МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

-из математике-

Дезаргова теорема у еуклидској и пројективној геометрији

Ментор: Јелена Јевремовић
Ученик: Маша Максимовић, IVд

Београд, 2020.

Садржај

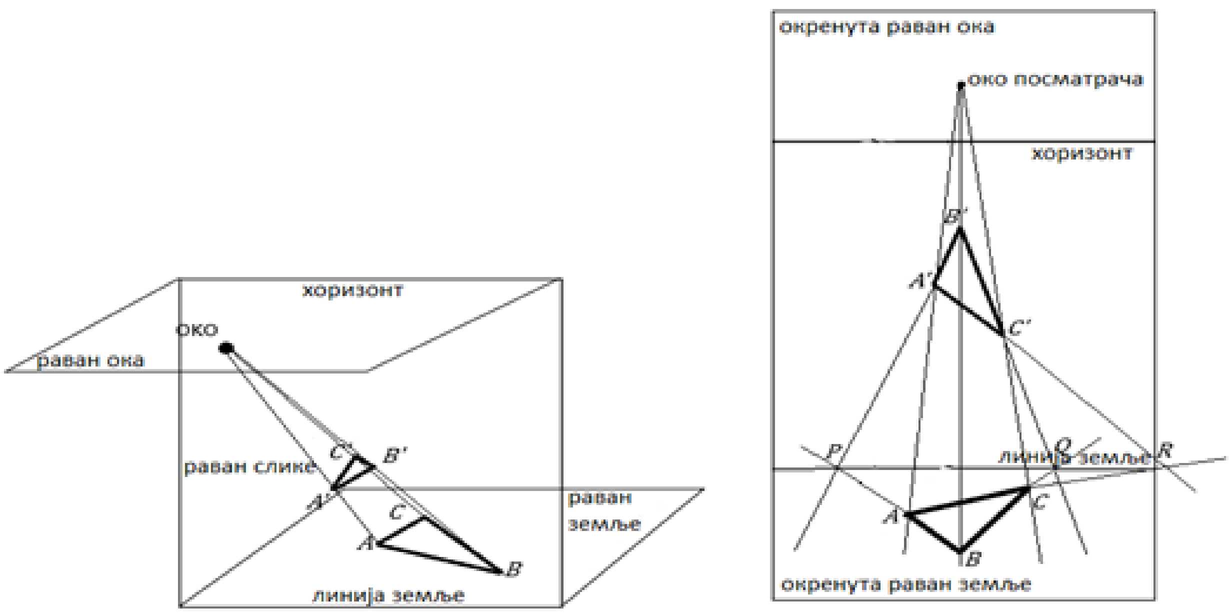
1 Увод

Од давнина су људи тежили ка томе да са једне стране што прецизније, а са друге стране што једноставније, дефинишу геометрију онога што видимо, наш простор. Међу првима који су успјели у томе је био грчки метематичар Еуклид (IV вијек п.н.е), који је у својој књизи „Елементи“ геометрији приступио на аксиоматски начин. То подразумијева да се читава теорија заснива на одређеним правилима – аксиомама, које се као такве узимају као чињенице из којих се даље гради теорија. Његове аксиоме се заснивају на људском опажању и искуству, да би нам сама теорија била што јаснија и приближнија.

Међутим, проблем се јавља у 15. вијеку када еуклидска геометрија није довољна да објасни перспективу[1], која је тада била врло популарна у сликарству. Наиме, сликари су се питали како да одређени просторни објекат што реалније пренесу на раван папира.

Велики допринос тој теми даје Дезарг[2] у 16. вијеку гдје тврди да се двије паралелне праве сијеку у некој тачки у бесконачности, што је објашњавало како да се илуструје дубина на равном цртежу. Узимајући то у обзир, он каже да ако двије фигуре имају центар (тачку) перспективе, онда оне имају и осу (праву) перспективе. Тако дефинисани објекти перспективе (центар и оса) су били довољни сликарима да помоћу њих насликају одређене 3D цртеже на равном папиру.

Ову причу ћемо најбоље појаснити на примјеру.



На слици видимо три равни: *раван ока* (посматрача), *раван земље* (она ограничава наш видокруг), која је, ради једноставности, паралелна са равни посматрача, и *раван цртежа* која је нормална на претходне двије равни. Изаберимо произвољан троугао ABC који припада равни земље и пројектујмо га на раван цртежа тако да његова тјемена у тој равни буду у пресјеку равни цртежа са зрацима који спајају око посматрача са тјеменима троугла ABC. Обиљежимо тјемена новодобијеног троугла са A', B', C'. Дакле, троугао ABC можемо представити као троугао $A'B'C'$ с тим да их видимо на исти начин. Међутим, када продужимо, на примјер, праву AB у равни земље, њене удаљеније тачке ће се пресликавати све ближе линији хоризонта, односно, њена најдаља тачка ће се сликати баш на линији хоризонта у неку тачку. Исто тако, најудаљенија тачка неке праве паралелне правој AB ће се сликати у исту ту тачку, што нам рјешава проблем цртања "даљине".

[1] Перспектива представља цртање илузије просторне дубине, онако како то видимо, на раван (папир).
[2] Girard Desargues (1591-1661) – француски математичар, инжињер, архитекта.

Даље, када „исправимо“ ове три равни у једну раван, видимо да се одговарајуће странице ових троуглова сијеку у три тачке које су колинеарне. Одавде видимо да је око посматрача, у ствари, центар перспективе, а линија која је у пресјеку равни цртежа и равни земље је оса перспективе. Дезаргова теорема говори баш о тим својствима перспективе: *„Двије фигуре су перспективне у осносу на тачку акко су оне перспективне у односу на праву.“* Ове особине перспективе су ријешиле све проблеме сликара, и помогле им да их успјешно исцртавају, чиме је сликарство у том периоду доживјело значајан процват.

Како је ова теорема настала ради примјене у сликарству и архитектури, она се и данас примјењује и на модерније начине - у графичком дизајну, приликом израде цртежа.

На тај начин настаје пројективна геометрија, која је, дакле, рјешавала проблем перспективе.

У првом поглављу ћемо се бавити само пројективном геометријом и Дезарговом теоремом у њој. Увешћемо основе ове геометрије, упознати се са нотацијом и ознакама приликом грађења теорије и напослијетку доказати теорему. Већински ћемо се бавити геометријом у равни. Дефинисаћемо Дезаргову раван као ону у којој важи Дезаргова теорема. На крају ћемо дефинисати и пројективни простор у коме је, како ћемо и показати, свака раван заправо Дезаргова. Видјећемо да је Дезаргова теорема природна особина ове геометрије.

Даље ћемо показати Дезаргову теорему и у еуклидској геометрији, као специјалном случају пројективне геометрије. Наслућујемо да ће постојати разлика у односу на пројективну геометрију – постојање паралелних правих.

И на крају, видјећемо како се ова теорема користи у задацима.

2 Пројективна геометрија

Као што смо раније напоменули, пројективна геометрија је настала из проблема перспективе у умјетности. За њеног оснивача се узима Дезарг јер је први увео појам бесконачне тачке, што је једна од битнијих особина ове геометрије. Како бисмо увели Дезаргову теорему, прво ћемо поставити основе пројективне геометрије, да би доказ теореме био у потпуности јасан. Наиме, кренућемо *од нуле*, односно аксиоматским уводом.

Прије него што кренемо са увођењем аксиома, потребно је да се упознамо са неким основним појмовима и ознакама које ћемо користити током овог поглавља. Имаћемо два основна скупа и обиљежаваћемо их са $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$. Елементи скупа $\mathcal{T}$ су *тачке* и означаваћемо их великим латиничним словима $A, B, C \ldots$, а елементи скупа $\mathcal{P}$ су *праве* и означаваћемо их малим латиничним словима $a, b, c \ldots$ Између ова два скупа уводимо основну релацију $\mathcal{I}$ коју зовемо *релација инциденције* (однос између елемената скупа $\mathcal{T}$ и елемената скупа $\mathcal{P}$).

Наиме, реченица *„Тачка A је инцидентна са правом a“* се записује са $A\mathcal{I}a$, односно са $(A, a) \in \mathcal{I}$. Еквивалентно томе можемо рећи *„Права a је инцидентна са тачком A“* и то записујемо са $a\mathcal{I}A$. Међутим, често се у интуитивној равни (о њој ће бити ријечи касније) користи интуитиван начин изражавања, баш као што то радимо у euклидској геометрији. На примјер, претходне реченице имају исто значење као и *„Тачка A лежи на правој a“* или *„Тачка A припада правој a“* у ознаци $A \in a$, односно *„Права a садржи тачку A“* или *„Права a пролази кроз тачку A“* у ознаци $a \ni A$. Ако тачка A није инцидентна са правом a, то обиљежавамо са $(A, a) \notin \mathcal{I}$. Интуитивно, та негација се може исказати као *„не припада“*, *„не садржи“*, *„не лежи“*, *„не пролази кроз“* и означава се са $A \notin a$.

Даље, ако постоји права која је инцидентна са неколико тачака, за те тачке кажемо да су *колинеарне*. Аналогно, ако постоји тачка која је инцидентна са неколико различитих правих, онда су те праве *конкурентне*, односно можемо да кажемо да су те праве конкурентне у одређеној тачки.

Напокон смо спремни за аксиоматски увод у пројективну геометрију. Прво ћемо говорити о планарној геометрији, те ћемо се на крају осврнути на геометрију у простору.

2.1 Аксиоме пројективне равни

За почетак, као што је то случај у било којој геометрији, уводимо аксиоме инциденције (аксиоме везе). Исто тако је пракса да се најприје уводи сљедећа аксиома:

Аксиома 1 *Постоји јединствена права која је инцидентна са двије различите тачке.*

За различите тачке A и B, јединствену праву из Аксиоме 1 која је инцидентна са њима називамо *спојницом* тачака A и B у ознаци $A{\vee}B$. На тај начин смо добили операцију *спајања* која двјема различитим тачкама додјељује одговарајућу праву, њихову спојницу.

Као непосредну посљедицу Аксиоме 1 добијамо то да праву одређују било које двије њене тачке. Односно, ако су C и D тачке које су инцидентне са правом $A{\vee}B$, онда су тачке A и B инцидентне са правом $C{\vee}D$. Такође важи да су двије различите праве инцидентне са највише једном заједничком тачком, јер у случају да су инцидентне са двије различите тачке, те двије тачке јединствено одређују праву па добијамо контрадикцију. Додатно можемо да кажемо да су сваке двије тачке колинеарне.

