h} = T_1 H$.

Теорема 5.3. За сваку коначно димензионалну Лијеву алгебру постоји Лијева група са том Лијевом алгебром.

Да бисмо показали ове теореме прво треба да приметимо неке особине које поседују Лијеве подгрупе. Затим ћемо показати да теорема 5.2. имплицира теорему 5.1. Потом ћемо доказати теорему 5.2. Нажалост, теорему 5.3. нећемо доказивати јер је доказ крајње напредан и компликован.

Покажимо сада да теорема 5.2. имплицира теорему 5.1.

Доказ да теорема 5.2. имплицира теорему 5.1. Треба да покажемо да постоји бијекција између $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ и $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$. Но, ми смо већ показали да је пресликавање $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \mapsto \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ инјективно, тако да нам остаје да покажемо да је и сурјективно, односно да за сваки хомоморфизам Лијевих алгебра $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ постоји хомоморфизам Лијевих група $\varphi : G_1 \to G_2$ тако да је $\varphi_* = f$.

Нека је $G = G_1 \times G_2$. Приметимо да је ово Лијева група. Заиста, множење елемената G се понаша као одвојено множење прве координате (елемента G_1) и одвојено множење друге координате (елемента G_2), а чињеница да G остаје многострукост следи из тога да околина неког елемента (g_1, g_2) у G која је хомеоморфна Еуклидском простору одговара околини (U_1, U_2), где су U_1 и U_2 околине од g_1, g_2 редом. Ако је U_1 хомеоморфно са $\mathbb{R}^{n_1}$, а U_2 хомеоморфно са $\mathbb{R}^{n_2}$, тада је (U_1, U_2) хомеоморфно са $(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2})$ односно са $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

Тада је $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ Лијева алгебра од G. Аналогно као у разматрању за добру дефинисаност G као Лијеве групе видимо да $\mathfrak{g}$ има структуру тангентног простора у јединици од G. У овом случају, комутатор је дефинисан тако да за $x, x' \in \mathfrak{g}_1$ и $y, y' \in \mathfrak{g}_2$ важи:

$$[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [y, y']).$$

Оваква дефиниција комутатора је очекивана, јер се особине наслеђују због независности координата.

Нека је $\mathfrak{h} = \{(x, f(x)) | x \in \mathfrak{g}_1\}$. Приметимо да је ово подалгебра. Заиста, свакако је $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, док чињеница да важи затвореност у односу на комутатор следи из тога што важи:

$$[(x, f(x)), (y, f(y))] = ([x, y], [f(x), f(y)]) = ([x, y], f([x, y]))$$

где друга једнакост следи из тога што смо f дефинисали као хомоморфизам Лијевих алгебра.

Теорема 5.2. нам даје да постоји повезана Лијева подгрупа која одговара овој Лијевој алгебри, односно постоји идентитетско урањање $z : \tilde{H} \to G$. Правећи композицију између овог урањања и пројекције $\pi_1 : G \to G_1$ добијамо хомоморфизам Лијевих група $p : H \to G_1$ (ово је хомоморфизам јер је композиција два хомоморфизма. Онда је $p_* : Lie(H) \to \mathfrak{g}_1$ хомоморфизам Лијевих алгебра.

Постоји очигледна бијективност између $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}_1$ која одговара пројекцији π_{1*}. Такође, приметимо да из инјективности z потиче инјективност z_*.

Пошто су z_* и π_{1*} инјективни, тада је и $p_* = \pi_{1*} \circ z_*$ инјективно, односно p_* је изоморфизам. Применимо сад теорему 4.7, из које добијамо да је p изоморфизам.

Сада постоји инверзан хомоморфизам $p^{-1} : G_1 \to H$. Конструишимо сада хомоморфизам $\varphi : G_1 \to G_2$ тако што узимамо композицију $\varphi = \pi_2 \circ p^{-1}$ које слика $\varphi : G_1 \to H \to G \to G_2$, где је π_2 пројекција по G_2 од G.

Приметимо да $\varphi_* : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ тада слика $x \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x)$, што смо и желели.

Овако смо успесно нашли φ, тако да је $\varphi_* = f$. □

Следи доказ теореме 5.2.

Доказ. Доказ ове теореме ће захтевати напредније ствари из диференцијалне геометрије које нећемо доказивати. Прво ћемо дефинисати пар појмова из диференцијалне геометрије које ћемо користити.

