Математичка гимназија

# Матурски рад
# -из математике-

# Примена изометрија у конструкцији


Ментор: мр Војислав Пантић

Ученик: Лола Вуковић


Београд, јун 2023. године

# Садржај

# 1 Увод

Геометрија је једна од најстаријих наука, која проучава форме и односе фигура у равни и простору.
Геометрија се развијала и усавршавала вековима, тако да сада представља изграђену математичку дисциплину.
Око 300. године пре нове ере настало је најсистематичније дело из геометрије тог времена под насловом ,,Елементи", које је написао Еуклид. У 7. аксиоми ,,Елемената"која гласи:,,Оне које се међусобно могу довести до поклапања једнаке су међу собом", први пут се употребљава кретање геометријских фигура. Ту већ видимо да ће изометријске трансформације омогућити да дефинишемо подударност било којих фигура у простору.
Данас, изометрије су широко коришћене у многим дисциплинама математике и примењених наука, и настављају да се развијају са напретком технологије.

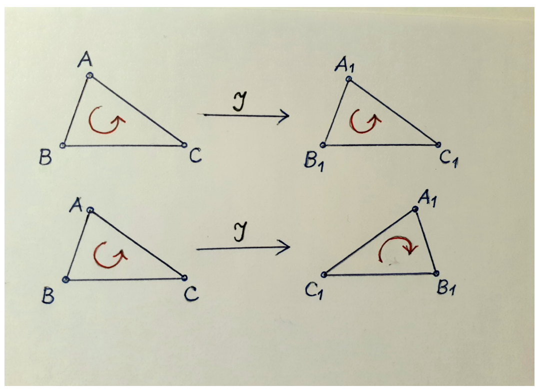
# 2 Изометријске трансформације равни

Постоје разни типови изометријских трансформација Еуклидске равни: Осна рефлексија, Централна ротација, Централна симетрија, Транслација, Клизајућа рефлексија. За класификацију изометрија значајна је оријентација пресликане фигуре, као и број фиксних (инваријантних) тачака.

## 2.1 Директне и индиректне изометријске трансформације

Свака изометрија може бити директна или индиректна.

**Дефиниција 2.1** *Изометријска трансформација* $\mathcal{J}\colon E^2 \to E^2$ *је директна, ако чува оријентацију равни* $E^2$*, тј. сваки троугао те равни пресликава у троугао исте оријентације.* $\mathcal{J}\colon E^2 \to E^2$ *је индиректна ако сваки троугао те равни пресликава у троугао супротне оријентације.*




Слика 1:

**Теорема 2.1** *Нека су* $AB$ *и* $A_1B_1$ *подударне дужи равни* $E^2$*. Тада постоје тачно две изометрије те равни које сликају тачке* $A$ *и* $B$ *у* $A_1$ *и* $B_1$*, једна директна, а друга индиректна.*

**Теорема 2.2** *Директна изометрија равни* $E^2$ *са бар две инваријантне тачке је коинциденција.*

**Теорема 2.3** *Нека је* $\mathcal{J}$ *изометрија са инваријантном правом* $p$ *којој мења оријентацију. Тада на правој* $p$ *постоји фиксна тачка при изометрији* $\mathcal{J}$*.*

## 2.2 Осна рефлексија

**Дефиниција 2.2** *Нека је p права равни $E^2$. Изометријска трансформација равни која није коинциденција и за коју је свака тачка праве p фиксна (инваријантна) назива се осна рефлексија равни, у ознаци $\mathcal{S}_p$. Права p је оса те рефлексије.*

**Својства осне рефлексије**

**Теорема 2.4** *Све фиксне тачке осне рефлексије су на оси рефлексије.*

**Теорема 2.5** *Осна рефлексија је индиректна изометрија.*

**Теорема 2.6** *Ако је $\mathcal{S}_p$ осна рефлексија равни и за неку тачку $X$ те равни важи $\mathcal{S}_p(X) = X_1 \neq X$, тада је оса p те рефлексије медијатриса дужи $XX_1$.*

**Теорема 2.7** *Једине инваријантне праве осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ су оса p и све праве те равни које су нормалне на p.*

Ако два пута применимо исту осну рефлексију, сваку тачку ,,враћамо"на своје место. То значи да је композиција осне рефлексије са собом коинциденција и инверзна трансформација осне рефлексије је иста та рефлексија. Трансформације које имају ово својство зову се инволуције.

**Теорема 2.8** *Осна рефлексија је инволуција, тј. $\mathcal{S}_p^2 = \mathcal{E}$.*

**Теорема 2.9** *Индиректна изометрија са бар једном фиксном тачком је осна рефлексија, чија оса садржу ту тачку.*

Наредном теоремом размотрићемо трансмутацију осне рефлексије било којом изометријском трансформацијом. Трансмутацијом(преображавањем) осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ неком трансформацијом $\mathcal{J}$ називамо композицију: $\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{J}^{-1}$.

**Теорема 2.10** *(о трансмутацији) Нека је $\mathcal{S}_p$ осна рефлексија равни, а $\mathcal{J}$ изометрија равни која слика праву p у праву $p_1$. Тада $\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{S}_{p_1}$.*

**Теорема 2.11** *Осне рефлексије равни комутирају ако и само ако су им осе управне или једнаке. Тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.*

**Теорема 2.12** *Нека су p и q разне компланарне праве. Једина фиксна тачка изометрије $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ је пресечна тачка правих p и q, тј. важи: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q(X) = X \Leftrightarrow X = p \cap q$.*

Композиција две осне рефлексије је директна изометрија, као композиција две индиректне изометрије. Ако су осе тих рефлексија једнаке, онда та композиција представља коинциденцију. На основу претходне теореме, ако се осе тих рефлексија секу, онда композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ има само једну фиксну тачку (то је њихова пресечна тачка), а ако су осе тих рефлексија паралелне, онда композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ нема фиксних тачака.

**Подударност ликова**

Осна рефлексија равни омогућује да у геометрији те равни установимо специфичну релацију подударности, тзв. релацију осносиметричне подударности ликова.

**Дефиниција 2.3** *Права $s$ је оса симетрије фигура $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ ако је $\mathcal{S}_p(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$. Специјално ако је $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, тј. $\mathcal{S}_p(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, каже се да је фигура $\mathcal{F}$ осносиметрична и да је $s$ оса симетрије лика $\mathcal{F}$.*

**Теорема 2.13** *Свака изометрија која слика $\mathcal{J}\colon E^2 \to E^2$ може се представити као композиција (слагање) коначног броја осних рефлексија, при чему се може постићи да број осних рефлексија у композицији не буде већи од три.*

### Примена осне рефлексије у конструкцији

Својства осне рефлексије примењују се у низу конструктивних задатака, па се често лако може доћи до решења задатка самим пресавијањем једног дела слике око неке праве тако да он заузме симетричан положај с друге стране праве.

**1.** Нека су $A$ и $B$ две тачке са исте стране праве $p$. Одредити тачку $X$ на правој $p$ тако да збир $|AX| + |XB|$ буде минималан.

**1. Анализа:** Осном рефлексијом дужи $AB$ око праве $p$ тачка $A$ се слика у тачку $A_1$ која је симетрична тачки $A$ у односу на праву $p$. Тада је одстојање тачке $A$ до било које тачке праве $p$ једнако одстојању тачке $A_1$ до исте тачке праве $p$.

Дакле,$|AX| + |XB| = |A_1X| + |XB|$ и$|AX_1| + |X_1B| = |A_1X_1| + |X_1B_1|$ али ће збир бити минималан када су тачке $A1$, $X$ и $B$ колинеарне.

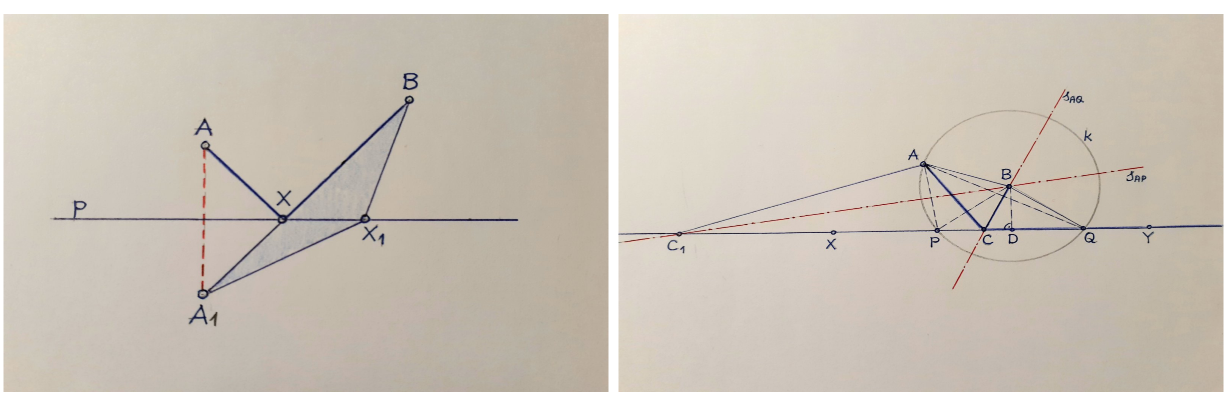
**Конструкција:** 1) Конструишемо $A_1 = \mathcal{S}_p(A)$

2) Конструишемо $\{X\} = BA_1 \cap p$. Тачка $X$ је тражена тачка.