Занимљива одлика пројективне геометрије је симетрија појмова тачка и права у дефиницијама и теоремама. Та симетрија чини ову геометрију апстрактном у односу на наша свакодневна опажања и зато једини начин да јој приступимо јесте кроз језик. Наиме, свако тврђење у пројективној равни можемо измијенити тако што замијенимо мјеста ријечима тачка и права, уз додатне граматичке исправке.

Дефиниција 1 *Дуално тврђење неком тврђењу је тврђење које се добија замјеном ријечи тачка и права у почетном тврђењу.*

Прецизније, у сваком тврђењу се ријеч „права" замјењује ријечју „тачка" и обрнуто, ријеч „тачка" се замјењује ријечју „права". Поред тога, морамо да обратимо пажњу на додатне термине које морамо да измијенимо. На примјер, морамо да замијенимо „лежи на" са „пролази кроз", „припада" са „садржи" и „колинеарно" са „конкурентно". Ова симетрија између скупова $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ се огледа у сљедећем тврђењу.

Тврђење 1 ***(Принцип дуалности)*** *Ако је неко тврђење теорема, онда је њему дуално тврђење такође теорема.*

Доказ овог тврђења се врши провјером дуалних тврђења за све аксиоме које граде одређену теорију, које свакако важе ако је Принцип дуалности на снази. Наиме, ако је неко тврђење теорема, оно је изведено из аксиома. Уколико читаво то извођење распишемо помоћу дуала аксиома, добијамо њему дуално тврђење, односно теорему.

На основу тога, Принцип дуалности важи ако и само ако је дуал сваке аксиоме тачан. Како бисмо Принцип дуалности увијек имали на снази, уводимо дуал Аксиоме 1 као нову аксиому:

Аксиома 2 *Постоји јединствена тачка која је инцидентна са двије различите праве.*

Дакле, имамо још једну интересантну особину пројективне геометрије. Наиме, сваке двије праве имају заједничку пресјечну тачку, док је у еуклидској геометрији постојање паралелних правих условљено аксиомом паралелности (Плејферовом аксиомом, која је формулисана у наредном поглављу) и оне немају заједничку пресјечну тачку. Ово је још један доказ да је пројективна геометрија нама као таква апстрактна.

За различите праве a и b, јединствену тачку из Аксиоме 2 која је инцидентна са њима називамо *сјециште* (пресјечна тачка) правих a и b и обиљежавамо је са $a \wedge b$. На тај начин смо добили операцију *сјечења* која двјема различитим правама додјељује одговарајућу тачку, њихово сјециште.

Примијетимо да су спајање и сјечење дуалне операције, односно спојница и сјециште су дуални појмови.

Како ове аксиоме тривијално важе за $\mathcal{I} = \mathcal{P} = \mathcal{T} = \emptyset$, потребно је да обезбиједимо егзистенцију основних објеката од којих можемо постепено да градимо теорију. То нам даје сљедећа аксиома.

Аксиома 3 *Постоје четири тачке међу којима нема три колинеарне.*

Поред тога што Аксиома 3 елиминише тривијални случај са празним скуповима објеката, тако и елиминише још неке нама неинтересантне случајеве. Наиме, то су дегенерисане равни и имамо их два типа (двије фамилије). Прва фамилија дегенерисаних равни подразумијева постојање само одређеног броја колинеарних тачака и једне која није колинеарна са њима. Друга фамилија дегенерисаних равни подразумијева да су све тачке у њој колинеарне. Ово свакако нису случајеви на којима бисмо се задржавали.

Дефиниција 2 *Пројективна раван је модел система* $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ *који испуњава Аксиоме 1, 2, и 3.*

Дакле, пројективна раван је систем тачака и правих са релацијом инциденције који испуњава ове три аксиоме.

Сада нам преостаје да видимо како Принцип дуалности утиче на Аксиому 3. Како су Аксиоме 1 и 2 једна другој дуалне, треба да провјеримо да ли важи дуал Аксиоме 3, односно, да ли постоје четири праве међу којима нема три конкурентне?

Како по Аксиоми 3 постоје тачке A, B, C и D међу којима нема три колинеарне, оне морају бити различите. У супротном, имали бисмо, без умањења општости, тачке A и B које су исте и тачку C, која је различита од A и B. Тада тачке A и B, односно A и C одређују јединствену праву, па су ове три тачке колинеарне, што даје контрадикцију.

Даље, по Аксиоми 1 постоје праве $A \vee B$, $B \vee C$, $C \vee D$ и $D \vee A$ и испоставља се да оне испуњавају задате услове. Претпоставимо супротно, да међу њима постоје три које су конкурентне и нека су то, без умањења општости, $A \vee B$, $B \vee C$ и $C \vee D$ и нека су оне инцидентне са неком тачком S. У случају да је $S = B$, због $S\mathcal{I}(C \vee D)$ добијамо да су B, C и D колинеарне, што даје контрадикцију. Онда је, дакле, $S \neq B$ и одатле из $S\mathcal{I}(A \vee B)$ и $S\mathcal{I}(B \vee C)$ добијамо $(A \vee B) = (S \vee B)$ и $(B \vee C) = (S \vee B)$, односно $(A \vee B) = (B \vee C)$, па су A, B и C колинеарне, што је контрадикција. Овиме смо показали да уколико је $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ пројективна раван, онда је и $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{I})$ пројективна раван, чиме смо доказали сљедећу теорему.

Теорема 1 *У пројективној равни важи Принцип дуалности.*

Принцип дуалности нам омогућује да се у даљој надоградњи теорије пројективне геометрије добијају углавном нови резултати, што је свакако пожељно, односно број теорема се удвостручује. Овиме смо поставили темеље пројективне равни.

2.2 Интуитивна пројективна раван

Како бисмо боље схватили пројективну раван, која је, како смо видјели, прилично апстрактна, у овом поглављу ћемо надоградњом еуклидске равни да је приближимо. То ће бити ефикасан метод јер, као што знамо, еуклидска геометрија даје прилично добар опис стварног свијета који је заснован на нашем геометријском опажању и искуству. Потреба за надоградњом еуклидске равни произилази из чињенице да у њој не важи Аксиома 2, па еуклидска раван, онаква какву је знамо, није пројективна раван.

Прво ћемо се одрећи метричке структуре и задржаћемо само концепт инциденције, при чему добијамо геометрију афине[3] равни. Нека је $\mathbb{E} = (\mathcal{T}_{\mathbb{E}}, \mathcal{P}_{\mathbb{E}}, \mathcal{I}_{\mathbb{E}})$ еуклидска афина раван, гдје су $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ тачке, $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ праве и $\mathcal{I}_{\mathbb{E}}$ њена релација инциденције.

Да бисмо реализовали пројективну раван, овај модел мора да испуњава раније уведене релације инциденције. Наиме, како бисмо задовољили Аксиому 2, морамо да уведемо неке тачке у којима ће се сјећи паралелне праве. То ћемо постићи тако што праменове[4] правих у равни $\mathbb{E}$ прогласимо за тачке нове равни. То значи да се прамен конкурентних правих које се сијеку у некој тачки из $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ поистовјећује са том тачком. Како у еуклидској равни имамо два типа праменова правих: прамен конкурентних правих и прамен паралелних правих, претходним увођењем тачака у нову раван је Аксиома 2 задовољена у оба случаја. Дакле, увели смо нови скуп тачака гдје су оне праменови правих у $\mathbb{E}$, скуп правих смо задржали, а релацију инциденције уводимо на сљедећи начин: неки прамен (тачка нове равни) ће бити инцидентнан са правом уколико је садржи, односно ако је та права једна од оних из почетног прамена.

На овај начин свакој правој придружујемо додатну тачку која представља прамен правих паралелних са њом. Зато су паралелне праве инцидентне са заједничком тачком коју зовемо *бесконачна тачка*. Прецизније, свака права $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}$, осим регуларних тачака које јој припадају, садржи и бесконачну тачку коју формално обиљежавамо са $\infty_{[p]}$, гдје је $[p]$ класа еквиваленције свих правих паралелних са p. Додатно, уводимо бесконачну праву која садржи све бесконачне тачке и формално је обиљежавамо са u_{∞}. Слиједе формалне дефиниције ових скупова:

$$\mathcal{T}_{\infty} = \mathcal{T}_{\mathbb{E}} \cup \{\infty_{[p]} | p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}\}, \mathcal{P}_{\infty} = \mathcal{P}_{\mathbb{E}} \cup \{u_{\infty}\}, \mathcal{I}_{\infty} = \mathcal{I}_{\mathbb{E}} \cup \{(\infty_{[p]}, p), (u_{\infty}, p) | p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}\}$$

За овако конструисан модел $\mathbb{EP}^2 = (\mathcal{T}_{\infty}, \mathcal{P}_{\infty}, \mathcal{I}_{\infty})$ морамо провјерити да ли испуњава све аксиоме пројективне равни.

[3]Афина геометрија представља оно шта остане од еуклидске геометрије када уклонимо метричке појмове (растојања и углове).

[4]Прамен правих представља скуп свих правих које се сијеку у одређеној тачки или скуп свих правих које су међусобно паралелне.

Пошто постоје два типа тачака (обичне и бесконачне), за различите тачке из Аксиоме 1 дискутујемо три случаја. Прво, ако су обје тачке из $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$, по еуклидској аксиоми инциденције постоји јединствена права из $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ која је инцидентна са њима. Како $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ по дефиницији припада $\mathcal{P}_{\infty}$, а права u_{∞} их не садржи (јер она садржи само бесконачне тачке), тиме је први случај задовољен. Даље, ако је једна тачка еуклидска ($A \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}$), а друга бесконачна ($\infty_{[p]}$ за неко $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}$), по Плејферовој аксиоми постоји јединствена еуклидска права q кроз A која је паралелна са p, односно $\infty_{[p]} = \infty_{[q]}$, чиме је задовољен и други случај. И на крају, тривијално, ако су обје тачке бесконачне, постоји јединствена права u_{∞} која их садржи, док, напоменимо, све остале праве садрже само једну бесконачну тачку.

