Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Семередијева лема о регуларности

Ученик:
Милица Вугделић IVд

Ментор:
Лука Милићевић

Београд, јун 2022.

Садржај

1 Увод

Семередијева лема о регуларности данас је позната као један од фундаменталних резултата у екстремалној комбинаторици. Грубо речено, она нам говори да сваки граф можемо поделити на мали број делова који се већински међу собом понашају слично неком случајном бипартитивном графу. У овом раду ћемо представити овај резултат и неке од његових примена.

1.1 Случајни графови

Вероватносни метод је познат алат за тражење објеката са жељеним својствима, и често је користан за доказивање проблема који наизглед нису случајне природе. У том контексту, случајни графови су нам корисни када желимо да докажемо постојање графова са датим својствима.

Дефиниција 1. (Случајан граф.) Случајним графом $\mathcal{G}(n, p)$ зовемо простор вероватноће над скупом свих неусмерених простих графова са n темена, где сваком графу G од m ивица придружујемо вероватноћу

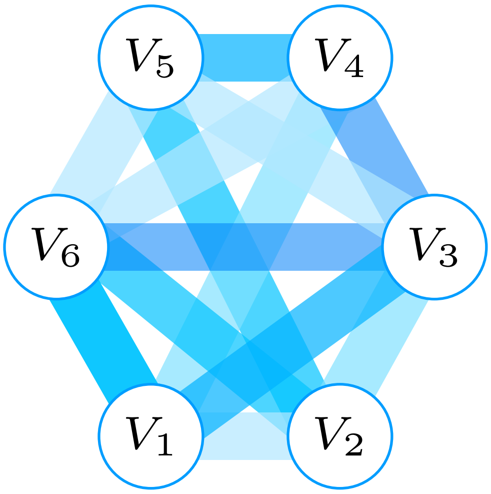
$$P(G) = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}.$$

Постоји тачно $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ графова са m ивица, па је случајни граф добро дефинисан. Еквивалентно $\mathcal{G}(n, p)$ можемо посматрати и као простор вероватноће где све ивице независно постоје са вероватноћом p.

Рецимо да тражимо граф са одређеним бројем подструктура X при неким додатним ограничењима. Често је довољно да посматрајмо класу случајних графова $\mathcal{G}(n, p)$. Ако докажемо да је очекивана вредност броја копија X довољно велика при нашим ограничењима, то нам говори да у овој класи постоји граф са довољно копија X.

У ту руку је природно да желимо да знамо до које мере произвољан граф можемо оценити случајним. Међутим, модел случајног графа $\mathcal{G}(n, p)$

намеће мале разлике између локалних густина графа, што није случај у општим граофивма. Једно од решења је да тражимо поделу темена на скупове који ће се понашати као случајни графови са различитим вероватноћама, док ће се ти скупови међу собом понашати као случајни бипарититвни графови. Лема о регуларности нам управо говори о постојању подела налик овим, са неким додатним ограничењима.



Парови (V_i, V_j) се понашају као случајни графови са не нужно једнаким вероватноћама

1.2 Семередијева теорема

Пре него што формулишемо и докажемо лему о регуларности осврнућемо се на контекст у коме је она настала. Лема о регуларности проистекла је из Семередијевог доказа [3] хипотезе Ердоша и Турана о подскуповима природних бројева који не садрже аритметичке прогресије дужине k.

Теорема. (Семереди, 1975.) За сваки природан број k и реалан број $\delta > 0$ постоји $N = N(k, \delta)$ такво да било који подскуп првих N природних бројева величине δN садржи аритметичку прогресију дужине k.

Еквивалентано можемо рећи да сваки *густ* подскуп природних бројева садржи произвољно дугу аритметичку прогресију, где густим сматрамо подскуп који у лимесу садржи барем δ удео природних бројева или формално

$$\limsup_{N \mapsto \infty} \frac{A \cap \{1, 2, \ldots, N\}}{N} = \delta > 0.$$

Семередијева теорема је генерализација такође познате Ван дер Верденове теореме која каже да се природни бројеви не могу поделити на коначно много скупова који не садрже аритметичке прогресије дате дужине.

Теорема. (Ван дер Верден) За свако (k, m) постоји $N = N(m, k)$ такво да бојењем скупа првих N природних бројева у m боја постоји једнобојна аритметичка прогресија дужине k.

Пре самог Семередија случај $k = 3$ у Семередијевој теореми доказао је Рот, користећи се дискретном Фуријеровом анализом. Изненађујуће, Семереди је представио елементаран доказ, који се између осталог базирао на Ван дер Верденовој теореми и леми о регуларности, специјално за бипартитивне графове. Треба напоменути да је тај доказ изузетно захтеван и компликован, и да га нећемо обрадити овде, па ћемо се задржати на доказу Ротове теореме.

1.3 Нотација

Током рада са $[n]$ ћемо означавати скуп $\{1, \ldots n\}$, где је n природан број. Такође ћемо се користити асимптотском нотацијом, и увешћемо неке основне графовске појмове.

Дефиниција 2. За две реалне функције f, g кажемо да је $f = o(g)$ (читамо *f је мало о од g*), ако важи:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

где $g(x)$ не узима нула вредности почевши од неке вредности.

