Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

- из математике -

Бертрандов постулат

Ментор: др Соња Чукић
Ученик: Јован Торомановић, IVд

Београд, јун 2020.

Садржај

Увод

Прости бројеви расподељени су веома неравномерно. Са једне стране, можемо пронаћи произвољно дугачак низ узастопних природних бројева међу којима нема ниједног простог броја. Један такав низ је:

$$N! + 2, N! + 3, ..., N! + N.$$

С друге стране постоји много парова простих бројева који се разликују за 2 (њих називамо простим бројевима-близанцима) на пример (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (41,43) и други. Познати су примери веома великих простих бројева-близанаца; последњи рекорд је:

$$2003663613 * 2^{195000} \pm 1$$

(погледати www.primes.utm.edu).

Дефиниција 1.

Нека је x природан број, а сумирамо по скупу простих бројева. Тада се функција

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \quad x > 0,$$

назива функција расподеле простих бројева.

Другим речима, $\pi(x)$ је број простих бројева p који нису већи од заданог $x > 0$. Изучавање асимптотског понашања функције $\pi(x)$ је најважнији проблем теорије бројева.

Први корак ка решењу тог проблема начинио је Еуклид. Он је принципом контрадикције показао да има бесконачно много простих бројева.

Наиме, ако претпоставимо да има само коначно много простих бројева и означимо их са $p_1, p_2, ..., p_k$ за неко коначно k, тада број $p_1 p_2 ... p_k + 1$ није дељив ни са једним од бројева $p_1, p_2, ..., p_k$ што значи да је унаточ претпоставци и он прост. Ову теорему о бесконачном броју простих бројева можемо записати и као

$$\pi(x) \to \infty, \quad x \to \infty.$$

Леонард Ојлер (1707-1783) исказао је следећу претпоставку: заступљеност простих бројева међу бројевима мањим од n постаје произвољно мала са повећавањем броја n, односно

$$\frac{\pi(x)}{x} \to 0, \quad x \to \infty.$$

Ову теорему је доказао А. Лежандр (1752-1833). Он је такође, користећи се таблицом простих бројева, емпиријски установио приближну формулу

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - B}, \quad B = 1,08366.$$

К.Ф.Гаус (1777-1855) је утврдио да је прецизнија формула

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Први строго формални резултат у изучавању расподеле простих бројева повезан је са именом руског научника Пафнутија Лвовича Чебишова (1821-1894), који је потпуно елементарним методама објаснио стварни поредак раста функције $\pi(x)$, наиме показао је постојање неких позитивних константи a и b таквих да су за све $x \geq 2$ испуњене неједнакости

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x}.$$

1845. године француски математичар Жозеф Бертранд (1822-1900), анализирајући таблицу простих бројева мањих од 3000000 у вези са својим радом из теорије група, исказао је претпоставку, од тада познату као

Бертрандов постулат.

Нека је $n \geq 4$, природан број. Тада се у интервалу $(n, 2n-2]$ налази барем један прост број.

Ускоро затим, 1850. године, постулат је доказао Чебишов у свом познатом раду *О простим бројевима.*

Доказ Чебишовљевих оцена

Почетна тврђења

Да бисмо показали Чебишовљеве оцене и Бертрандов постулат потребна су нам нека помоћна тврђења и докази.

При реалном $x > 0$, нека су са p означени елементи скупа простих бројева, а са $[t]$, нека је означен највећи цео број који није већи од t. Посматрајмо функције Чебишова

$$\theta(x) := \sum_{p \le x} \ln p,$$

$$\psi(x) := \sum_{p^\alpha \le x} \ln p = \sum_{p \le x} [\log_p x] \ln p = \sum_{p \le x} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p.$$

Уведимо такође

$$T(x) := \sum_{k \le x} \ln k.$$

где су са k означени елементи из скупа природних бројева.