Исто тако имамо дискусију и по правама за Аксиому 2, јер имамо обичне (еуклидске) праве и бесконачну праву. Ако су обје праве p и q из Аксиоме 2 еуклидске и нису паралелне, оне имају обичан еуклидски пресјек и та тачка је јединствена (то нам гарантује аксиома из еуклидске геометрије), а ако су те праве паралелне, оне имају заједничку тачку $\infty_{[p]} = \infty_{[q]}$. Даље, у случају да је једна права p еуклидска, а друга бесконачна, њихов пресјек је једиствена тачка $\infty_{[p]}$, чиме је потврђена валидност Аксиоме 2.

Што се тиче Аксиоме 3, довољно је, на примјер, узети четири тјемена произвољног квадрата, и онда она свакако важи.

И како смо испитали све три аксиоме пројективне равни, слиједи сљедећа теорема.

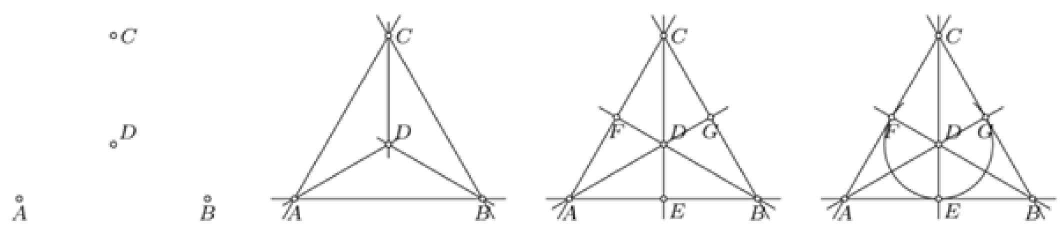
Теорема 2 *Интуитивни модел* $\mathbb{EP}^2$ *је пројективна раван.*

Овај интуитивни модел заправо представља спону између еуклидске и пројективе равни и користиће нам да касније утврдимо валидност Дезаргове теореме и у еуклидској равни.

2.3 Коначна пројективна раван

Концепт пројективне равни који смо досад увели је поприлично општи. Питање комплетне класификације свих могућих пројективних равни је ван домена људског разумијевања. Наиме, испоставља се да пројективна раван не мора имати бесконачан број елемената, те се природно поставља питање, која је то најмања могућа пројективна раван. Увођењем појма коначне пројективне равни, завршавамо са уводом у пројективну раван и директно прелазимо на тему рада.

Кренимо од Аксиоме 3 која гарантује егзистенцију четири тачке A, B, C и D, међу којима нема три колинеарне. Ове тачке морају бити различите јер иначе двије исте са произвољном трећом јесу колинеарне. Сваки пар тих тачака јединствено одређује спојницу по Аксиоми 1 и онда имамо $\binom{4}{2} = 6$ различитих правих. Даље, Аксиома 2 захтијева да сваки пар различитих правих има јединствено сјециште. Имамо тачно три сјецишта која недостају: $E = (A \vee B) \wedge (C \vee D), F = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$ и $G = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$. Поново, Аксиома 1 гарантује постојање нових правих $E \vee F$, $F \vee G$ и $E \vee G$. Међутим, оне не морају бити међусобно различите, а како покушавамо да изградимо минималну пројективну раван, узећемо случај када су те три тачке колинеарне (одређују тачно једну нову праву). Добијена пројективна раван има, дакле, седам тачака и седам правих. Како смо је изградили на основу аксиома инциденције, лако се види да их она све испуњава. Оваква минимална пројективна раван се назива *Фаноова*[5] *раван.*



[5] Gino Fano (1871-1952) – италијански математичар

Коначна пројективна раван је пројективна раван $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ за коју су скупови $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ коначни.

Пошто смо видјели да у Фаноовој равни свака права садржи тачно три тачке, показаћемо да је то и минималан број тачака на правој у свакој пројективној равни.

Лема 1 *Свака права пројективне равни је инцидентна са бар три тачке.*

Доказ. Нека је $p \in P$ произвољна права која је инцидентна са највише двије тачке. Аксиома 3 нам гарантује постојање четири тачке A, B, C и D, међу којима нема три колинеарне. Нека, без умањења општости, тачка A није инцидентна са правом p (постоје бар двије такве тачке), а нека су B, C и D преостале тачке. Праве $A \vee B$, $A \vee C$ и $A \vee D$ су инцидентне са тачком A и међусобно су различите јер би у супротном неке три од тих тачака биле колинеарне. Онда су сјецишта $p \wedge (A \vee B)$, $p \wedge (A \vee C)$ и $p \wedge (A \vee D)$ различита и представљају три различите тачке које су инцидентне са правом p, одакле добијамо контрадикцију. □

Директном примјеном Принципа дуалности на претходну лему добијамо њен дуал.

Лема 2 *Свака тачка пројективне равни је инцидентна са бар три праве.*

Можемо да примијетимо да у Фаноовој равни важи да је свака права инцидентна са тачно три различите тачке и да је свака тачка инцидентна са тачно три различите праве. Ово поклапање бројева није случајно, о чему говори наредна лема.

Лема 3 *За коначну пројективну раван постоји константа k, таква да је свака права инцидентна са тачно k тачака, док је свака тачка инцидентна са тачно k правих.*

Доказ. Нека је p права која је инцидентна са тачно k тачака и нека је $q \neq p$ и нека је тачка A сјециште правих p и q ($A = p \wedge q$). По Леми 2 постоји права $r \mathcal{I} A$ која је различита од правих p и q, а по Леми 1 постоји тачка $S \mathcal{I} r$ различита од A. Свака тачка X, од k инцидентних са правом p, генерише тачку $(X \vee S) \wedge q$ која је инцидентна са правом q. Ако за неке тачке X и Y инцидентне са правом p важи $(X \vee S) \wedge q = (Y \vee S) \wedge q$ било би $X \vee S = Y \vee S$, односно $X = Y$. Дакле, различите тачке са p генеришу различите тачке са q, као и обратно, те је и права q инцидентна са тачно k тачака. Нека је сада S произвољна тачка. Како све праве нису конкурентне (због дуалности Аксиоме 3), онда постоји права p која није инцидентна са S. Свака тачка X која је инцидентна са правом p генерише праву $X \vee S$, али и обратно, јер свака права инцидентна са S мора да има сјециште са p. Одавде слиједи да ако је p инцидентна са тачно k тачака, онда је тачка S инцидентна са тачно k правих. □

Помоћу претходне леме лако можемо израчунати број елемената скупова $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$, уколико су они коначни. Ако је број k из Леме 3, онда број $r = k - 1$ зовемо ред пројективне равни. *Ред коначне пројективне равни* је број за један мањи од броја тачака инцидентних са сваком правом.

Тада је број тачака на правој једнак $r + 1$, а број правих кроз тачку исто $r + 1$. Свака од $r + 1$ правих које пролазе кроз произвољну тачку садржи додатних r тачака. Све те тачке су различите јер би иначе неке од тих правих, поред почетне тачке, имале још једно сјециште, па је укупан број тачака у равни $r(r + 1) + 1$, односно $r^2 + r + 1$, чиме смо доказали сљедећу лему.

Лема 4 *Коначна пројективна раван реда r има $r^2 + r + 1$ тачака и $r^2 + r + 1$ правих.*

2.4 Дезаргова теорема у пројективној равни

Прије него што директно формулишемо Дезаргову теорему, увешћемо још пар појмова.

Фигура представља било који скуп тачака и правих пројективне равни. Када у тај склоп укључимо и релацију инциденције између тачака и правих фигуре, добијамо *конфигурацију*. *Геометријска конфигурација* је конфигурација код које је свака права инцидентна са константним бројем тачака (m), а свака тачка инцидентна са константним бројем правих (n). Ако важи да је $m = n$, онда говоримо о *симетричној геометријској конфигурацији.*

Низ тачака је фигура коју чине све тачке које су инцидентне са правом p и обиљежаваћемо га са (p). Дуална фигура низу тачака је *прамен правих*. Чине га све праве које су инцидентне са тачком A и обиљежавамо га са (A).

N*-тјеменик* је фигура која се састоји од n тачака, међу којима нема три колинеарне, и свих спојница њима одређеним. Њему дуална фигура је n*-страник* и он се састоји од n правих, међу којима нема три конкурентне, и свих сјецишта њима одређеним. Како n–тјеменик има n тјемена и $\binom{n}{2}$ страница, а n-страник има n страница и $\binom{n}{2}$ тјемена, онда су они једнаки само у случају $n = 3$. Таква фигура се зове тротјеменик, односно тространик, и она ће бити предмет наше теореме. Можемо да примијетимо да она, заправо, представља еквивалент фигуре троугла у еуклидској равни.

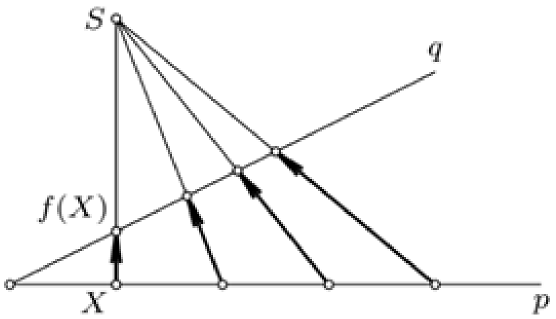
Пошто су низ тачака и прамен правих једнодимензионални објекти, природно можемо да уведемо пресликавања између њих. Посматрајмо низ (p) и прамен (S). Прамен (S) заправо представља скуп свих спојница $X \vee S$, гдје су тачке X из низа (p). Исто тако, дуално, низ (p) представља скуп свих сјецишта $x \wedge p$, гдје су x праве прамена (S). На овај начин можемо да уведемо бијекцију између низа (p) и прамена (S) коју називамо перспективитет (перспективно пресликавање).