Дефиниција 5.1.1. Кажемо да је D k-димензионална дистрибуција на многострукости M ако задовољава $D \subset T_M M$ (где је $T_M M$ скуп свих тангентних простора над M) и за свако $p \in M$ важи да имамо k-димензионални потпростор $D_p \subset T_p M$, који глатко зависи од p.

За векторско поље v кажемо да $v \in D$ ако и само ако за свако $p \in M$ важи $v(p) \in D_p$.

Дефиниција 5.1.2. Интегрална многострукост за k-димензионалну дистрибуцију је k-димензионална подмногострукост $X \subset M$, тако да за свако $p \in X$ имамо $T_p X = Dp$. Приметимо да је ово генерализација интегралне криве, која је случај за $k = 1$.

Дефиниција 5.1.3. Кажемо да је дистрибуција D комплетно интеграбилна ако за свако $p \in M$ локално постоји интегрална многострукост која садржи p.

Следећа теорема нам даје довољан и потребан услов да би нека дистрибуција била комплетно интеграбилна.

Теорема 5.4. (Фробенијусов критеријум интеграбилности) Дистрибуција D многострукости M је комплетно интеграбилна ако и само ако за свака два векторска поља $\eta, \zeta \in D$ важи $[\eta, \zeta] \in D$.

Као што смо видели из дефиниције комплетне интеграбилности, то нам даје постојање интегралне многострукости у околини изабране тачке.

Теорема 5.5. Нека је D комплетно интегрална дистрибуција на M. Тада за свако $p \in M$ постоји јединствена повезана потопљена интегрална подмногострукост $N \subset M$ дистрибуције D која садржи p и максимална је (садржи све остале потопљене интегралне подмногострукости које садрже p).

Да бисмо доказали теорему 5.2. треба да за изабрану Лијеву групу G конструишемо потопљену подгрупу H од G која одговара подалгебри $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Приметимо да бисмо за такво H имали да за свако $p \in H$ важи $T_pH = (T_1H)p = \mathfrak{h}.p$. То значи да ако дефинишемо дистрибуцију $D^{\mathfrak{h}}$ која одговара подалгебри $\mathfrak{h}$ као $D^{\mathfrak{h}}_p = \mathfrak{h}.p$. Имајући ово на уму, можемо да конструишемо H.

Лема 5.1. Нека је G Лијева група. Тада за свако $g \in G$ постоји локална интегрална подмногострукост која одговара дистрибуцији $D^{\mathfrak{h}}$, тако да садржи g.

Доказ ове леме такође захтева технике диференцијалне геометрије, тако да га нећемо приказивати овде, већ заинтересованог читаоца упућујемо на литературу.

Да бисмо завршили доказ остаје нам да конструишемо H као максималну повезану потопљену интегралну подмногострукост која садржи 1 и одговара дистрибуцији $D^{\mathfrak{h}}$. Остаје нам да покажемо да ово заиста јесте подгрупа.

Приметимо да за свако $p \in H$ имамо да десно дејство са p на G шаље интегралне многострукости у интегралне многострукости, специфично шаље H у Hp, па је Hp интегрална подмногострукост за $D^{\mathfrak{h}}$ која садржи p. Али, H такође садржи p, тако да добијамо $Hp = H$, односно H је подгрупа. $\square$

6

Закључак

У овом раду смо прешли преко неких основних теорема Лијеве теорије. Дефинисали смо шта су Лијеве групе и Лијеве алгебре; дефинисали смо експоненцијално пресликавање између Лијевих алгебра и Лијевих група, као и операцију комутатор; такође смо показали основне теореме које повезују Лијеве групе и Лијеве алгребре.

Даљи рад би се бавио детаљнијим проучавањем структура Лијевих алгебра и њихових репрезентација, а нарочито простим и полупростим Лијевим алгебрама. Заинтересоване читаоце упућујем на литературу која се може наћи при крају овог рада.

Потковани овим знањем, можемо добити разне битне резултате из физике. Ту бих издвојио, да можемо да решимо Шредингерову једначину за водоников атом користећи Лијеву теорију. На тај начин добијамо податке о таласној једначини електрона у водониковом атому користећи само математички алат.

За крај, желео бих да се захвалим свим професорима математике и физике који су ми предавали током мог школовања. Ваши часови су ми улили љубав према овим наукама и приближили ми њихову лепоту.