Потребна су нам и следећа тврђења:

Тврђење 1

Нека су са p означени прости бројеви, а са α природни. Са $\nu_p(r)$ означимо степен простог броја p такав да $p^{\nu_p(r)} | r$ и $p^{\nu_p(r)+1} \nmid r$. Тада за сваки природан број n важи

$$\ln n! = \sum_{p \le n} \sum_{\alpha \ge 1} \nu_p(n!) \ln p.$$

То доказујемо уз помоћ следећих познатих формула

$$(*) \quad n! = \prod_{p \le n} p^{\nu_p(n!)}, \quad (**) \quad \nu_p(n!) = \sum_{\alpha \ge 1} \left[\frac{n}{p^\alpha} \right].$$

Логаритмовањем прве једнакости добијамо

$$\ln n! = \sum_{p\le n} \nu_p(n!) \ln p = \sum_{p\le n}\sum_{\alpha\ge 1}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]\ln p.$$

(Прву смо једнакост добили логаритмовањем (*), а другу заменом из (**))

Тврђење 2

Нека је n природан број, а p су елементи скупа простих бројева. Тада важи да је

$$\ln \text{НЗС}(1,2,...,n) = \sum_{p\le n}\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]\ln p.$$

Ово тврђење директно следи логаритмовањем следећег израза

$$\text{НЗС}(1,2,...,n) = \prod_{p\le n} p^{\nu_p(\text{НЗС}(1,2,...,n))}.$$

(Ова формула следи из посматрања дељивости обе стране простим бројевима p, не већим од n)

При чему је

$$\nu_p(\text{НЗС}(1,2,...,n)) = [\log_p n] = \left[\frac{\ln n}{\ln p}\right].$$

Из тврђења 1 следи

$$T(x) = T([x]) = \ln([x]!) = \sum_{p\le[x]}\sum_{\alpha\ge 1}\left[\frac{[x]}{p^\alpha}\right]\ln p = \sum_{p\le x}\sum_{\alpha\ge 1}\left[\frac{x}{p^\alpha}\right]\ln p.$$

Из тврђења 2 и пошто је $[\log_p[x]] = [\log_p x]$ следи

$$\psi(x) = \psi([x]) = \ln \text{НЗС}(1,2...,[x]).$$

Такође, важе неједнакости

Тврђење 3.

Нека је x позитиван реалан број. Онда важи

$$\theta(x) \le \psi(x) \le \sum_{p\le x}\ln x = \pi(x)\ln x.$$

Неједнакост $\psi(x) \leq \sum_{p\leq x} \ln x$ није толико очигледна, извођење је чисто рачунско и изгледа овако:

$$\text{За } p > 5 \text{ имамо } \log_p x < \ln x$$

$$\text{Такође важи и } \log_2 x + \log_3 x + \log_5 x < 3\ln x.$$

Ово доказујемо множењем са $\log_x e$, чиме се неједнакост своди на

$$\log_2 e + \log_3 e + \log_5 e < 3$$

што се директном провером потврђује.

У даљем излагању важна ће нам бити аритметичка својства централног биномног коефицијента

$$N = N(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} = e^{\ln(2n)! - 2\ln n!} = e^{T(2n)-2T(n)}.$$

Означимо такође

$$K = K(n) = \text{НЗС}(1, 2, ..., 2n) = e^{\psi(2n)}.$$

Лема 1.
Број $K(n)$ је дељив са $N(n)$, за сваки природан број n.

ДОКАЗ. Нека је p произвољан делилац броја N. Очито је $p \leq 2n$. Означимо $m_p = \nu_p(K)$. Јасно је да важи

$$p^{m_p} \leq 2n, \quad p^{m_p+1} > 2n.$$

Сада имамо

$$\nu_p(N) = \sum_{\alpha\geq 1} \left(\left[\frac{2n}{p^\alpha}\right] - 2\left[\frac{n}{p^\alpha}\right] \right).$$

За произвољно x разлика $[2x] - 2[x]$ може бити или 0 или 1, па важи

$$\nu_p(N) \leq \sum_{\alpha=1}^{m_p} 1 = m_p = \nu_p(K).$$

Будући да смо одабрали произвољно p, следи да је K дељиво са N. Из ове дељивости закључујемо да је $K \geq N$, односно

$$\psi(2n) \geq T(2n) - 2T(n).$$

Ову ћемо неједнакост даље и користити.