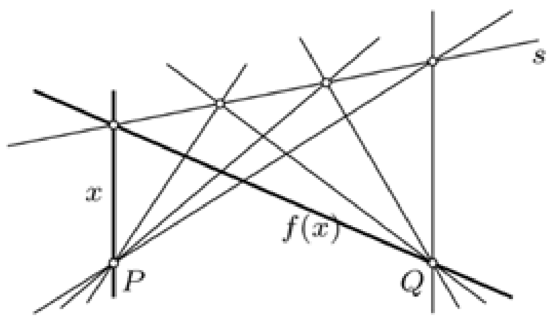
Дефиниција 3 *Нека $S \in \mathcal{T}$ није инцидентна са $p \in P$. Перспективитет $(p)\underset{\wedge}{=}(S)$ је пресликавање $f : (p) \mapsto (S)$ задато са $f(X) = X \vee S$. Перспективитет $(S)\underset{\wedge}{=}(p)$ је пресликавање $f : (S) \mapsto (p)$ задато са $f(x) = x \wedge p$.*

Ово су основна пресликавања у пројективној геометрији и представљају једно другом инверз.

Дефиниција 4 *Нека $S \in \mathcal{T}$ није инцидентна са $p, q \in \mathcal{P}$. Перспективитет $(p)\overset{S}{\underset{\wedge}{=}}(q)$ је пресликавање $f : (p) \mapsto (q)$ задато са $f(X) = (X \vee S) \wedge q$.*

Дефиниција 5 *Нека $s \in \mathcal{P}$ није инцидентна са $P, Q \in \mathcal{T}$. Перспективитет $(P)\overset{s}{\underset{\wedge}{=}}(Q)$ је пресликавање $f : (P) \mapsto (Q)$ задато са $f(x) = (x \wedge s) \vee Q$.*



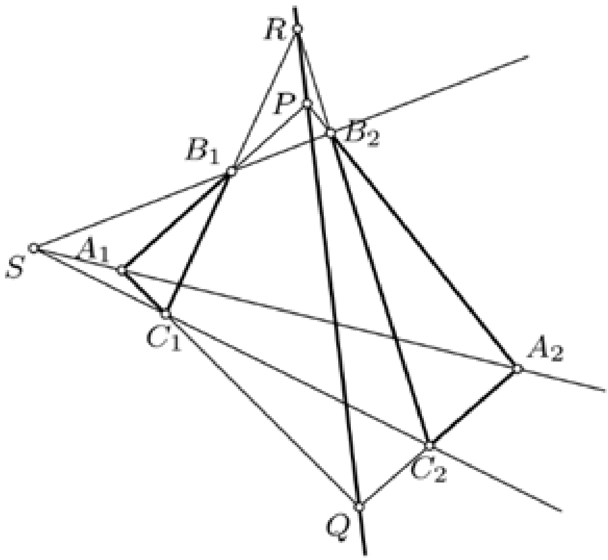


Наиме, претходна два перспективитета представљају композицију два основна перспективитета. Перспективитет из Дефиниције 4 се представља као $((S)\underset{\wedge}{=}(q)) \circ ((p)\underset{\wedge}{=}(S))$ и тачка S је *центар перспективе* (тачке X, $f(X)$ и S су колинеарне). Ријечима кажемо: $(p)\overset{S}{\underset{\wedge}{=}}(q)$ је перспективитет низа (p) на низ (q) у односу на тачку S (центар). Перспективитет из Дефиниције 5 се представља као $((s)\underset{\wedge}{=}(Q))\circ((P)\underset{\wedge}{=}(s))$ и права s је *оса* перспективе (праве x, $f(x)$ и s су конкурентне). Ријечима кажемо: $(P)\overset{s}{\underset{\wedge}{=}}(Q)$ је перспективитет прамена (P) на прамен (Q) у односу на праву s (осу).

Перспективитети из претходне двије дефиниције се могу уопштити на фигуре. Двије фигуре су перспективне у односу на тачку (центар перспективе) S ако постоји бијективно пресликавање за које важи да су свака тачка једне фигуре X, S и све тачке друге фигуре $f(X)$ колинеарне. Двије фигуре су перспективне у односу на праву (оса перспективе) s ако постоји бијективно пресликавање за које важи да су све странице једне фигуре x, s и све странице друге фигуре $f(x)$ конкурентне.

У вези са овим, наслућујемо и сљедеће тврђење.

Тврђење 2 ***(Дезаргово тврђење).*** *Ако су два тротјеменика перспективна у односу на неку тачку, онда су они перспективни у односу на неку праву.*



Дакле, ако су тротјеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ такви да су праве $A_1 \vee A_2$, $B_1 \vee B_2$ и $C_1 \vee C_2$ конкурентне, тада су тачке $(A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, $(A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $(B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$ колинеарне.

Као што можемо да примијетимо, користимо нотацију пројективне геометрије за разлику од класичне еуклидске геометрије. Још једна разлика је то што не разликујемо случај када су одговарајуће праве (странице) тротјеменика (троугла) паралелне, јер како смо видјели, у овој геометрији оне не постоје.

Даље, испоставља се да ова теорема не може да се докаже на основу Аксиома 1, 2 и 3. То значи да она не важи нужно у пројективној равни, и зато уводимо сљедећу дефиницију.

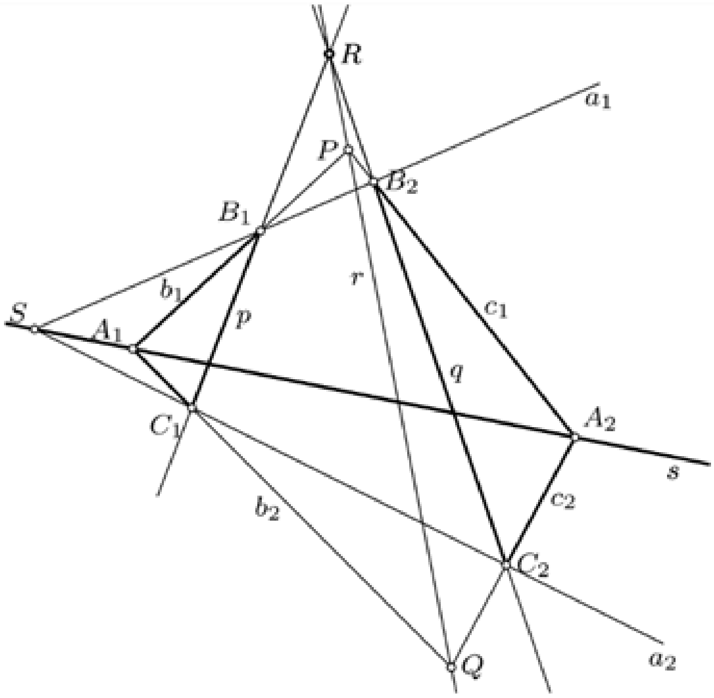
Дефиниција 6 *Дезаргова раван је пројективна раван у којој важи Дезаргово тврђење.*

Дакле, сада разликујемо Дезаргове равни као одређену групу равни у пројективној геометрији.

Тврђење 3 ***(Обрнуто Дезаргово тврђење)*** *Ако су два тространика перспективна у односу на неку праву, онда су они перспективни у односу на неку тачку.*

Пошто у Дезарговој равни (која је пројективна раван) важи Дезаргово тврђење, у њој мора да важи и њен дуал, одакле добијамо сљедећу теорему.

Теорема 3 *У Дезарговој равни важи Обрнуто Дезаргово тврђење.*



Доказ. Нека су $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ два тространика за које смо претпоставили да су перспективни у односу на праву. Тјемена тих тространика означимо са $B_1 = a_1 \wedge b_1$, $B_2 = a_1 \wedge c_1$ и $P = b_1 \wedge c_1$, односно са $C_1 = a_2 \wedge b_2$, $C_2 = a_2 \wedge c_2$ и $Q = b_2 \wedge c_2$. Циљ нам је да покажемо да се праве $p = B_1 \vee C_1$, $q = B_2 \vee C_2$ и $r = P \vee Q$ сијеку у истој тачки (центру перспективе). Дакле, ова два тространика су перспективна у односу на праву s, односно тачке $S = a_1 \wedge a_2$, $A_1 = b_1 \wedge b_2$ и $A_2 = c_1 \wedge c_1$ су колинеарне и инцидентне са правом s. Како су праве $s = A_1 \vee A_2$, $a_1 = B_1 \wedge B_2$ и $a_2 = C1 \wedge C_2$ конкурентне, односно инцидентне са тачком S, тачка S по дефиницији представља центар перспективе тротјеменика $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Пошто је ова раван Дезаргова, у њој важи и Дезаргово тврђење те су ова два тротјеменика перспективна и у односу на праву r, односно тачке $R = p \wedge q$, $P = b_1 \wedge c_1$ и $Q = b_2 \wedge c_2$ су колинеарне и инцидентне са r. Како су онда p, q и r инцидентне са R, доказали смо жељену ствар, односно R је центар перспективе тространика $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$. $\square$

Напоменимо да смо сваким увођењем нових тачака и правих у доказу Теореме 3 непосредно користили Аксиоме 1 и 2, али нисмо их спомињали ради јасноће доказа. Исто тако се нисмо бавили случајем „паралелних правих“ јер, како знамо, оне не постоје у пројективној геометрији. То, заправо, представља љепоту и лакоћу овог доказа, а самим тим и ове теореме.

Непосредно из Теореме 3 слиједи и сљедећа теорема.

Теорема 4 *У Дезарговој равни важи Принцип дуалности.*

Наравно, нису све равни у пројективној геометрији Дезаргове. На примјер, пошто Дезаргова конфигурација, као што смо видјели, захтијева 10 тачака и 10 правих, све пројективне равни реда $r \leq 8$ су тривијално Дезаргове. Први контрапримјери су пројективне равни реда $r = 9$, од којих свака има 91 тачку и 91 праву.

Дакле, окарактерисали смо Дезаргову раван као пројективну раван у којој важи Дезаргово тврђење. Пошто све равни нису Дезаргове, питамо се који је то значај Дезарговог тврђења у пројективној геометрији и који је значај саме Дезаргове теореме. Одговор на то питање добијамо у сљедећем поглављу, гдје ћемо се бавити пројективним простором.

2.5 Пројективни простор

Циљ овог поглавља јесте да откријемо шта се дешава кад пројективну раван смјестимо у пројективни простор, односно какве особине онда она има. Прије тога, морамо да дефинишемо сам пројективни простор. С тим у вези уводимо још један основни скуп чији су елементи *равни*, а између осталог ћемо имати релације инциденције како између тачака и равни, тако и између правих и равни. Аксиоме пројективног простора, као што ћемо видјети, представљају на неки начин модификацију аксиома пројективне равни. Исто тако можемо да уочимо сличност са Еуклидовим аксиомама.