**Доказ:** Нека је $X_1$ произвољна тачка праве $p$ различита од $X$. Како је $\mathcal{S}_p$ изометрија, важи $X_1A \cong X_1A_1$. Одавде, на основу неједнакости троугла за троугао $BX_1A_1$ следи:

$$|AX_1| + |X_1B| = |A_1X_1| + |X_1B| > |A_1B| = |A_1X| + |XB| = |AX| + |XB|$$

**Дискусија:** Решење је јединствено, јер су јединствене тачке $A_1$ и $X$. $\square$




Слика 2: Задаци 1 и 2

**2.** Дата је права $XY$ и две тачке $A$ и $B$ са исте стране праве $XY$.Одредити на правој $XY$ тачку $C$ тако да $\angle ACY$ буде два пута већи од $\angle BCY$, .

**2. Анализа:** Претпоставимо да је тачка $C$ одређена и да круг са центром у тачки $B$ и полупречником $BA$ сече праву $p$, одређену тачкама $X$ и $Y$, у тачкама $P$ и $Q$. Тачка која је симетрична тачки $A$ у односу на праву $BC$ је тачка $Q$ која припада правој $XY$ па је: $|BQ| = |BA|$ Исто важи и за тачку $P$.

**Конструкција:** 1) Конструишемо круг $k$ са центром у тачки $B$ и полупречником $AB$ ; Круг $k$ сече праву $XY$ у тачкама $P$ и $Q$;

2) Конструишемо симетрале дужи $AP$ и $AQ$ ;

3) $\{C\} = s_{AQ} \cap XY$ , $\{C_1\} = s_{AP} \cap XY$;

4) Тачке $C$ и $C_1$ су тражене тачке .

**Доказ:** Како су праве $CB$ и $C_1B$ симетрале редом углова $\angle ACQ$ и $\angle AC_1Q$, то је $\angle ACY = 2\angle BCY$ и $\angle AC_1Y = 2\angle BC_1Y$ .

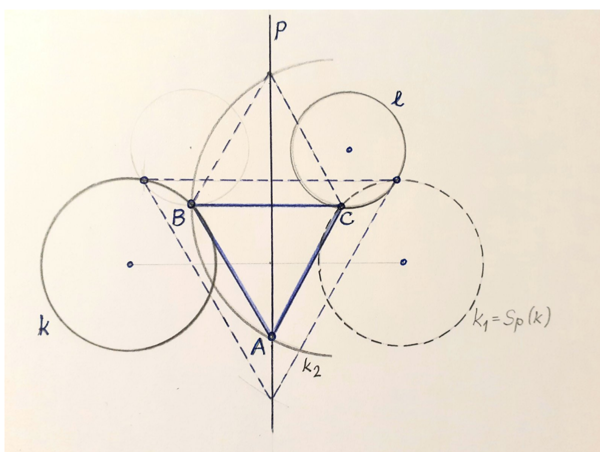
**Дискусија:**

Ако је $|AB| < |BD|$ задатак нема решења.

Ако је $|AB| = |BD|$ задатак има јединствено решење.

Ако је $|AB| > |BD|$ задатак има два решења.

**3.** Нека су $k$ и $l$ кругови са разних страна праве $p$. Конструисати правилан троугао $ABC$ тако да темена $B$ и $C$ припадају круговима $k$ и $l$ редом, а права $p$ садржи висину троугла из темена $A$.




Слика 3: Задатак 3

**3. Анализа:** Висина правилног троугла из темена $A$ је медијатриса ивице $BC$, тј. права $p$ је медијатриса ивице $BC$. Осном рефлексијом дужи $AB$ у односу на праву $p$ тачка $B$ се слика у тачку $C$. Како тачка $B$ припада кругу $k$ то ћемо осном рефлексијом круга $k$ добити круг $k_1$ , а у њеном пресеку са кругом $l$ ћемо добити тачку $C$.

**Конструкција:** 1) Конструишемо $k_1 = \mathcal{S}_p(k)$;

2) $C \in k_1 \cap l$; 3) $B = \mathcal{S}_p^{-1}(C)$;

4) $A \in k_2(C, |CB|) \cap p$.

**Доказ:** Тачка $C$ припада кругу $l$, тачка $B$ кругу $k = \mathcal{S}_p^{-1}(k_1)$, а тачка $A$ правој $p$, све директно по конструкцији.

$\mathcal{S}_p(AB) = AC$, па је $AB \cong AC$.

Такође, из конструкције следи $CB \cong CA$, што значи да је троугао $ABC$ правилан.

**Дискусија:**

Ако је $|k_1 \cap l| = 0$ задатак нема решења.

Ако је $|k_1 \cap l| = 1$ задатак има два решења, јер круг $k_2(C, |CB|)$ два пута сече праву $p$.

Ако је $|k_1 \cap l| = 2$ задатак има четири решења, по два за сваки од пресека $k_1$ и $l$.

Ако је $k_1 \equiv l$ задатак има бесконачно много решења.

## 2.3 Праменови правих у равни

Међу разним узајамним положајима правих у равни, овде посебно издвајамо случајеве када се све праве секу у једној тачки, односно када су међусобно паралелне. Тим узајамним положајима правих одговарају два различита прамена правих: прамен конкурентних правих и прамен паралелних правих.

**Дефиниција 2.4** *Скуп свих правих равни $E^2$ које садрже тачку $S$ назива се прамен конкурентних правих са средиштем $S$, у ознаци $\chi_S$. Скуп свих правих равни $E^2$ које су паралелне правој $s$ те равни назива се прамен паралелних правих, у ознаци $\chi_s$.*

Прамен конкурентних правих једнозначно је одређен средиштем $S$ тог прамена, док је прамен паралелних правих једнозначно одређен било којом својом правом $s$.

**Најважнија својства праменова правих која се односе на осне рефлексије:**

**Теорема 2.14** *Ако праве $p$, $q$, $r$ равни $E^2$ припадају истом (конкурентном или паралелном) прамену $\chi$ композиција $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ представља осну рефлексију $\mathcal{S}_s$, $s \in \chi$.*

**Теорема 2.15** *Ако композиција $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ осних рефлексија равни $E^2$ представља осну рефлексију $\mathcal{S}_s$, тада праве $p$, $q$, $r$, $s$ припадају истом прамену $\chi$.*

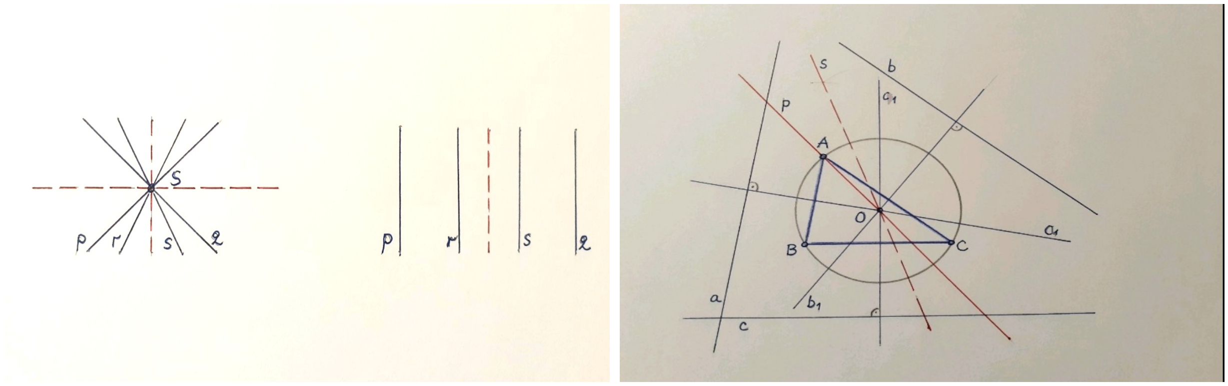
Увешћемо релацију изогоналности парова правих која проистиче из релације

$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$

**Дефиниција 2.5** *Ако за четири осне рефлексије равни $E^2$ важи $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$, кажемо да је пар правих $p, r$ изогонално спрегнут са паром $q, s$ (као и да је пар $q, s$ изогонално спрегнут са паром $p, r$).*

**Теорема 2.16** *Нека су $a$, $b$, $c$, $d$ четири праве истог прамена $\chi$. Тада је пар $a, c$ изогонално спрегнут са паром $b, d$ ако и само ако се њихове осе симетрије поклапају. Дакле, ако је $\mathcal{S}_s(a) = c$ и $\mathcal{S}_t(b) = d$ тада $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d \Leftrightarrow s = t$.*

**Теорема 2.17** *Ако су $p$, $q$, $r$ праве истог (конкурентног или паралелног) прамена $\chi$ равни $E^2$ тада важи $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$.*




Слика 4:

**Примена праменова правих у равни у конструкцији**

**1.** Нека је $k(O, r)$ круг, а $a$, $b$, $c$ праве неке равни. Конструисати троугао $ABC$ уписан у круг $k$, чије су ивице $BC$, $CA$, $AB$ паралелне правама $a$, $b$, $c$ редом.

**1. Анализа:** Нека су $a_1$, $b_1$, $c_1$ праве прамена $\chi_O$, где је $O$ центар описаног круга $k(O, r)$ троугла $ABC$, и нека је $a_1 \perp a$, $b_1 \perp b$, $c_1 \perp c$.

Тада је, по теореми 1.14, пошто праве $a_1$, $b_1$, $c_1$ припадају прамену $\chi_O$ композиција $\mathcal{S}_{c_1} \circ \mathcal{S}_{a_1} \circ \mathcal{S}_{b_1} = \mathcal{S}_p$, за неку праву $p \in \chi_O$. Такође, по теореми 1.16 важи $\mathcal{S}_s(a_1) = p$, $\mathcal{S}_s(c_1) = b_1$, тј. иста права $s$ је оса симетрија пара $a_1, p$ и пара $c_1, b_1$. Праву $p$ је онда могуће конструисати. $\mathcal{S}_p$ је осна рефлексија са фиксним тачкама $O$ и $A$. Пресек праве $p$ са кругом је једно од темена траженог троугла.