Лема 2.
За природан број $n \geq 3$ важи неједнакост $N = N(n) > 2^{n+1}$.

ДОКАЗ. Ова неједнакост је груба, али је и довољна за доказивање доње оцене за $\pi(x)$. Доказујемо индукцијом по $n \geq 3$.

$$\text{База } n = 3, N = \binom{6}{3} = 20 > 2^{3+1}.$$

Индукцијски корак:

$$\frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2} = \frac{(2k)!}{k!^2}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} > 2^{k+1}\frac{4k+2}{k+1} > 2^{k+2}.$$

Приметно је по индукцијском кораку да би се могло доказати и нешто јаче тврђење. Простом индукцијом по $n \geq 2$ се може показати и неједнакост

$$N > \frac{4^n}{\sqrt{4n}}.$$

База $n = 2$

$$\binom{4}{2} > \frac{4^2}{\sqrt{8}} \text{ што се своди на } 6 > 4\sqrt{2}.$$

Индукцијски корак

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} > \frac{4^n}{\sqrt{4n}}\frac{4n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{4^{n+1}}{\sqrt{4(n+1)}}\frac{\sqrt{4(n+1)}}{4\sqrt{4n}}\frac{4n+2}{n+1} = \frac{4^{n+1}}{\sqrt{4(n+1)}}\frac{2n+1}{\sqrt{4n(n+1)}} =$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{4n(n+1)}}\frac{4^{n+1}}{\sqrt{4(n+1)}} > \frac{4^{n+1}}{\sqrt{4(n+1)}}$$

Ова неједнакост ће нам требати при доказивању Бертрандовог постулата. Уопште, ако је $c > \pi$ константа, то почев од неког $n > n_0(c)$ увек важи неједнакост

$$N > \frac{4^n}{\sqrt{cn}}.$$

С друге стране, за $n \geq 1$ важи и неједнакост

$$N < \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Због свега тога низ

$$x_n = \frac{\binom{2n}{n}\sqrt{n}}{4^n}$$

строго расте и тежи $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; последње тврђење је еквивалентно формули Валиса:

$$\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{\infty}2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Чебишовљеве оцене за $\pi(x)$

Најпре ћемо доказати доњу оцену за $\pi(x)$

Теорема 1. За произвољно реално $x \geq 6$ важи неједнакост

$$\pi(x) > a\frac{x}{\ln x}$$

где је константа $a = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.34567$.

ДОКАЗ. Уочимо природан број $n \geq 3$ такав да је

$$2n \leq x < 2n + 2.$$

Пошто су $\pi(x)$ и $\ln x$ неопадајуће функције на скупу природних бројева N, важи

$$\pi(x)\ln(x) \geq \pi(2n)\ln 2n.$$

Из тврђења 3 следи $\pi(2n)\ln 2n \geq \psi(2n)$,

а из леме 1 следи $\psi(2n) \geq T(2n) - 2T(n)$.

Коначно из леме 2 логаритмовањем следи

$$T(2n) - 2T(n) > (n+1)\ln 2.$$

Свеукупно $\pi(x) > \ln 2\frac{x}{\ln x}$.

Лема 3.

За позитивно реално $x \geq 2$ важи неједнакост

$$e^{\theta(x)} = \prod_{p \leq x} p < 4^x,$$

при чему је $e \approx 2.71828$ Ојлеров број.

ДОКАЗ. Довољно је да размотримо случај када је $x = n$ природан број, јер $4^x \geq 4^{[x]}$.