За крај, желео бих да се захвалим свом ментору и професору менторске анализе и алгебре протекле четири године – Луки Милићевићу. Хвала на помоћи око овог рада, али пре свега хвала на томе што сте ми приказали лепоту и уметност математике за коју нисам знао да постоји. Током протекле четири године сам заволео апстрактност математике и њену вечну истинистост, како због Ваших часова и додатниш, тако и због литературе на коју сте ми указали, па и филозофских разговора са Вама и Теодором, коју овом приликом исто поздрављам пун захвалности. Хвала на подршци!

Додатак А

Додатак А

A.1 Неке основне теореме диференцијалне геометрије

Теорема A.1. (Теорема о инверзној функцији за многострукости) Нека је $f : M \to N$ глатко пресликавање између глатких многострукости. Нека је $p \in M$ прозивољан елемент M. Ако је $f_{p*} : T_pM \to T_{f(p)}N$ изоморфизам, тада постоји околина U од p, тако да је $f(U)$ околина од $f(p)$ и $f : U \to f(U)$ је дифеоморфизам.

Нећемо наводити цео доказ ове теореме, зато што се базира на методама диференцијалне геометрије. Међутим, показаћемо како ова теорема следи из теореме инверзне функције за глатка пресликавања у $\mathbb{R}^n$. Тврђење ове теореме је специјалан случај теореме инверзне функције за многострукости, када за многострукости M и N узмемо $\mathbb{R}^n$.

Теорема A.2. (Теорема о инверзној функцији за $\mathbb{R}^n$) Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ глатко пресликавање. Нека је $p \in \mathbb{R}^n$ произвољан елемент $\mathbb{R}^n$. Ако је $f_{p*} : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n$ изоморфизам, тада постоји околина U од p, тако да је $f(U)$ околина од $f(p)$ и $f : U \to f(U)$ је дифеоморфизам.

Покажимо да теорема A.2. имплицира теорему A.1.

Доказ. Приметимо да M и N имају исту димензију због изоморфизма тангентних простора. Нека је та димензија $n \in \mathbb{N}$. Узмимо карте: (U, φ) за p и (V, τ) за $f(p)$. Ово значи да постоје хомеоморфизми φ, τ који сликају околине U, V од $p, f(p)$ у Еуклидски простор $\mathbb{R}^n$. Очигледно можемо да извршимо овакав одабир тако да важи $f(U) \subset V$.

Нека је $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \alpha = \tau \circ f \circ \varphi^{-1}$. Тада је $\alpha_{\varphi(p)*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где је $\alpha_{\varphi(p)*}(\varphi_*(x_p)) = \tau_* \circ f_* \circ \varphi_*^{-1}(\varphi_*(x_p))$, за неки тангентни вектор x_p у p. Приметимо да је онда $\alpha_{\varphi(p)*}$ изоморфизам зато што су φ_*, f_*, τ_* изоморфизми.

Применимо сад теорију инверзне функције за $\mathbb{R}^n$. То значи да постоји околина W од $\varphi(p)$ тако да је $\alpha(W)$ околина од $\alpha(\varphi(p))$ и $alpha : W \to \alpha(W)$ је дифеоморфизам. Приметимо да можемо да изаберемо W тако да је $W \subset \varphi(U)$.

Онда је $f = \tau^{-1} \circ \alpha \circ \varphi$ дифеоморфизам за $f : \varphi^{-1}(W) \to \tau^{-1}(\alpha(W))$, где важи да су $\varphi^{-1}(W)$ и $\tau^{-1}(\alpha(W))$ редом околине од p и $f(p)$. $\square$

Теорема А.3. Ако је N потопљена подмногострукост од M, тада је N локално затворено. Другим речима, свако $x \in N$ има околину $V \subset M$ тако да је N затворено у V.

Литература

[Мат] A. Kirilov, *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, Stoony Brook $https://www.math.stonybrook.edu/\ kirillov/liegroups/liegroups.pdf$ $https://www.math.stonybrook.edu/\ kirillov/mat552/liegroups.pdf$

[Мат] J.J. Duistermath, *Lie Groups*, Springer Univerisitext

[Мат] M.A.Armstrong, *Basic Topology*, Springer

[Мат] E.B.Vinberg, *Graduate Studies in Mathematics 56*, American Mathematical Society

[Мат] Frank W. Warner , *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag

[Мат] Nathan Jacobson , *Lie Algebras*, Dover Publications

[Мат] John Stillwell, *Naive Lie Theory*, Springer

[Мат] Daniel Litt, *Closed Subgroups of Lie Groups and Lie Subgroups*, University of Columbia

[Мат] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*