**Конструкција:**

1) Конструишемо праве $a_1$, $b_1$, $c_1 \in \chi_O$, тако да $a_1 \perp a$, $b_1 \perp b$, $c_1 \perp c$.

2) Конструишемо праву $s$, $\mathcal{S}_s(c_1) = b_1$ (осу симетрије правих $b_1$ и $c_1$)

3) Конструишемо праву $p = \mathcal{S}_s(a_1)$

4) $A \in p \cap k(O, r)$

5) $B = \mathcal{S}_{c_1}(A)$, $C = \mathcal{S}_{b_1}(A)$

**Доказ:** $A \in p \cap k \Rightarrow A \in k$ (по конструкцији)

$O \in c_1 \Rightarrow \mathcal{S}_{c_1}(OA) = OB \Rightarrow OA \cong OB \Rightarrow B \in k$.

$O \in b_1 \Rightarrow \mathcal{S}_{b_1}(OA) = OC \Rightarrow OA \cong OC \Rightarrow C \in k$.

Доказали смо да темена троугла $ABC$ припадају датом кругу.

Још треба показати да ли су одговарајуће ивице троугла паралелне правама $a$, $b$, $c$. Најпре, директно по конструкцији, на основу $\mathcal{S}_{c_1}(A) = B$ и $\mathcal{S}_{b_1}(A) = C$, имамо:

$AB \perp c_1 \wedge c_1 \perp c \Rightarrow AB \parallel c$

$AC \perp b_1 \wedge b_1 \perp b \Rightarrow AC \parallel b$

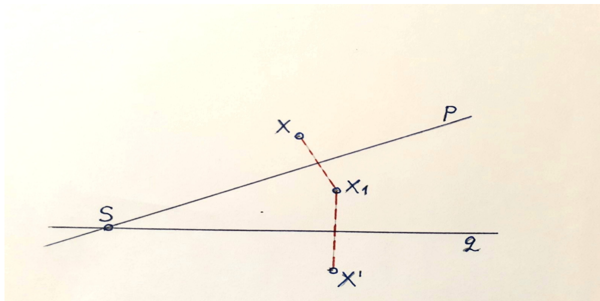
За ивицу $BC$ не можемо овако. Али, из $\mathcal{S}_{c_1} \circ \mathcal{S}_{a_1} \circ \mathcal{S}_{b_1} = \mathcal{S}_p$ слагањем са $\mathcal{S}_{c_1}$ с лева, односно са $\mathcal{S}_{b_1}$ с десна добијамо: $\mathcal{S}_{a_1} = \mathcal{S}_{c_1} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{b_1}$. За ову изометрију важи:

$\mathcal{S}_{c_1} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{b_1}(C) = \mathcal{S}_{c_1} \circ \mathcal{S}_p(A) = \mathcal{S}_{c_1}(A) = B$, односно $\mathcal{S}_{a_1}(C) = B$, што значи да $BC \perp a_1$. Како је и $a_1 \perp a$, коначно добијамо и $BC \parallel a$.

**Дискусија:** Ако праве $a$, $b$, $c$ нису паралелне, задатак има два решења; по једно за сваки од пресека праве $p$ и круга $k$. $\square$

## 2.4 Централна ротација

Свака директна изометрија равни се може представити као композиција две осне рефлексије. Ако се осе поклапају та композиција представља коинциденцију. Размотрићемо случај када се осе секу и увешћемо нову врсту изометрија: централну ротацију.




Слика 5:

**Дефиниција 2.6** *Нека су p и q две праве равни* $E^2$ *које се секу у тачки* $S$. *Композиција* $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ *назива се централна ротација (или краће ротација) равни* $E^2$, *у ознаци* $\mathcal{R}_{S,\omega}$, *где је* $\omega = 2\measuredangle pSq$. *Тачка* $S$ *је центар, а* $\omega$ *угао ротације.*

**Својства централне ротације:**

**Теорема 2.18** *Ротација је директна изометрија.*

**Теорема 2.19** *Јединa фиксна тачка ротације је центар те ротације.*

**Теорема 2.20** *Нека је* $\mathcal{R}_{S,\omega} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ *ротација равни* $E^2$, $S = p \cap q$. *Нека је* $X$ *произвољна тачка равни различита од* $S$. *Тада важи:* $\mathcal{R}_{S,\omega}(X) = X_1 \Leftrightarrow \measuredangle XSX_1 \cong \omega \wedge SX \cong SX_1$.

**Теорема 2.21** *Ротација* $\mathcal{R}_{S,\omega}$ *је једнозначно одређена центром* $S$ *и оријентисаним углом* $\omega$, *и може се представити као композиција произвољних осних рефлексија чије се осе* $p$ *и* $q$ *секу у* $S$, *а* $\measuredangle pSq = \omega/2$.

**Теорема 2.22** *Директна изометрија са јединственом фиксном тачком је ротација.*

**Теорема 2.23** *Нека је* $\mathcal{R}_{S,\omega}$ *ротација равни* $E^2$, *а* $\mathcal{J}$ *изометрија равни која слика тачку* $S$ *у* $S_1$. *Тада је* $\mathcal{J} \circ \mathcal{R}_{S,\omega} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{R}_{S_1,\omega_1}$, *где је* $\omega_1 = \omega$, *ако је* $\mathcal{J}$ *директна, а* $\omega_1 = -\omega$, *ако је* $\mathcal{J}$ *индиректна трансформација.*

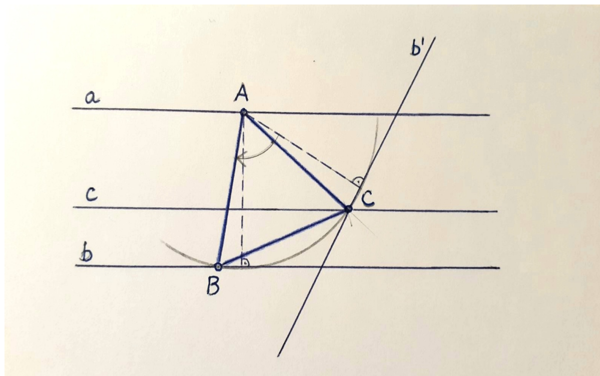
Трансформација инверзна ротацији представља такође ротацију са истим центром, за подударан угао супротне оријентације.

**Композиција две ротације:**

**Теорема 2.24** *Нека су* $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ *и* $\mathcal{R}_{B,\beta}$ *ротације равни, такве да* $\alpha+\beta \notin \{-360°, 0°, 360°\}$. *Тада композиција* $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha}$ *представља ротацију* $\mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$, *при чему је* $\measuredangle CAB = \alpha/2$ *и* $\measuredangle ABC = \beta/2$.

**Примена централне ротације у конструкцији**

**1.** Дате су три паралелне праве $a$, $b$ и $c$. Конструисати правилан троугао $ABC$ тако да његова темена $A$, $B$ и $C$ припадају правама $a$, $b$ и $c$ редом.




Слика 6: Задатак 1

**1. Анализа:** Нека је $A$ произвољна тачка на правој $a$ и теме траженог троугла. Тада ротацијом око тачке $A$ за угао од $60°$ тачка $B$ се пресликава у тачку $C$ и добијамо једну страницу троугла.

**Конструкција:** 1) Одредимо произвољну тачку $A$ на правој $a$

2) $b_1 = \mathcal{R}_{A,60°}(b)$; 3) $C \in b_1 \cap c$;

4) $B = \mathcal{R}^{-1}_{A,60°}(C)$.

**Доказ:** $C \in b_1 \cap c \Rightarrow C \in c$ (по конструкцији).

$\mathcal{R}^{-1}_{A,60°}(b_1) = b \Rightarrow \mathcal{R}^{-1}_{A,60°}(C) \in b \Rightarrow B \in b$.

$\mathcal{R}^{-1}_{A,60°}(AC) = AB$ одакле следи $AC \cong AB$ и $\angle CAB = 60°$.

То је довољно да закључимо да је троугао $ABC$ правилан.

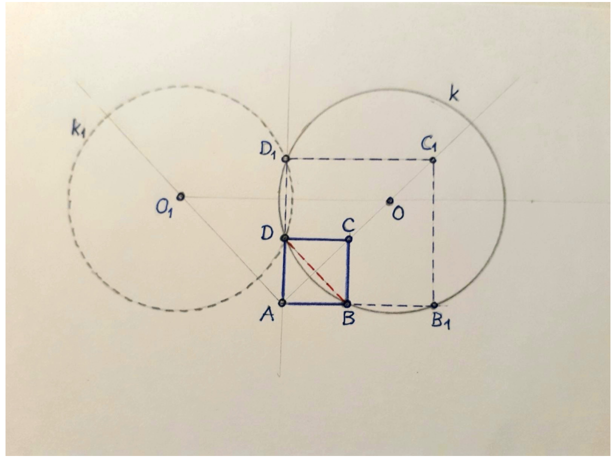
**Дискусија:** Задатак има два решења, при насумичном избору тачке $A$. Ротацијом праве $b$ око тачке $A$ за угао $-60°$ добија се још један троугао који је подударан са конструисаним.

**2.** Конструисати квадрат $ABCD$ ако је дата тачка $A$, а темена $B$ и $D$ припадају датом кругу $k$.

**2. Анализа:** Ротација $\mathcal{R}_{A,90°}$ пресликава тачку $B$ у тачку $D$. Како тачка $B$ припада кружници $k$, ротираћемо кружницу $k$ око тачке $A$ за угао од $90°$ . Та ротирана кружница $k_1$ ће сећи кружницу $k$ у тачки $D$ и добићемо страницу траженог квадрата.