Дефиниција 7 *Аксиоме инциденције пројективног простора:*

A1 Постоји јединствена права која је инцидентна са двије различите тачке;

A2 Постоји јединствена раван која је инцидентна са три неколинеарне тачке;

A3 Уколико права није инцидентна са равни, тада постоји јединствена заједничка тачка са којом су инцидентне и та права и та раван;

A4 Ако су и тачка и раван инцидентне са заједничком правом, онда су међусобно инцидентне;

A5 Постоје четири тачке које нису инцидентне са истом равни, међу којима нема три колинеарне;

A6 Свака права је инцидентна са бар три тачке.

Примјећујемо да се под А1 налази Аксиома 1, тако да без проблема задржавамо ознаку за спојницу $X \vee Y$, за различите тачке X и Y. Даље, видимо да овдје нема мјеста Аксиоми 2 јер се двије различите праве сијеку само ако су инцидентне са истом равни, што овдје не мора бити случај. Тај проблем рјешавамо са А3 гдје гарантујемо егзистенцију и јединственост пресјечне тачке праве и равни која је не садржи. То заправо представља аналогију са Аксиомом 2. Заједничку тачку праве p и равни α, која није инцидентна са правом p, означаваћемо са $\alpha \wedge p$.

Како је особина Аксиоме 2 била да ограничи димензију пројективне равни на два, тако сада А3 има особину да пројективни простор ограничи на димензију три.

Лема 5 *Ако је раван инцидентна са двије различите тачке, онда је она инцидентна са њиховом спојницом.*

Лема 4 директно слиједи из јединствености поменуте у А3.

Пошто смо увели раван као нови појам, једнозначно одређен са три неколинеарне тачке, напоменимо да ћемо је обиљежавати са (XYZ), кад год су те три тачке неколинеарне. За тачке које припадају истој равни кажемо да су *компланарне*, у супротном су оне некомпланарне. Увођењем равни и инциденције како између тачака и равни, тако и између правих и равни, потребна нам је транзитивност релације инциденције коју нам обезбјеђује А4.

Аналогно Аксиоми 3 уведена је А5 која нам обезбјеђује егзистенцију објеката у пројективном простору, само што је овај пут тај четворотјеменик у простору. А6 нам обезбјеђује да имамо четворотјеменик и у равни. Природно уводимо и сљедећу лему.

Лема 6 *Свака раван је инцидентна са четири тачке међу којима нема три колинеарне.*

Доказ. Нека су A, B, C и D некомпланарне тачке из A5 међу којима нема три колинеарне. Оне морају бити различите јер у супротном не би биле некомпланарне по A2. Пошто нису све инцидентне са равни α претпоставимо, без умањења општости, да тачка D није инцидентна са α. Тада $A \vee D$ није инцидентна са α, јер иначе би по A4 било да је D инцидентно са α. Сада према A3 постоји тачка $A' = \alpha \wedge (A \vee D)$ и аналогно постоје тачке $B' = \alpha \wedge (B \vee D)$ и $C' = \alpha \wedge (C \vee D)$. Претпоставимо да су тачке A', B' и C' колинеарне. Тачке A', B' и D су неколинеарне јер би A, B, C биле колинеарне са њима. Тада постоји раван $(A'B'D)$ и она је по Леми 5 инцидентна са $A' \vee B'$, па самим тим по A4 и са тачком C'. По Леми 5 раван $(A'B'D)$ је даље инцидентна са $D \vee A'$, $D \vee B'$ и $D \vee C'$, па самим тим по A4 са A, B, C. Дакле, A, B, C, D су инцидентне са α, па су оне компланарне, чиме добијамо контрадикцију. Показали смо да је произвољна раван α инцидентна са три неколинеарне тачке A', B' и C'. По A6 можемо изабрати нове тачке A'', која је инцидентна са $A' \vee C'$, и B'', која је инцидентна са $B' \vee C'$, и добијамо четворотјеменик $A'B'A''B''$ чија су тјемена инцидентна са α. $\square$

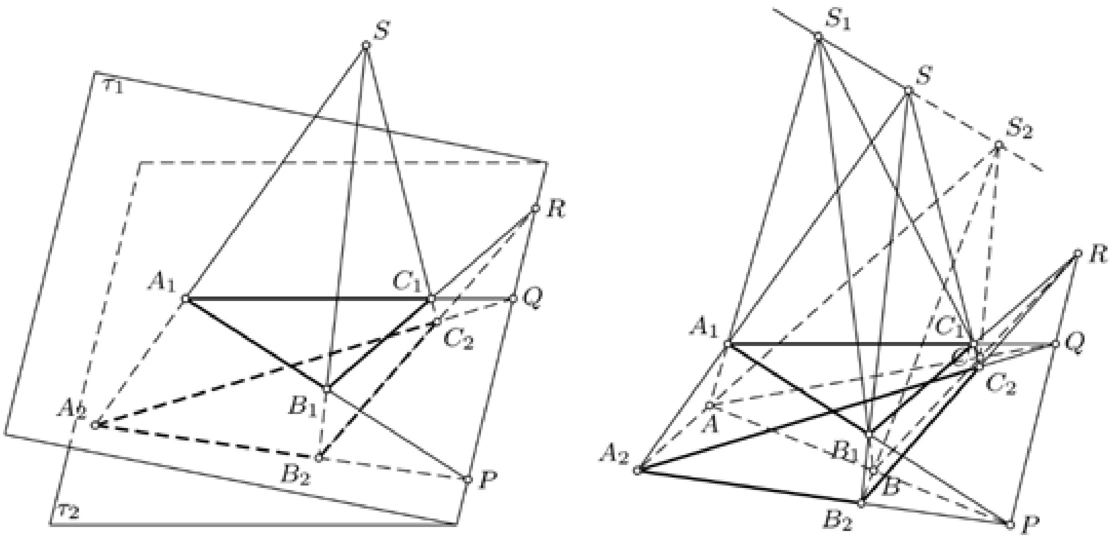
Лема 7 *Постоји јединствена права која је инцидентна са двије различите равни.*

Доказ. Нека су α и β различите равни. Према Леми 6 постоје неколинеарне тачке A, B и C које су инцидентне са α. По A2 све оне нису инцидентне са β па је, без умањења општости, C тачка која није инцидентна са β. То повлачи да праве $A \vee C$ и $B \vee C$ нису инцидентне са β, одакле постоје тачке $M = \beta \wedge (A \vee C)$ и $N = \beta \wedge (B \vee C)$. Коначно, Лема 5 даје заједничку праву $M \vee N$. $\square$

Циљ је показати да је свака раван у пројективном простору пројективна раван. Ако је $A \neq B$ и $A \mathcal{I} \alpha$ и $B \mathcal{I} \alpha$, тада по A1 постоји спојница $A \vee B$, која је по Леми 4 инцидентна са α, чиме је Аксиома 1 потврђена. Даље, нека је $p \neq q$ и $p \mathcal{I} \alpha$ и $q \mathcal{I} \alpha$. По A5 постоји тачка A која није инцидентна са α. Нека је $\beta = (ABC)$, гдје су B и C тачке из A6 инцидентне са p. Како q није инцидентно са β то постоји тачка $S = \beta \wedge q$. Да S није инцидентно са p имали бисмо $\beta = (SBC) = \alpha$, што доказује да је S заједничка тачка са којом су инцидентне p и q, чиме је потврђена и Аксиома 2. Како је Аксиома 3 већ провјерена у доказу Леме 5, имамо да је свака раван пројективног простора, у ствари, пројективна раван.

Овим уводом у пројективни простор смо стекли довољно информација да бисмо могли доказати да у њему увијек важи Дезаргово тврђење!

Теорема 5 *Раван пројективног простора је Дезаргова раван.*



Доказ. Како смо већ доказали да је свака раван пројективног простора пројективна раван, остаје нам да покажемо да у њему важи Дезаргово тврђење.

Нека је тачка S центар перспективе тротјеменика $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, те нека је $\tau_1 = (A_1B_1C_1)$ и $\tau_2 = (A_2B_2C_2)$. У првом случају претпоставимо $\tau_1 \neq \tau_2$. Праве $A_1 \vee B_1$ и $A_2 \vee B_2$ су инцидентне са равни (SA_1B_1) и зато имају сјециште $P = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$. Аналогно добијамо тачке $Q = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $R = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$. Како су тачке P, Q и R инцидентне са τ_1 и са τ_2, то по Леми 5 су инцидентне и са њиховом јединственом пресјечном правом из Леме 6, па морају бити колинеарне. У случају $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ бирамо праву инцидентну са S која није инцидентна са τ, а онда тачке S_1 и S_2 које су са њом инцидентне. Како је $S = (A_1 \vee A_2) \wedge (S_1 \vee S_2)$, то су компланарне A_1, A_2, S_1, S_2 и постоји сјециште $A = (S_1 \vee A_1) \wedge (S_2 \vee A_2)$. Аналогно постоје сјецишта $B = (S_1 \vee B_1) \wedge (S_2 \vee B_2)$ и $C = (S_1 \vee C_1) \wedge (S_2 \vee C_2)$. Раван (ABC) је различита од τ, те можемо примијенити већ доказани случај теореме кад су равни тротјеменика различите. Како су праве $A \vee A_1$, $B \vee B_1$ и $C \vee C_1$ инцидентне са S_1, то су тачке $P_1 = (A \vee B) \wedge (A_1 \vee B_1)$, $Q_1 = (A \vee C) \wedge (A_1 \vee C_1)$ и $R_1 = (B \vee C) \wedge (B_1 \vee C_1)$ колинеарне. Како су праве $A \vee A_2$, $B \vee B_2$ и $C \vee C_2$ инцидентне са S_2, то су тачке $P_2 = (A \vee B) \wedge (A_2 \vee B_2)$, $Q_2 = (A \vee C) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $R_2 = (B \vee C) \wedge (B_2 \vee C_2)$ колинеарне. Тачке P_1 и P_2 су инцидентне и са правом $A \vee B$ и са равни $(A_1A_2B_1B_2)$, одакле мора бити $P_1 = P_2 = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$. Аналогно важи $Q_1 = Q_2 = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $R_1 = R_2 = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$. Коначно, тачке $P_1 = P_2, Q_1 = Q_2$ и $R_1 = R_2$ су инцидентне са τ и са (ABC), те су колинеарне (По Леми 5 и Леми 7). □

Овиме смо показали да Дезаргово тврђење јесте природна особина пројективне равни уколико је она смјештена у пројективни простор. Самим тим што је пројективна геометрија једна велика област у математици и има широку примјену, Дезарг је формулисао значајну теорему која у суштини представља основ ове геометрије. У томе лежи величина Дезарговог цјелокупног рада на ову тему, те се он сматра оцем пројективне геометрије.