Доказујемо неједнакост

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n \text{ индукцијом по } n \geq 2.$$

База је очигледна. Урадимо корак индукције. Ако је $n > 2$ парно, то

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p < 4^{n-1} < 4^n.$$

Нека је $n > 2$ непарно, $n = 2k+1$. Имамо

$$\prod_{p \leq 2k+1} p = \prod_{p \leq k+1} p \prod_{k+1 < p \leq 2k+1} p < 4^{k+1} \prod_{k+1 < p \leq 2k+1} p.$$

Посматрајмо број

$$M = M(k) = \binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}$$

За бројеве $k+1 < p \leq 2k+1$ очигледно је да деле M па је довољно показати $M < 4^k$. Ово показујемо индукцијом по k. База $k = 1$, $\frac{3!}{2!} < 4$.

$$\text{Корак } \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} = \frac{(2k-1)!}{(k-1)!k!} \frac{2k(2k+1)}{k(k+1)} < 4^{k-1} \frac{4k+2}{k+1} < 4^k$$

$$\text{Дакле, } \prod_{p \leq n} p < 4^{k+1} 4^k = 4^{2k+1} = 4^n.$$

Корак индукције је урађен.

Теорема 2.
За произвољан реалан број $x \geq 2$ важи неједнакост

$$\pi(x) < b \frac{x}{\ln x}$$

са константом $b = 5 \ln 2 \approx 3.46574$.

ДОКАЗ. Приметимо да је $\pi(x) \leq x/2$ за $x \geq 8$. Имамо

$$\theta(x) \geq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \ln p \geq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \ln \sqrt{x} = (\pi(x) - \pi(\sqrt{x})) \ln \sqrt{x}.$$

Пошто је из леме 3, $\theta(x) \leq 2x \ln 2$, то

$$\pi(x) \leq \frac{2x \ln 2}{\ln \sqrt{x}} + \pi(\sqrt{x}) \leq \frac{4x \ln 2}{\ln x} + \frac{\sqrt{x}}{2} < 5 \ln 2 \frac{x}{\ln x}$$

за $x \geq 64$. Но тврђење је такође тачно и за $2 \leq x < 64$, што се може директно проверити.

Забелешка 1.

Означимо са p_n, n-ти прост број. Тада постоје позитивне константе α и β, такве да за све $n \geq 2$

$$\alpha n \ln n < p_n < \beta n \ln n.$$

ДОКАЗ. Из теореме 1 и теореме 2 убацивањем p_n добијамо

$$a\frac{p_n}{\ln p_n} < \pi(p_n) = n < b\frac{p_n}{\ln p_n}$$

Обе неједнакости се слично доказују, с тим што је горња оцена нешто тежа. Њу ћемо и доказати.

Логаритмовањем леве неједнакости добијамо

$$(*) \ln a + \ln p_n - \ln\ln p_n < \ln n.$$

Логаритмовањем наше жељене неједнакости видимо да нам је потребно да постоји константа β таква да је за свако $n \geq 2$

$$\ln\beta > \ln p_n - \ln\ln n - \ln n$$

Применом (*) неједнакост се своди на

$$\ln\beta > \ln p_n - \ln\ln n - (\ln a + \ln p_n - \ln\ln p_n) = \ln\ln p_n - \ln\ln n - \ln a.$$

Односно треба да покажемо да је одозго ограничен израз

$$\ln\frac{\ln p_n}{\ln n} - \ln a,$$

за шта је довољно да је одозго ограничен израз $\frac{\ln p_n}{\ln n}$

Дељењем (*) са $\ln p_n$ добијамо

$$\frac{\ln a}{\ln p_n} + 1 - \frac{\ln\ln p_n}{\ln p_n} < \frac{\ln n}{\ln p_n},$$

$$\text{односно } \frac{\ln p_n}{\ln n} < \frac{1}{1 + \frac{\ln a}{\ln p_n} - \frac{\ln\ln p_n}{\ln p_n}}$$

Како је за овај израз $\lim_{n\to\infty} = 1$ то је он ограничен, па постоји тражена константа β.

За доказ доње оцене потребна нам је нека горња оцена за $\frac{\ln n}{\ln p_n}$, а 1 је очигледно оцена.