**Конструкција:** 1) $\mathcal{R}_{A,90°}(k) = k_1$;

2) $D \in k_1 \cap k$;




Слика 7: Задатак 2

3) $\mathcal{R}^{-1}_{A,90^\circ}(D) = B$;

4) $\mathcal{S}_{BD}(A) = C$.

Доказаћемо да четвороугао $ABCD$ испуњава услове задатка.

**Доказ:** $D \in k_1 \cap k \Rightarrow D \in k$ (по конструкцији).

$\mathcal{R}^{-1}_{A,90^\circ}(k_1) = k \Rightarrow \mathcal{R}^{-1}_{A,90^\circ}(D) \in k \Rightarrow B \in k$.

$\mathcal{R}^{-1}_{A,90^\circ}(AD) = AB$ одакле следи $AD \cong AB$ и $\angle DAB = 90^\circ$.

То значи да је троугао $DAB$ једнакокрако-правоугли, са правим углом код темена $A$.

Рефлексијом тог троугла у односу на осу $BD$ заиста добијамо цео квадрат.

**Дискусија:** Ако је $|k_1 \cap k| = 0$ задатак нема решења.

Ако је $|k_1 \cap k| = 1$ задатак има једно решење.

Ако је $|k_1 \cap l| = 2$ задатак има два решења.

Ако је $k_1 \equiv l$ задатак има бесконачно много решења (ако је $A$ центар датог круга, па се тај круг ротацијом слика у самог себе). $\square$

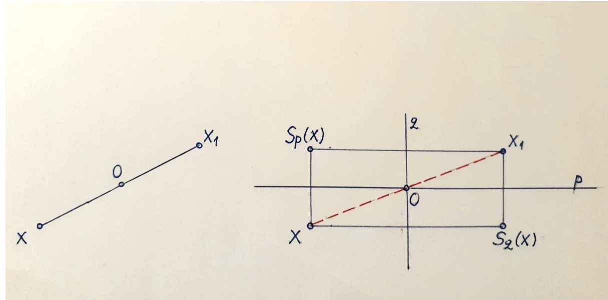
## 2.5 Централна симетрија

Специјалан случај ротације када је $\omega = 180^\circ$ назива се централна симетрија.

**Дефиниција 2.7** *Централна ротација $\mathcal{R}_{S,\omega}$ за угао $\omega = 180^\circ$ зове се централна симетрија са центром $O$, у ознаци $\mathcal{S}_O$.*

Централна симетрија $\mathcal{S}_O$ равни $E^2$ представља централну ротацију те равни око тачке $O$ за опружени угао. Она представља директну изометријску трансформацију равни $E^2$ са јединственом фиксном тачком $O$. Сваку другу тачку $X$ равни она пресликава у тачку $X_1$ те равни такву да је тачка $O$ средиште дужи $XX_1$. Централна симетрија је једнозначно одређена тачком $O$.

Како је по дефиницији централна симетрија врста ротације, за њу важе сва општа својства која важе за централну ротацију.




Слика 8:

Централна симетрија $\mathcal{S}_O$ се може представити као композиција две осне рефлексије чије су осе међусобно управне. Те осне рефлексије комутирају, тј. $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ где је $p \perp q$ и $\{O\} = p \cap q$.

Последица тога је:

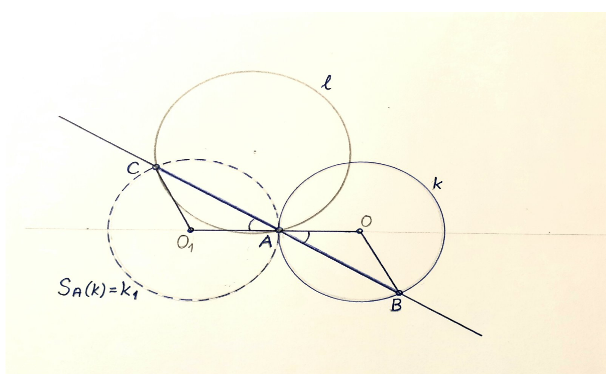
**Теорема 2.25** *Централна симетрија је инволуција.*

**Теорема 2.26** *Композиција три централне симетрије је централна симетрија. Ако су центри тих трију симетрија неколинеарне тачке, те три тачке и центар резултујуће симетрије представљају темена паралелограма.*

**Дефиниција 2.8** *Тачка $S$ је центар симетрије фигуре $\mathcal{F}$ ако је $\mathcal{S}_s(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$. Ако нека фигура има центар симетрије каже се да је она централносиметрична.*

**Примена централне симетрије у конструкцији**

**1.** Нека је $A$ једна од двеју пресечних тачака кругова $k$ и $l$. Конструисати праву која садржи тачку $A$ и сече кругове $k$ и $l$ редом у тачкама $B$ и $C$, тако да $BA \cong AC$.




Слика 9: Задатак 1

**1. Анализа:** Централна симетрија $\mathcal{S}_A$ пресликава тачку $B$ у тачку $C$.

Како тачка $B$ припада кругу $k$, ако централном симетријом у односу на тачку $A$ пресликамо круг $k$ добијамо круг $k_1 = \mathcal{S}_A(k)$ која сече круг $l$ у тачки $C$.

**Конструкција:** 1) $k_1 = \mathcal{S}_A(k)$;

2) $\{A, C\} = k_1 \cap l$;

3) $B = \mathcal{S}_A^{-1}(C)$.

Доказаћемо да права $BC$ испуњава услове задатка.

**Доказ:** $C \in k_1 \cap l \Rightarrow C \in l$ (по конструкцији).

$\mathcal{S}_A^{-1}(k_1) = k \Rightarrow \mathcal{S}_A^{-1}(C) \in k \Rightarrow B \in k$

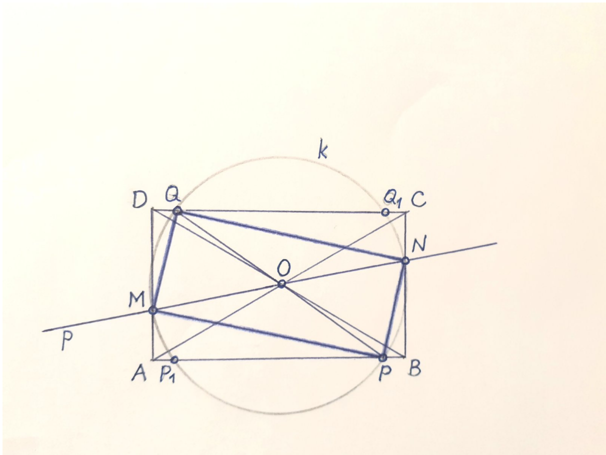
$\mathcal{S}_A^{-1}(AC) = AB$ одакле следи $AC \cong AB$ и $\angle CAB = 180°$.

Дакле, права $BC$ заиста садржи тачку $A$, која је средиште дужи $BC$.

**Дискусија:** Задатак има јединствено решење, пошто је тачка $C$ јединствена.

**2.** На мањој страници правоугаоника дата је тачка $M$. Уписати у тај правоугаоник нови правоугаоник, коме је једно теме тачка $M$, а остала 3 темена припадају преосталим страницама полазног правоугаоника.

**2. Анализа:** Нека је на страници $AD$ правоугаоника $ABCD$ дата тачка $M$ и нека је $MPNQ$ тражени правоугаоник. Како је правоугаоник централносиметрична фигура у односу на тачку $O$ (пресек дијагонала правоугаоника), то се слика тачке $M$, тј. тачка $N$, у односу на тачку $O$ налази на страници $BC$ правоугаоника $ABCD$. Друга два темена $P$ и $Q$ припадају кружници чији је полупречник дуж $MN$.




Слика 10: Задатак 2

**Конструкција:** 1) $N = \mathcal{S}_O(M)$;

2) конструисати круг са центром у тачки $O$ и пречником $MN$;

3) $P \in AB \cap k$;

4) $Q = \mathcal{S}_O(P)$;

**Доказ:** $M \in AD$ по услову задатка.

$CB = \mathcal{S}_O(AD)$ и $\mathcal{S}_O(M) \in CB$ па онда $N \in CB$.

$P \in AB$ по конструкцији, а $CD = \mathcal{S}_O(AB)$ и $\mathcal{S}_O(P) \in CD$ па онда $Q \in CD$.

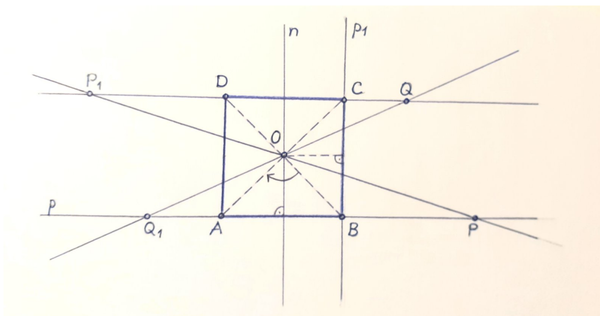
Још треба доказати да је $MPNQ$ заиста правоугаоник.

$\mathcal{S}_O(MP) = NQ$. Такође и $\mathcal{S}_O(Q) = P$, па је и $\mathcal{S}_O(MQ) = NP$. Одавде следи да је $MNPQ$ паралелограм јер су му наспрамне стране паралелне и једнаке. Како је $\angle MPN = 90°$ по конструкцији(као угао над пречником), онда је $MNPQ$ правоугаоник.