Видјели смо да је пројективна геометрија веома уопштена у поређењу са еуклидском геометријом. Зато смо издвојили добар дио овог рада како бисмо је у потпуности увели и објаснили, и како бисмо самим тим видјели и разумјели какву улогу игра Дезаргова теорема у њој.

3 Еуклидска геометрија

У овој глави ћемо видјети како Дезаргова теорема може да се „пребаци" у еуклидску геометрију. Нећемо се бавити аксиоматском основом ове геометрије, јер је она много рестриктивнија од пројективне геометрије, што подразумијева више аксиома и много више саме теорије. Напоменимо само да у еуклидској геометрији имамо аксиоме инциденције, распореда, подударности, паралелности и непрекидности. Конкретно за нашу тему, значајно је да уочимо аксиому паралелности (Плејферову аксиому) која нам гарантује постојаност паралелних правих у овој равни.

Дефиниција 8 ***(Плејферова аксиома).*** *Ако тачка A не припада правој p, тада у равни њима одређеној постоји тачно једна права која садржи тачку A и дисјунктна је са правом p.*

Даље у овом поглављу се користимо свим особинама еуклидске геометрије, онаквим какве их знамо из основне и средње школе.

3.1 Неке важније теореме и појмови еуклидске равни

У овом поглављу ћемо формулисати неке теореме у еуклидској равни које ћемо касније користити у доказу Дезаргове теореме.

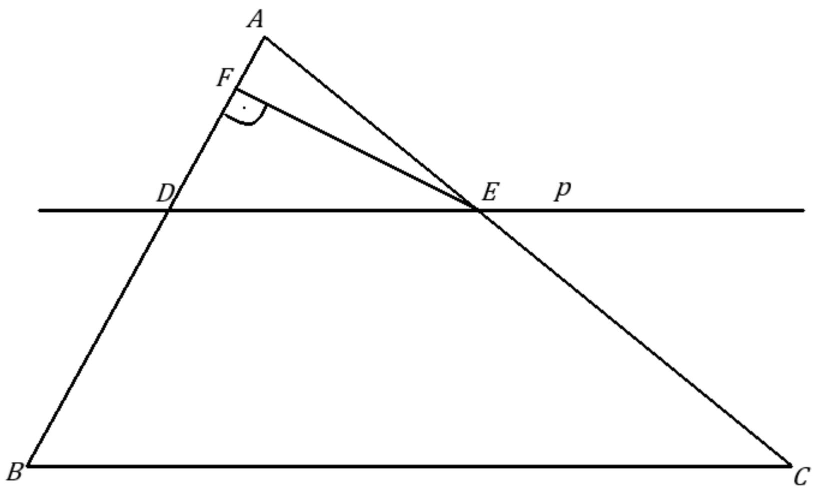
Дефиниција 9 *Конкурентне праве су праве које се сијеку у истој тачки.*

Дефиниција 10 *Колинеарне тачке су тачке које припадају истој правој.*

Лема 8 *Нека тачке C и C' припадају дужи AB. Тада ако важи $\frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B}$, онда су оне идентичне, односно $C \equiv C'$.*

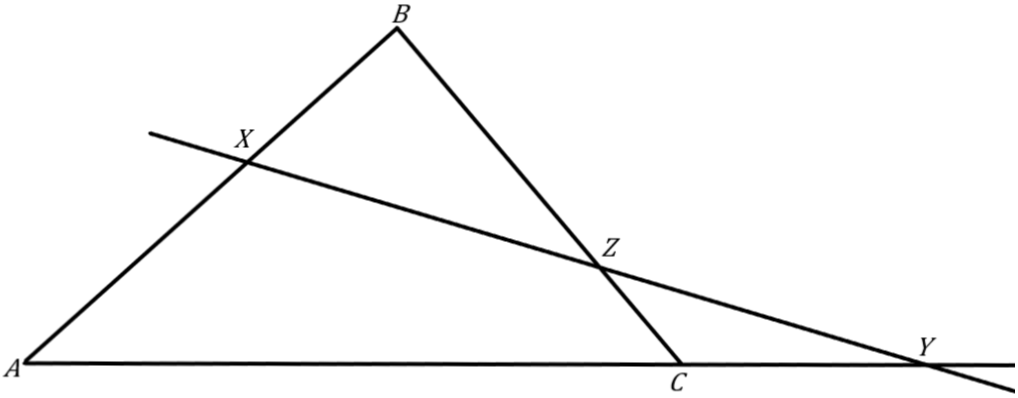
Доказ. Из $\frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B}$ имамо $\frac{AB-CB}{CB} = \frac{AB-C'B}{C'B}$, те сређивањем директно добијамо $CB = C'B$, а пошто су C и C' са исте стране тачке B, слиједи $C \equiv C'$. $\square$

Теорема 6 ***(Талесова теорема о пропорционалности).*** *Нека је ABC троугао и нека је p права која је паралелна са страницом троугла BC и важи $p \cap AB = D$ и $p \cap AC = E$. Тада важи пропорција $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Додатно, одговарајуће странице троуглова ABC и ADE су пропорционалне.*



Доказ. Доцртајмо тачку F на страници AB тако да је EF висина троугла ADE. Примијетимо да троуглови ADE и DBE имају заједничку висину па важи $\frac{P(ADE)}{P(DBE)} = \frac{AD}{DB}(1)$. Аналогно добијамо однос површина троуглова ADE и DCE, $\frac{P(ADE)}{P(DCE)} = \frac{AE}{EC}(2)$. Из (1) и (2) директно добијамо однос $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}(3)$, јер троуглови DBE и DCE имају исте површине (имају заједничку основу, а висина им је иста јер су p и BC паралелне). Тиме је први дио теореме доказан. Даље, из (3) имамо $\frac{AD}{AB-AD} = \frac{AE}{AC-AE}$ и сређивањем добијамо $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Још нам остаје да укључимо и странице BC, односно DE. Уведимо висине троуглова ABC и ADE са H и h редом. Са слике видимо да је $P(ABC) = P(ADE) + P(BCED)$, односно $\frac{H \cdot BC}{2} = \frac{h \cdot DE}{2} + \frac{(DE+BC)\cdot(H-h)}{2}$. Сређивањем добијамо $EDBC = \frac{h}{H}(4)$. Примјеном првог дијела доказа имамо да је $\frac{AD}{DB} = \frac{h}{H-h}$. Сређивањем добијамо $\frac{AD}{AB} = \frac{h}{H}(5)$. Изједначавањем (4) и (5) добијамо $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$. Аналогно добијамо $\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC}$, чиме је доказ употпуњен. $\square$

Теорема 7 ***(Менелајева теорема).*** *Нека су X, Y, Z редом тачке на правцима BC, AC, AB тако да су двије од њих на страницама троугла ABC, а трећа на продужетку странице тог троугла. Тада важи да су тачке X, Y, Z колинеарне акко $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$.*



Доказ. ($\Rightarrow$) Уочимо троуглове AYZ и YBZ. Како они имају заједничку висину, за однос њихових површина важи: $\frac{P(AYZ)}{P(YBZ)} = \frac{AZ}{ZB}(1)$. Аналогно добијамо односе површина троуглова YBZ и CYZ, односно CYZ и AYZ: $\frac{P(YBZ)}{P(CYZ)} = \frac{BX}{XC}(2)$, $\frac{P(CYZ)}{P(AYZ)} = \frac{CY}{YA}(3)$. Множењем једнакости (1), (2), (3) добијамо жељену једнакост.

($\Leftarrow$) Нека се продужеци дужи YZ и BC сијеку у тачки X'. Потребно је показати да је $X \equiv X'$. Ако први дио доказа примијенимо на троугао ABC и тачке X, Y, Z добијамо $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$. Дакле, важи и $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA}$, те се сређивањем добија $\frac{BX'}{X'C} = \frac{BX}{XC}$. Како тачке X и X' припадају дужи BC, из Леме 8 слиједи $X \equiv X'$, па су тачке X, Y, Z колинеарне. $\square$

3.2 Дезаргова теорема у еуклидској равни

Како је Дезаргова теорема оригинално формулисана у пројективној геометрији, а узимајући у обзир да у еуклидској геометрији постоје паралелне праве, формулација теореме треба да се прилагоди Плејферовој аксиоми. Сад ћемо да видимо шта се деси када Дезаргову теорему из пројективне геометрије само „препишемо“ у еуклидској геометрији.

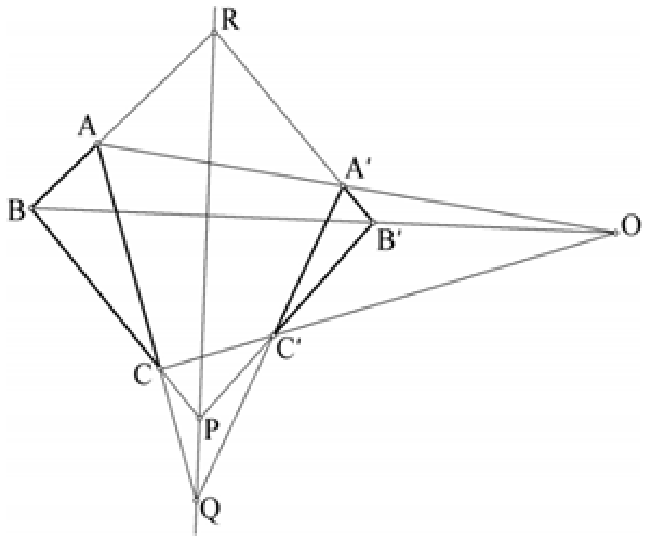
Нека су дати произвољни различити троуглови ABC и $A'B'C'$ у равни. Праве AA', BB' и CC' су конкурентне акко су пресјечне тачке правих AB и $A'B'$, AC и $A'C'$ и BC и $B'C'$ колинеарне.