У наставку ћемо изложити два доказа Бертрандовог постулата. Први изложени доказ је дао Ердош, а други је упрошћени Чебишовљев доказ (који је дао С. Б. Стечкин на основу Чебишовљевих изворних идеја). Сумирани доказ можете погледати рецимо под [2].

Докази Бертрандовог постулата

Ердошев доказ

Бертрандов постулат: За $n \geq 2$ између n и $2n$ налази се барем један прост број.

ДОКАЗ 1. Основна идеја Ердошовог доказа је да би биномни коефицијент $\binom{2n}{n}$ био *исувише мали* ако не би имао простих делилаца између n и $2n$.

$$\text{Посматрајмо } N = \frac{(2n)!}{n!^2} = \prod_{p \leq 2n} p^{\nu_p(N)}.$$

Ако је $n < p \leq 2n$ важи $\nu_p(N) = 1$. Односно

$$\prod_{n<p\leq 2n} p^{\nu_p(N)} = \prod_{n<p\leq 2n} p.$$

Ако је $\frac{2n}{3} < p \leq n$, онда је $\nu_p(N) = 0$ (ово је по мишљењу Ердоша кључно место у доказу), односно

$$\prod_{\frac{2n}{3}<p\leq n} p^{\nu_p(N)} = 1.$$

Ако је $p > \sqrt{2n}$, важи $\nu_p(N) \leq 1$, јер имамо

$$p^{\nu_p(N)} \leq p^{\nu_p(K)} \leq 2n.$$

(Овде смо као и раније користили ознаку $K = \text{НЗС}(1, 2, ..., 2n)$).

Дакле важи

$$\prod_{\sqrt{2n}<p\leq \frac{2n}{3}} p^{\nu_p(N)} \leq \prod_{p\leq \frac{2n}{3}} p < 4^{2n/3}.$$

При чему смо у последњем кораку применили лему 3.

И коначно за $n \geq 32$ добијамо

$$\prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^{\nu_p(N)} \leq (2n)^{\pi(\sqrt{2n})} \leq (2n)^{\sqrt{n/2}}.$$

(Неједнакост $\pi(\sqrt{2n}) \leq \sqrt{n/2}$ важи за $\sqrt{n/2} \geq 4$, односно за $n \geq 32$)
Овако смо добили двојну оцену

$$\frac{4^n}{\sqrt{4n}} < N < 4^{2n/3}(2n)^{\sqrt{n/2}} \prod_{n<p\leq 2n} p.$$

(Лева неједнакост је по леми 2, а десна је управо доказана.) Али за $n > 68$ добијамо контрадикцију, ако претпоставимо

$$\prod_{n<p\leq 2n} p = 1, \text{ односно да нема простих бројева између } n \text{ и } 2n.$$

Поставља се питање колико има простих бројева између n и $2n$? За $n \geq 68$ добили смо неједнакост

$$P = P(n) := \prod_{n<p\leq 2n} p > \frac{4^{n/3}}{(2n)^{\sqrt{n/2}}\sqrt{4n}} =: f(n).$$

Пошто је, очито, $P < (2n)^{\pi(2n)-\pi(n)}$, то

$$(\pi(2n) - \pi(n)) \ln 2n > \ln P > \ln f(n).$$

Одавде следи оцена

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{\ln f(n)}{\ln 2n} \sim \frac{c_1 n}{\ln n}, \quad n \to \infty,$$

где је $c_1 = \frac{2}{3}\ln 2 \approx 0.46209$. Ова оцена није превише груба у поређењу са асимптотском оценом $c_1 = 1$.

Чебишовљев доказ

У наставку ћемо изложити нешто упрошћену верзију Чебишовљевог решења, коју је дао С.Б. Стечкин. Њене главне идеје су следећи идентитети које називамо идентитетима Чебишова. Можете се подсетити дефиниција $\psi(x), \theta(x)$ и $T(x)$ на 6. страни рада.

Лема 4.
Нека је x позитиван реалан број. Тада важи $\psi(x) = \sum_{k\geq 1} \theta(x^{\frac{1}{k}})$.