**Дискусија:** Задатак има два решења, пошто кружница $k$ сече страницу $AB$ у две тачке, као и страницу $CD$.

**3.** Нека су $O$, $P$, $Q$ неколинеарне тачке неке равни. Конструисати у тој равни квадрат $ABCD$, чији је центар тачка $O$, а тачке $P$ и $Q$ припадају правама $AB$ и $CD$ редом.

**3. Анализа:** Централна симетрија $\mathcal{S}_O$ пресликава праву $AB$ у праву $CD$ и обрнуто. Према томе, слика тачке $P$ у односу на центар симетрије $O$ налазиће се на правој $CD$, а слика тачке $Q$ на правој $AB$. Нека је $p$ права одређена тачкама $P$ и $Q_1$. Ротацијом праве $p$ око тачке $O$ за угао од $90°$ добићемо праву $p_1$. Пресек правих $p$ и $p_1$ је тачка $B$ (теме траженог квадрата).




Слика 11: Задатак 3

**Конструкција:** 1) $P_1 = \mathcal{S}_O(P)$, $Q_1 = \mathcal{S}_O(Q)$;

2) $p = PQ_1$, $q = QP_1$;

3) $p_1 = \mathcal{R}_{O,90°}(p)$;

4) $\{B\} = p_1 \cap p$;

5) $A = \mathcal{R}^{-1}_{O,90°}(B)$; 6) $C = \mathcal{S}_O(A)$, $D = \mathcal{S}_O(B)$.

**Доказ:** Пре свега, јасно је да су $P$ и $Q_1$ различите тачке (иначе би $O$ била средиште дужи $PQ$, тј. тачке $O$, $P$. $Q$ биле би колинеарне), те одређују праву $p$. Та права свакако не садржи $O$, јер би тад $O$, $P$, $Q$ биле колинеарне. Али, садржи тачке $A$ и $B$:

$\{B\} = p_1 \cap p \Rightarrow B \in p$

$\mathcal{R}^{-1}_{O,90°}(p_1) = p \Rightarrow \mathcal{R}^{-1}_{O,90°}(B) \in p \Rightarrow A \in p$

Штавише, тачке $A$ и $B$ су различите, јер је једина фиксна тачка ове ротације центар $O$, па и оне ,,одређују"праву $p$. Како $P \in p$, тачка $P$ припада правој $AB$.

Централна симетрија $\mathcal{S}_O$ слика тачке $P$, $Q_1$ у $P_1$, $Q$, које су такође различите и одређују праву $q$. Другим речима, $\mathcal{S}_O(p) = q$. Ни права $q$, наравно, не садржи тачку $O$ и дисјунктна је са правом $p$.

Но, по конструкцији $\mathcal{S}_O(A) = C$, $\mathcal{S}_O(B) = D$. Из $A, B \in p$ и $\mathcal{S}_O(p) = q$ следи $C, D \in q$.

Али и тачке $C$ и $D$ су различите (јер су такве $A$ и $B$), па и оне "одређују"праву $q$, тј. $Q$ припада правој $CD$.

Преостаје да покажемо да је конструисани четвороугао заиста квадрат.

Најпре, $\mathcal{R}^{-1}_{O,90°}(B) = A$ одакле следи $OB \cong OA$ и $\angle BOA = 90°$, па је $AOB$ једнакокрако-правоугли троугао, са правим углом код темена $O$. Пошто је $\mathcal{S}_O(AOB) = COD$, следи да је и $COD$ једнакокрако-правоугли троугао, са правим углом код $O$.

Тачке $A$, $O$, $C$ су колинеарне, па је $\angle BOC = 90°$. Дужи $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ су подударне, па су такви и троуглови $AOB$, $BOC$, $COD$, $DOA$, са правим угловима код $O$.

Одавде следи $AB \cong BC \cong CD \cong DA$, при чену су углови $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $DAB$ сви прави ($\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 45° + 45° = 90°$, и сл.).

То управо значи да је $ABCD$ квадрат.

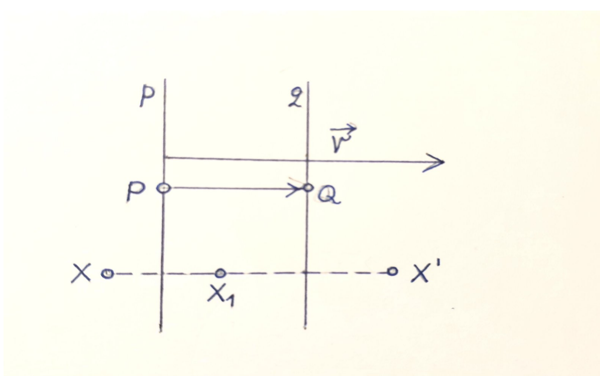
**Дискусија:** Сви кораци у конструкцији су јединствено изводиви при ма каквом положају неколинеарних тачака $O$, $P$, $Q$, што значи да задатак има јединствено решење.

## 2.6 Транслација

Транслација равни представља директну изометрију и као таква се може представити као композиција две осне рефлексије, с тим што су код транслације осе тих рефлексија паралелне и различите.

**Дефиниција 2.9** *Нека су $p$ и $q$ паралелне праве равни $E^2$ и $P$, $Q$ тачке тих правих редом, такве да је $PQ \perp p$. Композиција $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ зове се транслација те равни за вектор $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{PQ}$, у ознаци $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$.*

**Теорема 2.27** *Нека је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ транслација равни $E^2$ за вектор $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ ($P \in p$, $Q \in q$, $PQ \perp p$), а $X$ произвољна тачка те равни. Тада: $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}(X) = X_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{v}$.*




Слика 12:

**Теорема 2.28** *Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$ једнозначно је одређена вектором $\overrightarrow{v}$ и може се представити као композиција двају произвољних осних рефлексија којима су осе паралелне праве $p$ и $q$, такве да за неке две тачке $P \in p$, $Q \in q$, $PQ \perp p$, важи $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v}$.*

**Теорема 2.29** *Директна изометрија равни без фиксних тачака је транслација.*

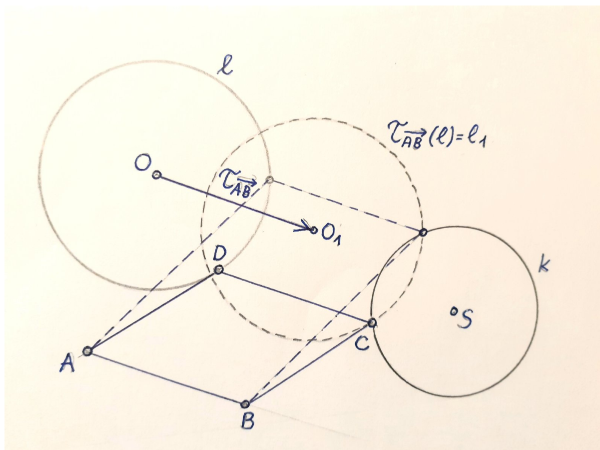
**Теорема 2.30** *Нека је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$ транслација равни за вектор $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{PQ}$. Тада: $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}} = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P$.*

Дакле, транслација је директна изометрија, као композиција две осне рефлексије и нема фиксних тачака. Јасно је да је инверзна трансформација транслације такође транслација за супротан вектор, као и да је композиција две транслације транслација за збирни вектор.

**Примена транслације у конструкцији**

**1.** Нека су $A$, $B$ две тачке и $k$, $l$ два круга неке равни. Конструисати паралелограм $ABCD$, тако да $C \in k$, $D \in l$.

**1. Анализа:** Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ пресликава тачку $D$ у тачку $C$. Пошто тачка $D$ припада кругу $l$, транслацијом круга $l$ за вектор $\overrightarrow{AB}$ добијамо круг $l_1$ који у пресеку са кругом $k$ даје тачку $C$. На тај начин смо добили другу страницу паралелограма $BC$.




Слика 13: Задатак 1

**Конструкција:** 1) $l_1 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(l)$; 2) $C \in l_1 \cap k$; 3) $D = \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}}(C)$.
**Доказ:** $C \in l_1 \cap k \Rightarrow C \in k$ (по конструкцији).
$\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}}(l_1) = l \Rightarrow \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}}(C) \in l \Rightarrow D \in l$
Дакле, тачке $C$ и $D$ припадају круговима $k$ и $l$. Такође важи:
$\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}}(C) = D \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow DC \cong AB \wedge DC \parallel AB$.
Тиме смо показали да је $ABCD$ паралелограм.
**Дискусија:** Ако је $|l_1 \cap k| = 0$ задатак нема решења.

Ако је $|l_1 \cap k| = 1$ задатак има једно решење.

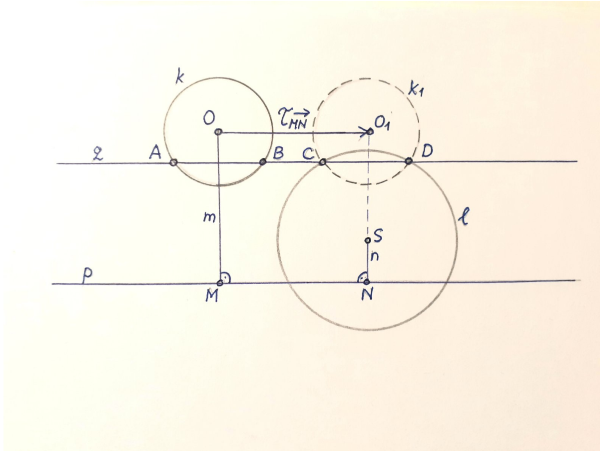
Ако је $|l_1 \cap k| = 2$ задатак има два решења.