Примијетимо пошто су троуглови ABC и $A'B'C'$ произвољни, да постоје случајеви када уопште немамо претпостављених пресјечних тачака (на примјер $AB \cap A'B' = \emptyset$ или $AA' \cap BB' = \emptyset$). То би значило да постоје одређени парови правих које су паралелне. Међутим, тај проблем нисмо имали у пројективној геометрији јер тамо, како знамо, нема паралелних правих.

Да бисмо лакше уочили све формулације Дезаргове теореме у еуклидској равни, сјетимо се интуитивне равни и замислимо да се и паралелне праве сијеку у некој тачки у бесконачности.

Видимо да тада имамо доста случајева, па ћемо набројати неке од њих. Докази свих случајева се заснивају искључиво на Менелајевој или Талесовој теореми, те их нећемо све наводити.

Теорема 8 *Нека су троуглови ABC и $A'B'C'$ у истој равни и нека су P, Q, R пресјечне тачке редом правих BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$. Праве AA', BB' и CC' се сијеку у једној тачки акко тачке P, Q, R припадају једној правој.*

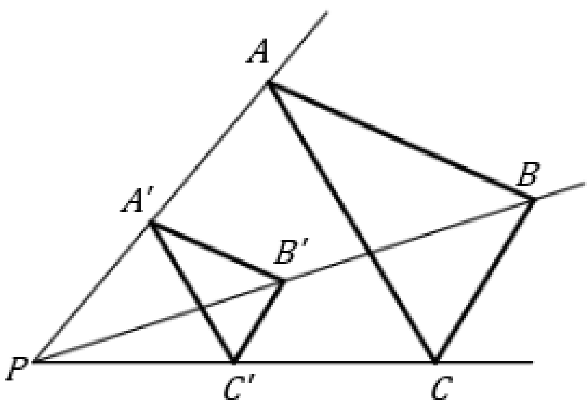


Доказ. Нека се праве AA', BB' и CC' сијеку у тачки O. Примјеном Менелајеве теореме на троуглове OBC, OAC, OAB и праве $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ редом добијамо једнакости: $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'O} = 1$, $\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = 1$, $\frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$. Множењем и сређивањем ових једнакости добијамо $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$, одакле из Менелајеве теореме видимо да су тачке P, Q, R колинеарне.

($\Leftarrow$) Означимо са O пресјечну тачку правих BB' и CC' и докажимо да тачка O припада правој AA'. Уочимо троуглове RBB' и QCC'. Праве RQ, BC и $B'C'$ се сијеку у једној тачки P, па примјеном првог дијела доказа имамо да су тачке $A = RB \cap QC$, $O = BB' \cap CC'$ и $A' = RB' \cap QC'$ колинеарне па тачка O припада правој AA'. $\square$

Дакле, у овом случају нисмо имали уопште паралелних правих. Погледајмо како гласи Дезаргова теорема у случају њиховог постојања.

Теорема 9 *Ако два троугла ABC и $A'B'C'$ леже у равни тако да су им по двије и двије одговарајуће стране међусобно паралелне, то праве које које спајају одговарајућа тјемена или пролазе кроз исту тачку или су међусобно паралелне.*

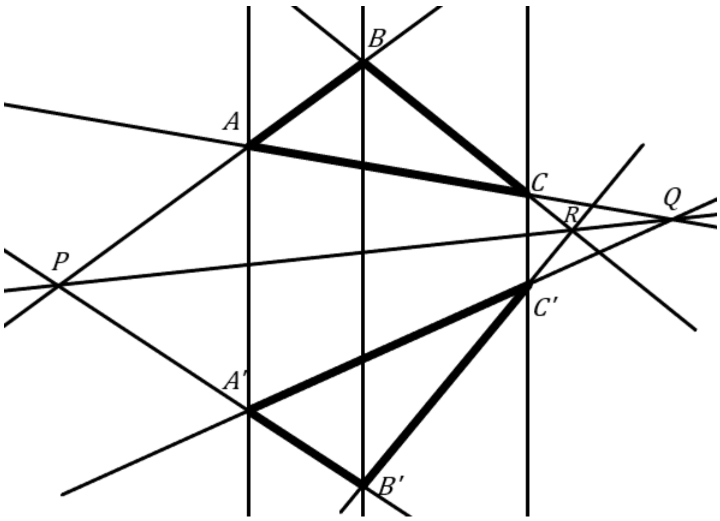


Доказ. *Први случај.* Претпоставимо да међу правама AA', BB' и CC' нема паралелних и докажимо да су оне конкурентне. Нека је $P = AA' \cap BB'$. Тада на основу Талесове теореме имамо пропорцију $\frac{PB}{PB'} = \frac{AB}{A'B'}(1)$. Даље, нека је $Q = CC' \cap BB'$. Аналогно имамо $\frac{QB}{QB'} = \frac{CB}{C'B'}(2)$. Троуглови ABC и $A'B'C'$ су слични (имају исте углове јер су им одговарајуће странице паралелне) па важи $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'}(3)$. Изједначавањем $(1), (2)$ и (3) добијамо $\frac{PB}{PB'} = \frac{QB}{QB'}$, а пошто су P и Q са исте стране тачке B слиједи $P \equiv Q$, па су праве AA', BB' и CC' конкурентне.

Други случај. Претпоставимо, без умањења општости, да су праве AA' и BB' паралелне. Директном примјеном Талесове теореме и сличности троуглова добијамо да је CC' паралелна са BB', па су све три праве паралелне, чиме је доказ употпуњен. □

Теорема 10 *Ако два троугла ABC и $A'B'C'$ леже у равни тако да линије које спајају одговарајућа тјемена или пролазе кроз једну тачку или су међусобно паралелне и ако, даље, имају два пара одговарајућих страна међусобно паралелних, онда су и треће стране тих троуглова међусобно паралелне.*

Теорема 11 *Ако два троугла ABC и $A'B'C'$ леже у равни тако да су линије које спајају одговарајућа тјемена паралелне и ако, даље, нема одговарајућих страна троуглова међусобно паралелних, односно $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ и $R = BC \cap B'C'$, тада су тачке P, Q и R колинеарне.*



Доказ. Нека су, дакле, праве AA', BB' и CC' паралелне. Примјеном Талесове теореме на сличне троуглове $A'AP$ и $B'BP$ добијамо да важи $\frac{PB'}{PA'} = \frac{BB'}{AA'}$. Слично, добијамо и $\frac{QA'}{QC'} = \frac{AA'}{CC'}$ и $\frac{RC'}{RB'} = \frac{CC'}{BB'}$. Множењем и сређивањем ових једнакости добијамо $\frac{PB'}{PA'} \cdot \frac{QA'}{QC'} \cdot \frac{RC'}{RB'} = 1$, па су према Менелајевој теореми тачке P, Q, R колинеарне, што је требало и доказати. □

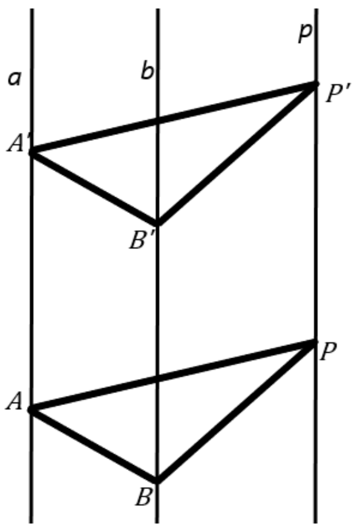
Видимо да су све ове теореме само варијација Дезаргове теореме у пројективној равни. Како смо видјели да она важи у интуитивној равни, лако се види да и сви њени случајеви важе у еуклидској равни.

4 Примјена Дезаргове теореме

У овој глави ћемо видјети примјену Дезаргове теореме у задацима, како у еуклидској, тако и у пројективној геометрији.

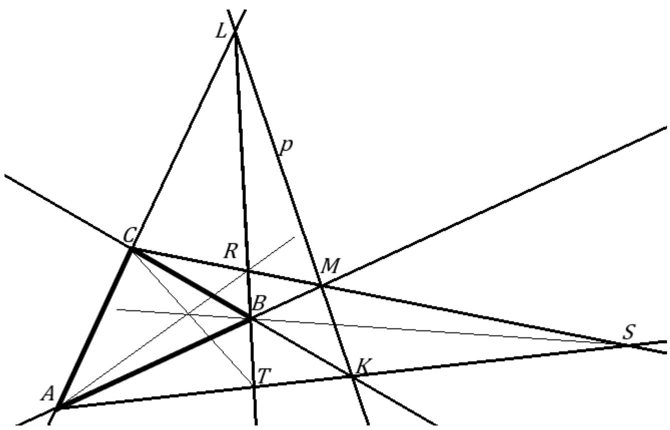
4.1 Задаци – Еуклидска геометрија

Задатак 1 *Нека су у равни дате паралелне праве a и b и тачка P која не припада ниједној од те двије праве. Конструисати праву кроз тачку P која је паралелна са a и b.*



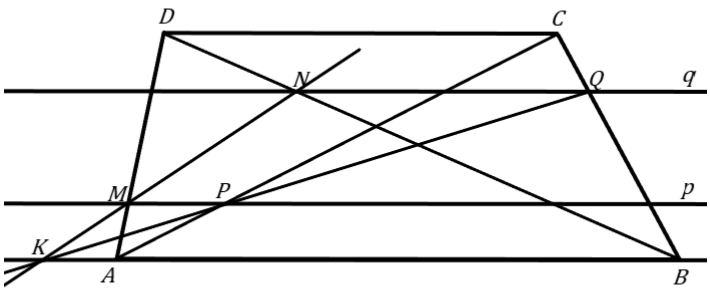
Рјешење. Узмимо на правама a и b произвољне тачке A и B редом тако да A, B и P нису колинеарне. Даље, изаберимо неку тачку A' на правој a. Пошто имамо дужину странице AB и знамо да су праве a и b паралелне, можемо конструисати дуж $A'B'$ тако да је тачка B' на правој b и важи да су AB и $A'B'$ паралелне (јер имамо два рјешења за тачку B'). Даље, конструишемо тачку P' (јер знамо дужине страница AP и BP) тако да је $A'P' = AP$ и $B'P' = BP$. Пошто су троуглови ABP и $A'B'P'$ подударни и странице AB и $A'B'$ су паралелне, имамо да су и странице AP и $A'P'$, BP и $B'P'$ паралелне. Примјеном Теореме 9 је права $p = PP'$ паралелна са правама $AA' = a$ и $BB' = b$, па је она наша тражена права. △