Лема 5.
Нека је x позитиван реалан број. Тада важи $T(x) = \sum_{k\geq 1} \psi(\frac{x}{k})$.

Доказ леме 4. Имамо

$$\sum_{k\geq 1} \theta(x^{1/k}) = \sum_{k\geq 1} \sum_{p\leq x^{1/k}} \ln p = \sum_{p\leq x} \sum_{k\leq \ln x/\ln p} \ln p = \sum_{p\leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p = \psi(x).$$

И лема 4 је доказана.

Доказ леме 5 користи лему 4. Наиме имамо

$$\sum_{k\geq 1} \psi\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k\geq 1} \sum_{m\geq 1} \theta\left(\frac{x}{k})^{\frac{1}{m}}\right)$$

Фиксирајмо сада неки прост број p и неко m. Допринос претходној суми за те фиксиране вредности је

$$\sum_{k=1}^{(\frac{x}{k})^{\frac{1}{m}}\geq 1} \ln p = \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p.$$

Одавде закључујемо да је укупан допринос једнак

$$\sum_{p\leq x} \sum_{m\geq 1} \ln p \left[\frac{x}{p^m}\right] = \sum_{p\leq x} \nu_p(x!) \ln p = \ln(x!) = T(x).$$

(Иако изгледа једноставно, лему 5 је непријатно доказати без коришћења леме 4.)

Доказ Бертрандовог постулата састоји се из неколико корака.

1. Оцена $\theta(x) - \theta(x/2)$. Посматрајмо функцију

$$U(x) := T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right).$$

Примењујући лему 5 и чињеницу да за непарне k мање од x не постоји n такво да $\frac{x}{k} \neq \frac{\frac{x}{2}}{n}$, док за парне k постоји и износи $\frac{k}{2}$, имамо

$$U(x) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\psi\left(\frac{x}{k}\right).$$

$$\text{(Ово је једнако } \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + ...\text{)}$$

Како је $\psi(x)$ неопадајућа функција имамо

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq U(x) \leq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right).$$

Можемо доказати и следећа тврђења

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leq \theta(x) \leq \psi(x).$$

Користећи дефиниције $\psi(x)$ и $\theta(x)$, тврђење се своди на

$$\ln(\text{НЗС}(1,2,...,x)) - 2\ln(\text{НЗС}(1,2,...,[\sqrt{x}])) \leq$$

$$\leq \ln(\prod_{j=1}^{p_j=\pi(x)} p_j) \leq \ln(\text{НЗС}(1,2,...,x)).$$

Десна страна очигледно важи, док за леву посматрамо просте бројеве p не веће од x. Допринос левој страни је

$$\ln p[\log_p x] - 2[\ln p \log_p(\sqrt{x})] = \ln p([\log_p x] - 2\left[\frac{\log_p x}{2}\right]) \leq \ln p.$$

Овим је и лева неједнакост доказана.

Свеукупно имамо,

$$\theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right) \geq (\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x})) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \geq U(x) - \psi\left(\frac{x}{3}\right) - 2\psi(\sqrt{x}).$$

2. Оцена $U(x)$. Имамо

$$U(x) = \sum_{k\leq x}\ln k - 2\sum_{k\leq x/2}\ln k = \sum_{k\leq x}\ln k - 2\sum_{k\leq x}\ln 2k + 2\left[\frac{x}{2}\right]\ln 2.$$

$$U(x) = \sum_{k\le x}(-1)^{k+1}\ln k + 2\left[\frac{x}{2}\right]\ln 2$$

Одавде добијамо оцене

$$x\ln 2 - \ln x - \ln 2 \le U(x) \le x\ln 2 + \ln x.$$

3. Оцена $\psi(x)$. Уведимо функцију $V(x)$ такву да важи

$$V(x) - V(x/2) = x\ln 2 + \ln x.$$

Једна таква функција је

$$V(x) := 2x\ln 2 + \frac{1}{2\ln 2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x.$$

Како је $\psi(x) - \psi(x/2) \le U(x) \le x\ln 2 + \ln x = V(x) - V(x/2)$, имамо

$$V(x) - \psi(x) \ge V(x/2) - \psi(x/2) \ge V(x/2^{[log_2 x]}) - \psi(x/2^{[log_2 x]}) \ge V(1).$$

(Пошто је $\psi(x) = \psi([x])$ то је $\psi(x/2^{[log_2 x]}) = \psi(1) = 0$).