Ако је $l_1 \equiv k$ задатак има бесконачно много решења

Осим тога, може се догодити да нека од пресечних тачака кругова $l_1$ и $k$ буде колинеарна са $A$ и $B$. Таква ситуација не даје паралелограм.

**2.** Нека је $p$ права, а $k$ и $l$ два круга неке равни. Конструисати праву паралелну правој $p$, тако да кругове сече у тачкама које одређују подударне тетиве.

**2. Анализа:** Нека је права $q$ паралелна са правом $p$ и нека сече кругове $k(O_1, r_1)$ и $l(O_2, r_2)$ у тачкама $A, B$ и $C, D$, тако да $AB \cong CD$.




Слика 14: Задатак 2

Нека су $M$ и $N$ подножја управних из центара кругова $k$ и $l$ на праву $p$. Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ пресликава тетиву $AB$ у тетиву $CD$ које припадају правој $q$.

**Конструкција:** 1) Конструишемо праве $m \ni O$ , $m \perp p$; $n \ni S$ , $n \perp p$;

2) $\{M\} = m \cap p$, $\{N\} = n \cap p$;

3) $k_1 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}(k)$;

4) $\{C, D\} = k_1 \cap l$;

5) $\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{MN}}(C, D) = A, B$;

6) $q = CD$.

Доказаћемо да је права $q$ паралелна са $p$ и да на круговима одсеца подударне тетиве.

**Доказ:** Према конструкцији је: $\{C, D\} = k_1 \cap l \Rightarrow C, D \in l$.

Такође $C, D \in k_1 \Rightarrow \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{MN}}(C, D) \in k \Rightarrow A, B \in k$.

Штавише, изометрија чува растојања, па важи и $AB \cong CD$.

С обзиром да су праве $m$ и $n$ по конструкцији управне на праву $p$, оне су управне и на вектор транслације $\overrightarrow{MN}$, па транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ слика $m$ у $n$, а тачку $O \in m$ у тачку $O_1 \in n$, која је центар круга $k_1$.

Кругови $k_1$ и $l$ секу се у $C$ и $D$, па је $O_1S \perp CD$ (центри припадају медијатриси дужи $CD$).

Но $O_1S \equiv n \Rightarrow n \perp CD$.

Како је и $n \perp p$, следи $CD \parallel p$, тј. $q \parallel p$.

Коначно, $M, N \in p$, па је ${\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}}^{-1}(q) = q$, што значи да $\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{MN}}(C, D) \in q \Rightarrow A, B \in q$.

Тиме је доказ завршен.

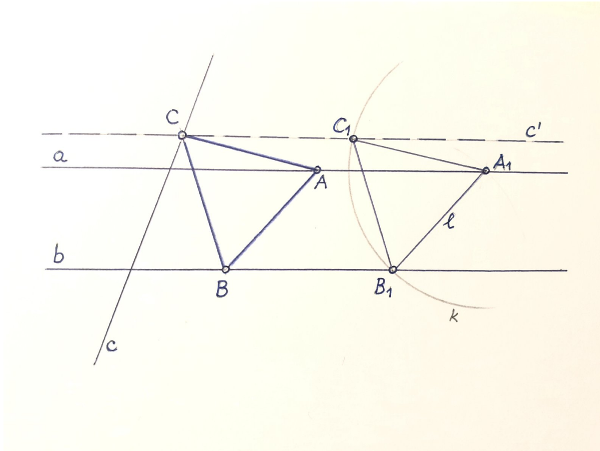
**Дискусија:** Ако је $|k_1 \cap l| = 0$ задатак нема решења.

Ако је $|k_1 \cap l| = 1$ задатак нема решења.

Ако је $|k_1 \cap l| = 2$ решење је јединствено (пресек кругова је једна од тетива).

Ако је $k_1 \equiv l$ задатак има бесконачно много решења (То ће се догодити ако су кругови $k$ и $l$ подударни и $OO_1 \parallel p$).

**3.** Нека су $a$ и $b$ две паралелне праве, $c$ права која их сече и $l$ дуж неке равни. Конструисати правилни троугао $ABC$ чија темена припадају датим правама редом, а ивица је подударна датој дужи $l$.




Слика 15: Задатак 3

**3. Анализа:** Најпре одредимо тачке $A_1 \in a$ и $B_1 \in b$ тако да је $A_1B_1 = l$, а затим и тачку $C_1$ тако да је троугао $A_1B_1C_!$ правилан. Потом кроз тачку $C_1$ конструишемо праву $c'$ паралелну са правама $a$ и $b$. Пресек правих $c$ и $c'$ је тачка $C$. Затим транслирамо троугао $A_1B_1C_!$ за вектор $\overrightarrow{C_1C}$

**Конструкција:** 1) Бирамо произвољну тачку $A_1 \in a$;

2) $\{B_1\} = k(A_1, l) \cap b$ ;

3) $\mathcal{R}_{A_1,60^\circ}(B_1) = C_1$;

4) Конструишемо праву $c_1 \ni C_1$, $c_1 \parallel a$ ;

5) $\{C\} = c_1 \cap c$

6) $\mathcal{T}_{\overrightarrow{C_1C}}(A_1, B_1, C_1) = A, B, C$

**Доказ:** Према конструкцији је: $A_1 \in a$, $B_1 \in b$, $|A_1B_1| = l$.

Такође имамо $\mathcal{R}_{A_1,60^\circ}(B_1) = C_1$, одакле следи да је $A_1B_1 \cong A_1C_1$ и $\angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$, тј. да је троугао $A_1B_1C_1$ правилан, са дужином ивице $l$.

Како је $c_1 \parallel a$ вектор $\overrightarrow{C_1C}$ је колинеаран правама $a$ и $b$ па су оне инваријантне при транслацији $\mathcal{T}_{\overrightarrow{C_1C}}$.

То значи да ће слике тачака $A_1$ и $B_1$ припадати правама $a$ и $b$, тј. $A \in a$ и $B \in b$.

Такође је према конструкцији $C \in c$

Пошто изометрије сликају фигуре у подударне фигуре, то је троугао $ABC$ правилан.

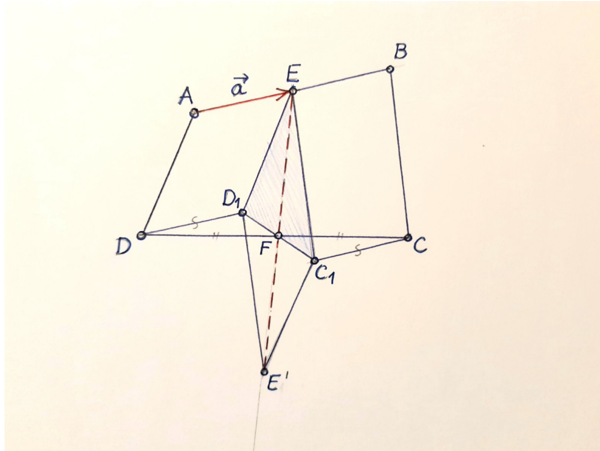
**Дискусија:** Неопходан услов да би конструкција троугла $A_1B_1C_1$ била могућа је да је дужина странице $l$ већа или једнака растојању $d(a, b)$.

Ако је $l = d(a, b)$ задатак има два решења (ротација додирне тачке је могућа у два смера).

Ако је $l > d(a, b)$ задатак има четири решења (по два решења за сваки смер ротације).

Транслација троугла $A_1B_1C_1$ у троугао $ABC$ је једнозначно одређена.

**4.** Конструисати четвороугао $ABCD$ када су познате дужине свих његових страница и дужина дужи $EF$ која спаја средишта две супротне странице.




Слика 16: Задатак 4

**4. Анализа:** Нека је тачка $E$ средиште странице $AB$, а тачка $F$ средиште странице $CD$ и нека је $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AE}$. Тада је:

$\mathcal{T}_{\overrightarrow{a}}(AD) = ED_1 \Rightarrow \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow DD_1 \cong AE \wedge DD_1 \parallel AE.$

$\mathcal{T}_{\overrightarrow{a}}^{-1}(BC) = EC_1 \Rightarrow \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{EB} \Rightarrow C_1C \cong EB \wedge C_1C \parallel EB.$

Из претходног закључујемо да је: $DD_1 \cong CC_1 \wedge DD_1 \parallel CC_1$, па су троуглови $DD_1F$ и $CC_1F$ подударни и $\angle D_1FD = \angle C_1FC$, па следи да су тачке $D_1$, $F$ и $C_1$ колинеарне. Троугао $EC_1D_1$ је могуће конструисати.

**Конструкција:** 1) $E' = \mathcal{S}_F(E)$;

2) Конструишемо паралелограм $EC_1E'D_1$ (позната дијагонала и све четири странице);

3) Конструишемо троугао $D_1DF$ и троугао $C_1CF$;

4) Конструишемо тачке $A$ и $B$;

**Доказ:** На основу анализе и конструкције заснива се доказ.

**Дискусија:** Решење је јединствено.

## 2.7 Клизајућа рефлексија

Остало нам је још да размотримо случај композиције три осне рефлексије ако осе тих рефлексија не припадају једном прамену.