Задатак 2 *Нека су троугао ABC и права p у истој равни и нека су тачке $K = BC \cap p$, $L = AC \cap p$, $M = AB \cap p$, $R = BL \cap CM$, $S = CM \cap AK$, $T = AK \cap BL$. Доказати да су праве AR, BS, CT конкурентне.*



Рјешење. Примијетимо да су троуглови ABC и RST Дезаргови, односно према Теореми 8 праве AR, BS, CT су конкурентне. $\triangle$

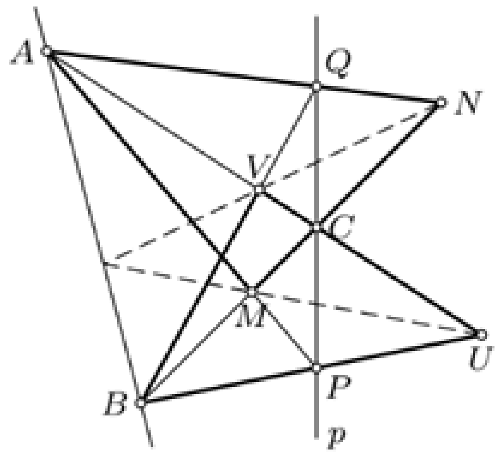
Задатак 3 *Трапез $ABCD$ је пресјечен правама p и q које су паралелне са основом трапеза AB. Дефинишимо тачке $M = AD \cap p$, $P = AC \cap p$, $N = BD \cap q$, $Q = BC \cap q$. Доказати да тачка $K = MN \cap PQ$ припада продужетку основе AB.*



Рјешење. Уочимо троуглове MPA и NQB. Имамо да су праве MP и NQ паралелне, те $C = PA \cap BQ$, $D = AM \cap BN$. Како је CD паралелно са MP и NQ, ово упада у један од случајева Дезаргове теореме, па важи да су праве MN, PQ, AB конкурентне. $\triangle$

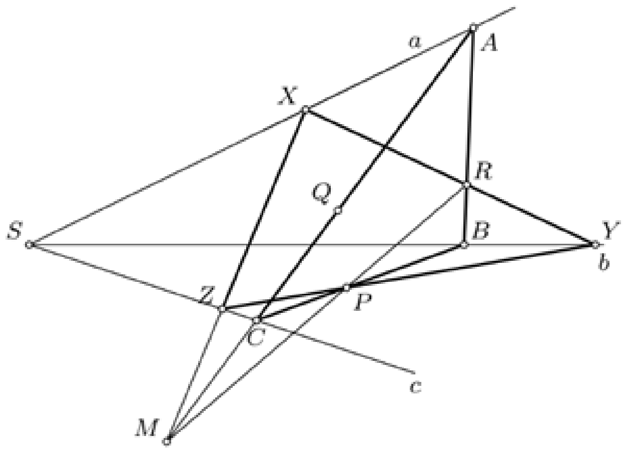
4.2 Задаци – Пројективна геометрија

Задатак 4 *Дате су неколинеарне тачке A, B, C и права $p \ni C$. Нека су P и Q произвољне тачке са p и нека важи $M = AP \wedge BC$, $N = AQ \wedge BC$, $U = BP \wedge AC$, $V = BQ \wedge AC$. Доказати да су праве AB, MU, NV конкурентне.*



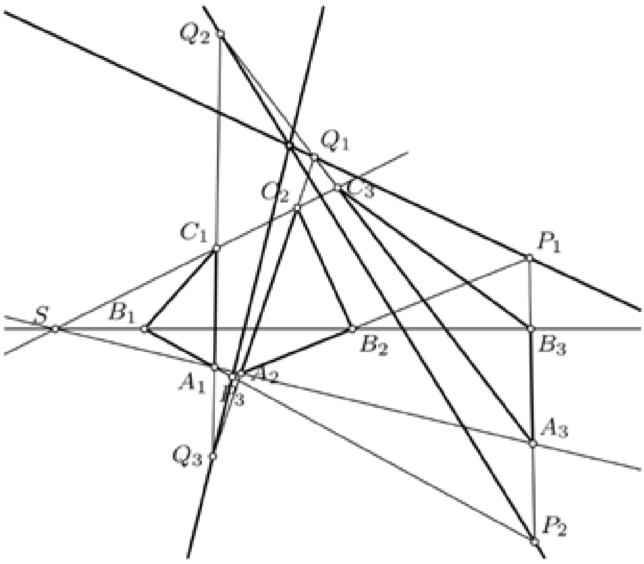
Рјешење. Како тачке $AM \wedge BU = P$, $AN \wedge BV = Q$, $MN \wedge UV = C$ леже на p, то је p оса перспективе троуглова AMN и BUV . Према обрнутој Дезарговој теореми они имају и центар перспективе, те су праве AB, MU, NV конкурентне. $\triangle$

Задатак 5 *Дате су конкурентне праве a, b, c и тачке P, Q, R које им не припадају. Одредити тачке $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ тако да важи $P \in BC$, $Q \in AC$, $R \in AB$.*



Рјешење. Поставимо произвољну тачку $Z \in c$. Желимо да троугао ABC „имитирамо“ троуглом XYZ, па дефинишемо $Y = ZP \wedge b$, а затим $X = YR \wedge a$. Да би троугао XYZ постао троугао ABC фали му још само $Q \in XZ$. Троуглови XYZ и ABC имају центар перспективе у пресеку правих a, b, c. По Дезарговој теореми они имају осу на којој су тачке $P = BC \wedge YZ$, $R = AB \wedge XY$, $M = AC \wedge XZ$. Како су P, R, M колинеарне то M можемо добити са $M = PR \wedge XZ$, а затим $A = MQ \wedge a$, $C = MQ \wedge c$ и $B = AR \wedge b$. $\triangle$

Задатак 6 *Три троугла имају заједнички центар перспективе. Доказати да су одговарајуће три осе перспективе конкурентне праве.*



Рјешење. Дезаргова теорема на троугловима $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ даје осу $s_3 = P_3 \vee Q_3$, гдје је $P_3 = A_1B_1 \wedge A_2B_2$, $Q_3 = A_1C_1 \wedge A_2C_2$. Дезаргова теорема на троугловима $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$ даје осу $s_2 = P_2 \vee Q_2$, гдје је $P_2 = A_1B_1 \wedge A_3B_3$, $Q_2 = A_1C_1 \wedge A_3C_3$. Дезаргова теорема на троугловима $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ даје осу $s_1 = P_1 \vee Q_1$, гдје је $P_1 = A_2B_2 \wedge A_3B_3$, $Q_1 = A_2C_2 \wedge A_3C_3$. Посматрајмо троуглове $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$, за које је $A_3 = P_1P_2 \wedge Q_1Q_2$, $A_2 = P_1P_3 \wedge Q_1Q_3$, $A_1 = P_2P_3 \wedge Q_2Q_3$. Како су тачке A_1, A_2, A_3 колинерне то оне чине осу перспективе, те примјеном обрнуте Дезаргове теореме троуглови имају центар, одакле су праве $P_1 \vee Q_1$, $P_2 \vee Q_2$, $P_3 \vee Q_3$, односно s_1, s_2, s_3 конкурентне. Специјални случајеви се лако провјеравају. На примјер, уколико је $P_1 = P_2$, лако се види да мора бити $P_1 = P_3$, одакле $P_1 = P_2 = P_3 \in s_i$ за свако $i = 1, 2, 3$. $\triangle$

5 Закључак

Дакле, видјели смо како је и из којих потреба настала Дезаргова теорема. Пошто је она била довољна Дезаргу при бављењу архитектуром, он није схватао какав она значај има приликом грађења тада нове – пројективне геометрије. Зато је његов рад пронађен тек два вијека касније и обрађен као значајни дио пројективне геометрије.

Дезаргова теорема јесте природна особина пројективне геометрије, баш због непостојања паралелних правих. Тада је она формулисана на јединствен начин и као таква обухвата све случајеве. Стога је преношење ове теореме у еуклидску геометрију било као њено „разлагање“ на више случајева. Ослањајући се на модел интуитивне равни је јасно да ова теорема важи и у еуклидској геометрији и формално смо доказали пар случајева.

И напослијетку, кроз примјену теореме смо видјели како она врло једноставно рјешава наизглед компликоване задатке.

Њена примјена у умјетности је свакако присутна. Видјели смо да је настала баш из потреба раног сликарства у Италији. Одатле се она почиње користити и у другим гранама умјетности као што су, на примјер, архитектура и графички дизајн.

И за крај, хтјела бих да се захвалим професору Божидару Јовановићу који нам је представио пројективну геометрију на својим часовима и код кога сам ову област посебно заволела. Исто тако бих се захвалила и свом ментору, професорки Јелени Јевремовић, која ми је помогла и дала мотивацију за писање овог рада.

„Да је Дезарг, храбар пионир 17. вијека могао предвидјети до чега ће његова досјетљива метода пројектовања довести, он би свакако био запањен. Он је знао да је учинио нешто добро, али није имао појма о томе како ће се то добро показати у будучности.“ Е.Т. Бел (1883-1960)

Литература

[1] David Hilbert. *„Grundlagen der Geometrie“*.

[2] Мића Станковић. *„Конструкције у еуклидској равни“*.

[3] Edmond Boyer. *„Projective geometry : A short introduction”*.

[4] Владица Андрејић. *„Пројективна геометрија равни“*.

[5] Viktor Blaso. *„Two applications of art to geometry“*.

[6] Tea Amidžić. *Diplomski rad: „Čevin i Menelajev teorem te generalizacije“*. Sveučilište u Zagrebu; Prirodoslovno–matematički fakultet; Matematički odsjek, Zagreb 2018.

[7] Милан Митровић, Михаило Вељковић, Срђан Огњановић, Љубинка Петковић, Ненад Лазаревић. *„Геометрија - за први разред Математичке гимназије“*.

[8] *https://en.wikipedia.org/*.