Добијамо неједнакост

$$\psi(x) \le V(x) - V(1) = 2x\ln 2 + \frac{1}{2\ln 2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x - 2\ln 2.$$

4. Завршетак доказа

Примењујући редом прву, другу и трећу оцену добијамо

$$\theta(x) - \theta(x/2) \ge U(x) - \psi(x/3) - 2\psi(\sqrt{x}) - \ln x \ge$$

$$\ge \frac{\ln 2}{3}x - 4\sqrt{x}\ln 2 - \frac{3}{4\ln 2}\ln^2 x - 2\ln x + 4\ln 2 := W(x).$$

Следи,

$$\pi(x) - \pi(x/2) \ge \frac{1}{\ln x}\sum_{2<p\le x}\ln p = \frac{\psi(x) - \psi(x/2)}{\ln x} \ge \frac{W(x)}{\ln x} \sim \frac{c_2 x}{\ln x}, \quad x\to\infty.$$

где је $c_2\frac{\ln 2}{3} \approx 0.23104$. Како је за $x > 450, W(x) > 0$ то за свако $x > 450$ важи $\pi(2x) - \pi(x) > 0$, односно између x и $2x$ има бар један прост број. За $x < 450$ између x и $2x$ се налази барем један од простих бројева $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 503$. Овим је доказ у потпуности урађен.

Закључна реч

Веома је занимљиво да је проблем који има наизглед лак елементарни доказ решен тек средином 19. столећа. Прости бројеви привлачили су пажњу људи још од античког доба, али се о њиховом поретку, бројности и заступљености јако мало знало. Можда је највећа сметња бољем упознавању простих бројева био веома велики број могућих приступа. Могу се посматрати дељивости, могу се међусобно одузимати производи неколико простих бројева, па да се добије број који није дељив ни са једним од њих, могу се посматрати изрази и функције у којима учествују прости бројеви. Има још много могућих приступа.

Чебишовљев доказ значајан је јер је био први формалан доказ који се односио на просте бројеве. Касније је Чебишов примењивао сличне идеје како би добио што оштрије оцене за $\frac{\pi(x)}{x \ln x}$. Пошто је успео и доњу и горњу оцену свести релативно близу 1, постало је актуелно питање да ли је асимптотска оцена управо 1. Ово тврђење су доказали Ердош и Селберг и носи назив *Теорема о простим бројевима.* Значај Чебишова (као и Ердоша и Селберга) је и у томе што је показао да су елементарни приступи много успешнији него што се то до тада веровало.

Сада постоје веома јаке теореме о простим бројевима. Знамо да се у свакој аритметичкој прогресији где је НЗД$(a, b) = 1$ налази бесконачно много простих бројева, па чак знамо и ограничење у зависности од b колико брзо прост број мора да се јави. Иако су ове и многе друге теореме компликованије од Бертрандовог постулата, на њихово откривање морали би смо дуже чекати да није било Чебишова и Бертанда.

Можда делује мали, али први корак је често и пресудан.

Извори

[1] P. Tchebychef, “Mémoire sur les nombres premiers”, Journ. Math. pures et appl.

[2] С. Б. Стечкин Простое доказательство теоремы Чебышева о простых числах, Успехи математических наук, 1968

[3] The prime number theorem: Analytic and elementary proofs Ciar´an O’Rourke,
(http://mural.maynoothuniversity.ie/4470/1/finaldraftmsc.pdf)

[4] P. Finsler, Über die Primzahlen zwischen n und 2n, Speiser - Festschrift, Zürich, 1945

[5] Э. Трост, Простые числа, московско издање, 1959

[6] The elementary proof of the prime number theorem: an historical perspective (by D. Goldfeld)