**Дефиниција 2.10** *Нека је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$ транслација за вектор $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{PQ}$, а $\mathcal{S}_{PQ}$ осна рефлексија равни $E^2$. Композиција $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}} \circ \mathcal{S}_{PQ}$ зове се клизајућа рефлексија равни $E^2$ са осом $PQ$ и за вектор $2\overrightarrow{PQ}$, у ознаци $\mathcal{G}_{2\overrightarrow{PQ}}$. $\mathcal{G}_{2\overrightarrow{PQ}} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{PQ}} \circ \mathcal{S}_{PQ}$*

Клизајућа рефлексија је једнозначно одређена својом осом и вектором. Транслација и осна рефлексија комутирају јер имају заједничку осу $PQ$, а такође и одговарајуће осне рефлексије комутирају јер је $p \perp PQ$ и $q \perp PQ$

$\mathcal{T}_{\overrightarrow{v}} \circ \mathcal{S}_{PQ} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{PQ} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_PQ \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{v}}$

Дакле, клизајућа рефлексија се може представити као композиција три осне рефлексије, при чему је оса једне осне рефлексије управна на друге две.

С обзиром да је транслација равни директна, а осна рефлексија индиректна изометрија, њихова композиција је индиректна изометрија.

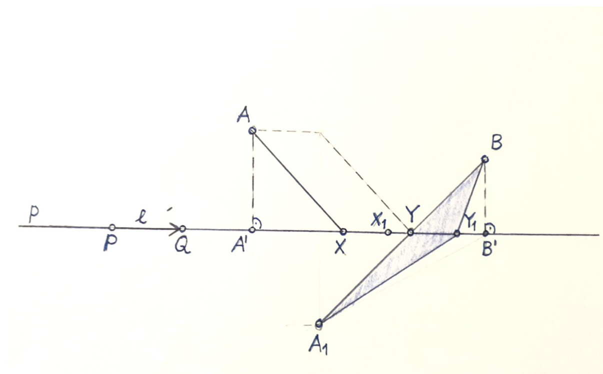
**Теорема 2.31** *Клизајућа рефлексија је индиректна изометрија без фиксних тачака.*

**Теорема 2.32** *Нека су $p$, $q$, $r$ праве равни $E^2$ које не припадају истом прамену. Тада композиција $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ представља клизајућу рефлексију те равни.*

**Теорема 2.33** *Свака индиректна изометрија равни без фиксних тачака је клизајућа рефлексија те равни.*

**Примена клизајуће рефлексије у конструкцијама**

**1.** Нека је $p$ права, $A$ и $B$ тачке са исте стране те праве и $l$ дуж неке равни. Одредити на тој правој тачке $X$ и $Y$ тако да $XY \cong l$ и збир $|AX| + |XY| + |YB|$ буде минималан.




Слика 17: Задатак 1

**1. Анализа:** Нека је вектор $\overrightarrow{PQ}$ чији је интензитет дужина дужи $l$, правац одређен правом $p$ , а смер положајем тачака $A$ и $B$.

Клизајућом рефлексијом дужи $AX$ са осом $p$ за вектор $\overrightarrow{PQ}$ дуж $AX$ се слика у $A_1Y$.

Инверзном клизајућом рефлексијом $\mathcal{G}^{-1}_{\overrightarrow{PQ}}$ тачка $Y$ се слика у тачку $X$.

**Конструкција:** 1) Конструишемо тачке $A', B' \in p$ , $AA' \perp p$ , $BB' \perp p$ ;

2) Одаберемо произвољну тачку $P \in p$;

3) Конструишемо тачку $Q \in p$, $\overrightarrow{PQ} = |l| \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{|A'B'|}$

4) $A_1 = \mathcal{G}_{\overrightarrow{PQ}}(A)$; 5) $\{Y\} = BA_1 \cap p$; 6) $X = \mathcal{G}^{-1}_{\overrightarrow{PQ}}(Y)$.

Доказаћемо да овако одређене тачке задовољавају тражени захтев.

**Доказ:** Пре свега, из конструкције је очигледно да $X, Y \in p$ и $XY \cong PQ \cong l$.

Треба одмах приметити да избор тачке $Q$ на правој $p$ не одређује само дужина дужи $l$, већ и позиција тачака $A$ и $B$. Наиме, вектор клизања мора да нас води „ка"тачки $B$, а не да нас од ње удаљава, што обезбеђује трећи корак у конструкцији, одређујући тачку $Q$ тако да вектори $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ буду исто усмерени. ($\overrightarrow{A'B'}/|A'B'|$ је орт вектора $\overrightarrow{A'B'}$).

Нека је $Y_1$ произвољна тачка праве $p$, а $X_1 = \mathcal{G}^{-1}_{\overrightarrow{PQ}}(Y_1)$. На основу основних особина изометрија и неједнакости троугла имамо (као што се тражило):

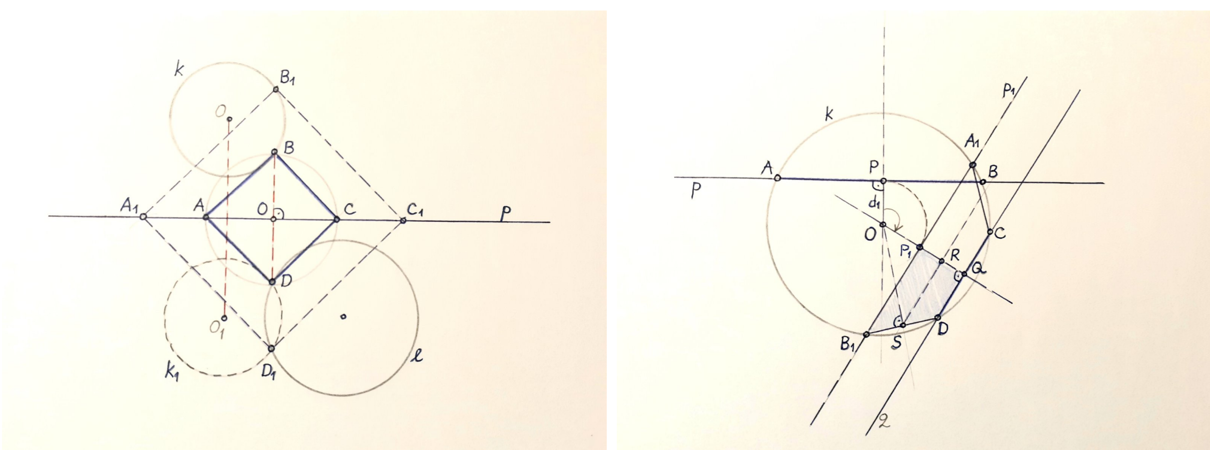
$$\begin{array}{rcccl} |AX_1| + |X_1Y_1| + |Y_1B| & = & |\mathcal{G}_{\overrightarrow{PQ}}(AX_1)| + |l| + |Y_1B| & = & |l| + |A_1Y_1| + |Y_1B| \\ & \geq & |l| + |A_1B| & = & |l| + |A_1Y| + |YB| \\ & = & |XY| + |\mathcal{G}^{-1}_{\overrightarrow{PQ}}(A_1Y)| + |YB| & = & |AX| + |XY| + |YB| \end{array}$$

**Дискусија:** Задатак има јединствено решење, јер је тачка $A_1$ једнозначно одређена клизајућом рефлексијом, а пресек дужи $A_1B$ и праве $p$ је јединствен.

## 2.8 Разни задаци

**1.** Нека су $k$ и $l$ кругови са разних страна праве $p$ неке равни. Конструисати квадрат $ABCD$ коме темена $A$ и $C$ припадају правој $p$, а темена $B$ и $D$ круговима $k$ и $l$.

**1. Анализа:** Дијагонале квадрата су међусобно подударне, нормалне и полове се у центру квадрата $O$. Ако крајње тачке дијагонале $BD$ припадају круговима $k$ и $l$, редом онда је права $p$, којој припадају крајње тачке дијагонале $AC$, медијатриса дужи $BD$ (тачке $B$ и $D$ су осно симетричне у односу на праву $p$). Осном рефлексијом дужи $AB$ у односу на праву $p$ тачка $B$ се слика у тачку $D$. Како тачка $B$ припада кругу $k$, то ћемо осном рефлексијом круга $k$ добити слику $k_1$, а у пресеку кругова $k_1$ и $l$ тачку $D$.




Слика 18: Задатак 1 и задатак 2

**Конструкција:** 1) Конструишемо $k_1 = \mathcal{S}_p(k)$;
2) $D \in k_1 \cap l$;
3) $B = \mathcal{S}_p^{-1}(D)$;
4) $O = BD \cap p$;
5) $\mathcal{R}_{O,90^\circ}(B,D) = A, C$.
**Доказ:** $D \in l$, по конструкцији.

$B = \mathcal{S}_p^{-1}(D) \Rightarrow B \in \mathcal{S}_p^{-1}(k_1 \cap l) \Rightarrow B \in \mathcal{S}_p^{-1}(k_1) = k.$

Рефлексија $\mathcal{S}_p$ слика $B$ у $D$, па је $p$ медијатриса дужи $BD$ и $p \perp BD$.

Тачка $O$ пак припада правој $p$, па ротација $\mathcal{R}_{O,90^\circ}$ слика тачке $B$ и $D$ у тачке $A$ и $C$ на правој $p$.

С обзиром да је $O$ и средиште дужи $BD$, на основу особина ротације $\mathcal{R}_{O,90^\circ}$ важи $OB \cong OD \cong OA \cong OC$, као и $\angle BOA = \angle DOC = 90^\circ$, па је и $\angle COB = \angle AOD = 90^\circ$ тј. троуглови $BOA$, $DOC$, $COB$ и $AOD$ су међусобно подударни и сви једнакокрако-правоугли, што значи да четвороугао $ABCD$ заиста представља квадрат.

**Дискусија:** Ако је $|k_1 \cap l| = 0$ задатак нема решења.

Ако је $|k_1 \cap l| = 1$ задатак има једно решење.

Ако је $|k_1 \cap l| = 2$ задатак има два решења.

Ако је $k_1 \equiv l$ задатак има бесконачно много решења .

**2.** Нека су $p$ и $q$ праве, $l$ дуж и $O$ тачка једне равни. Конструисати круг $k$ са центром у $O$ тако да на правама $p$ и $q$ одсеца дужи $AB$ и $CD$ редом, такве да је $AB + CD \cong l$.

**2. Анализа:** Претпоставимо да је задатак решен. Нека су $P$ и $Q$ подножја управних из тачке $O$ на праве $p$ и $q$, $d_1$ и $d_2$ растојања тачке $O$ до правих $p$ и $q$, а $\omega$ конвексни угао $\angle POQ$. Нека је $d_1 \leq d_2$ не умањујући општост.

Ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ слика круг у самог себе, а тетиву $AB$ у тетиву $A_1B_1$, паралелну тетиви $CD$, тј. четвороугао $A_1B_1DC$ је трапез.

Нека је $P_1$ слика тачке $P$, $R$ средиште дужи $P_1Q$, а $RS$ средња линија трапеза $P_1B_1DQ$. Она има дужину $\dfrac{l}{4}$ и могуће ју је конструисати.

Такође $B_1D \perp OS$, па се до тачке $D$ лако долази, у пресеку нормале на $OS$ у $S$ и праве $q$.

**Конструкција:** 1) Конструишемо праве $m$ и $n$, $m \perp p$, $m \ni O$, $n \perp q$, $n \ni O$;

2) $P = m \cap p$, $Q = n \cap q$;

3) $p_1 = \mathcal{R}_{O,\omega}(p)$, $P_1 = \mathcal{R}_{O,\omega}(P)$;

4) Конструишемо тачку $R$, као средиште дужи $P_1Q$;

5) Конструишемо тачку $S$, $RS \perp P_1Q$, $RS \cong \dfrac{l}{4}$;

6) Конструишемо праву $s$, $s \ni S$, $s \perp OS$;

7) $D = s \cap q$;

8) Конструишемо круг $k(O, |OD|)$.

Доказаћемо да овај круг задовољава тражени захтев.

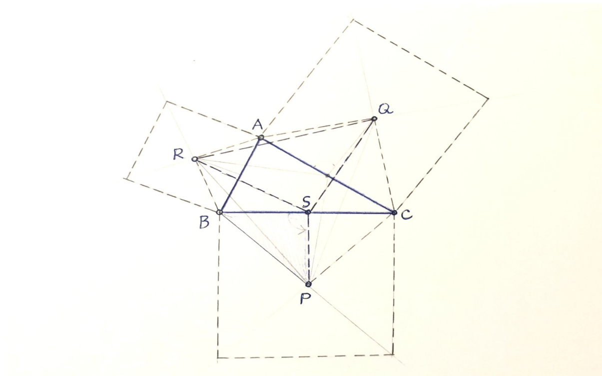
**Доказ:** Избор угла ротације обезбеђује да праве $p_1$ и $q$ буду паралелне. Круг $k$ сече праву $p_1$ у тачкама $B_1$ и $A_1$, а дуж $RS$ је средња линија трапеза $P_1B_1DQ$, па је $P_1B_1 + DQ \cong \dfrac{l}{2}$, тј. $A_1B_1 + DC \cong l$, где је $C$ друга пресечна тачка круга $k$ са правом $q$.

Како је $p = \mathcal{R}_{O,\omega}^{-1}(p_1)$, а ротације чувају дужине и пресеке, тачке $A$ и $B$ ће, као инверзне слике тачака $A_1$ и $B_1$, бити у пресеку круга $k$ и праве $p$, при чему $AB + DC \cong l$.

**Дискусија:** Да би обе дужи $AB$ и $CD$ постојале, требало би да се тачке $D$ и $S$ нађу са исте стране праве $OQ$. У граничном случају $D \equiv Q$, а круг $k$ на правој $p$ одсеца дуж

$AB \cong l$, а другу праву додирује. Уколико је дуж $l$ краћа од оне која постиже гранични случај, круг неће имати додирних тачака са правом $q$.

**3.** Дате су неколинеарне тачке $P$, $Q$, $R$. Конструисати троугао $ABC$, тако да $P$, $Q$, $R$ буду средишта квадрата конструисаних над ивицама троугла у његовој спољашњости.




Слика 19: Задатак 3

**3. Анализа:** Претпоставимо да троугао $ABC$ задовољава услове задатка. Троугао $ABC$ и троугао $PQR$ су исто оријентисани.

$\mathcal{R}R, 90^{\circ -1}(A) = B$; $\mathcal{R}P, 90^{\circ -1}(B) = C$; $\mathcal{R}Q, 90^{\circ -1}(C) = A$; $\mathcal{J} = \mathcal{R}P, 90^\circ \circ \mathcal{R}Q, 90^\circ \circ \mathcal{R}R, 90^\circ(B) = B$

Слагање $\mathcal{R}P, 90^\circ \circ \mathcal{R}Q, 90^\circ \circ \mathcal{R}_{R,90^\circ}$ (при чему су сви углови позитивне оријентације) представља такође ротацију, која има фиксну тачку $B$.

Нека су прве $r$ и $q$такве да $r \ni R$, $\angle QRr = 45^\circ$ и $q \ni Q$, $\angle RQq = 45^\circ$ и $\{S\} = r \cap q$

Тада је $\angle RSQ = 90^\circ$, па је троугао $QRS$ једнакокрако-правоугли.

Тачку $B$ је могуће конструисати као треће теме троугла $PSB$ ($\angle BSP = 90^\circ$, $\angle SPB = 45^\circ$).

**Конструкција:**

1) Конструишемо тачку $S$, као треће теме троугла $QRS$, са позитивно оријентисаним угловима $\measuredangle SRQ = 45^\circ$, $\measuredangle RQS = 45^\circ$;

2) Конструишемо тачку $B$, као треће теме троугла $PSB$, са позитивно оријентисаним угловима $\measuredangle BSP = 90^\circ$, $\measuredangle SPB = 45^\circ$;

3) $\mathcal{R}P, 90^{\circ -1}(B) = C$; 4) $\mathcal{R}Q, 90^{\circ -1}(C) = A$.

**Доказ:** Треба показати да су $P$, $Q$, $R$ заиста центри квадрата над одговарајућим ивицама троугла $ABC$.

На основу конструкције је: $\mathcal{R}^{-1}_{P,90^\circ}(B) = C \Rightarrow PB \cong PC, \angle BPC = 90^\circ$, па је троугао $BPC$ једнакокрако-правоугли са правим углом код темена $P$, тј. $P$ је центар квадрата над ивицом $BC$.

Такође на основу конструкције је: $\mathcal{R}^{-1}_{Q,90^\circ}(C) = A \Rightarrow QC \cong QA, \angle CQA = 90^\circ$, па је и троугао $CQA$ једнакокрак, и са правим углом код темена $Q$, тј. $Q$ је центар квадрата над ивицом $CA$.

По теореми о композицији ротација, за слагање $\mathcal{R}P, 90^\circ \circ \mathcal{R}Q, 90^\circ \circ \mathcal{R}R, 90^\circ$ важи:

$$\mathcal{R}P, 90^\circ \circ \mathcal{R}Q, 90^\circ \circ \mathcal{R}R, 90^\circ = \mathcal{R}P, 90^\circ \circ (\mathcal{R}Q, 90^\circ \circ \mathcal{R}R, 90^\circ) = \mathcal{R}P, 90^\circ \circ \mathcal{R}S, 180^\circ = \mathcal{R}B, 270^\circ \quad (1)$$

при чему је тачка $S$ треће теме троугла $QRS$ ($\measuredangle SRQ = 45^\circ$, $\measuredangle RQS = 45^\circ$), а тачка $B$ треће теме троугла $PSB$ ($\measuredangle BSP = 90^\circ$, $\measuredangle SPB = 45^\circ$), по конструкцији.

Коначно имамо:

$$\mathcal{R}P, 90^\circ \circ \mathcal{R}Q, 90^\circ \circ \mathcal{R}R, 90^\circ = \mathcal{R}B, 270^\circ \Leftrightarrow \mathcal{R}R, 90^\circ = \mathcal{R}Q, 90^{\circ -1} \circ \mathcal{R}P, 90^{\circ -1} \circ \mathcal{R}B, 270^\circ$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}R, 90^\circ(B) = \mathcal{R}Q, 90^{\circ -1} \circ \mathcal{R}P, 90^{\circ -1} \circ \mathcal{R}B, 270^\circ(B) = \mathcal{R}Q, 90^{\circ -1} \circ \mathcal{R}P, 90^{\circ -1}(B) = \mathcal{R}^{-1}_{Q,90^\circ}(C) = A$$

одакле $RB \cong RA, \angle BRA = 90^\circ$, па је и троугао $BRA$ једнакокрако-правоугли са правим углом код темена $R$, тј. и $R$ је центар квадрата над ивицом $AB$.

**Дискусија:** Слагање три ротације даје јединствену ротацију $\mathcal{R}_{B,270^\circ}$, па и јединствено теме $B$. Конструкција друга два темена је онда изнуђена, па је решење јединствено.

## Закључак

Циљ овог рада ми је био да покажем како се уз помоћ изометрија прецизно конструишу дводимензионални објекти. Изометрија олакшава разумевање просторних односа и класична конструкција без ње би у многим наведеним примерима захтевала више труда.

# Литература:


Лучић З. (1997). Еуклидска и хиперболичка геометрија. Београд: Математички факултет

Митровић М.; Огњановић С.; Вељковић М.; Петковић Љ.; Лазаревић Н. (2013). Геометрија за први разред Математичке гимназије. Београд: Круг

Лопандић Д. (2011) Геометрија, Завод за уџбенике Београд