Дефиниција 3. *Прост граф* је уређен пар $G = (V, E)$ где је V коначан скуп а E подскуп $\binom{V}{2}$.

Дефиниција 4. За граф G кажемо да је *k-партитиван* ако постоји подела скупа темена V на k дисјунктних непразних подскупова где сваки подскуп нема грана унутар себе.

2 Регуларност

У овом поглављу ћемо дефинисати шта значи да граф можемо поделити у скупове темена који се понашају скоро случајно, и доказати нашу централну теорему - Семередијеву лему о регуларности.

2.1 Густина и регуларни парови

Увек ћемо сматрати да су наши графови $G = (V, E)$ са скупом темена V и скупом ивица E прости. Са $e(A, B)$ означаваћемо скуп свих ивица графа где једно теме припада скупу $A \subseteq V$, а друго скупу $B \subseteq V$

$$e(A, B) = \{(u, v) \in A \times B : uv \in E\}.$$

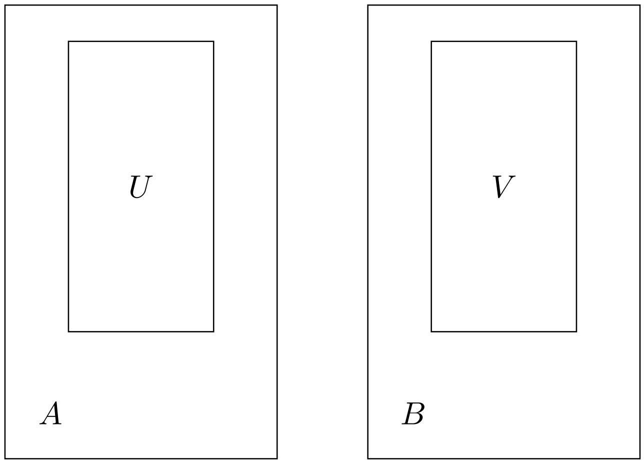
Дефиниција 5 (Густина.)**.** Нека су A и B два подскупа темена графа. *Густина* између ових скупова је

$$d(A, B) = \frac{|e(A, B)|}{|A| \cdot |B|}.$$

Дефиниција 6. (ε-регуларан пар.) За два подскупа темена графа $A, B \subseteq V$ кажемо да чине *ε-регуларан пар* ако за свако $U \subseteq A$ и $V \subseteq B$ где $|U| \geqslant \varepsilon|A|$, $|V| \geqslant \varepsilon|B|$ важи $|d(A, B) - d(U, V)| \leqslant \varepsilon$.

Приметимо да скупови A и B нису нужно дисјунктни. Такође, има смисла говорити о ε-регуларности само за $\epsilon < 1$.

За случајан граф са вероватноћом p ће очекивана вредност густине између свака два скупа темена бити баш p, па за ε-регуларан пар можемо рећи да се понаша као *скоро* случајни бипартитивни граф, како се густине између немалих подскупова темена не разликују знатно. Вредност ε игра улогу грешке, у смислу да се са мањим ε локалне густине мање разликују од очекиваних густина случајног графа.



$$|U| \geq \varepsilon|A|, |V| \geq \varepsilon|B|$$

$$|d(A,B) - d(U,V)| \leq \varepsilon$$

Дефиниција 7. (ε-регуларна еквипартиција.) Партиција темена графа $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\} \cup \{V_0\}$ је *ε-регуларна еквипартиција* ако:

- $|V_0| \leqslant \varepsilon|V|$,
- $|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|$,
- највише εk^2 парова (V_i, V_j) $(i,j) \in [k]^2$ није ε-регуларно.

Згодно ће нам бити да партицију која задовољава само треће својство зовемо ε-регуларна партиција. Скуп темена V_0 игра улогу *отпадака*, у смислу да ту *одбацујемо* мали број темена, како бисмо добили једнаке величине осталих скупова. Самим тим, под деловима партиције из претходне дефиниције сматрамо $V_1, \ldots V_k$, али не и V_0.

Сада можемо формулисати централно тврђење, лему о регуларности.

Теорема 1. (Лема о регуларности.) За свако $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ постоји природан број $M = M(\varepsilon, m)$ такав да за сваки граф G са барем m темена постоји ε-регуларна еквипартиција G са k делова, где је $m \leqslant k \leqslant M$.

Додајмо да је постојање скупа V_0 само техничке природе (згодно ће нам бити при доказивању леме о регуларности). Алтернативно можемо посматрати партиције на делове чије се величине разликују за не више од 1, без скупа V_0, и ова верзија леме о регуларности ће важити.

Приметимо да број делова у еквипартицији уопште не зависи од броја темена графа G. Међутим, за графове са малим бројем темена ($n < M$), ово тврђење нема пуно значаја - на пример, можемо поделити граф на појединачна темена, тада је ε-регуларност тривијално задовољена. Такође, приметимо да за веома *ретке* графове, са $o(n^2)$ ивица, густине између парова теже нули за велико n, па лема регуларности даје смислене резултате само за густе графове са великим бројем темена.

2.2 Припрема за доказ леме о регуларности

Занимљиво је да су покушаји вероватносне конструкције регуларних партиција датог графа углавном неуспешни. Идејно, алгоритам за конструкцију регуларних партиција би изгледао овако

- Почнимо од тривијалне партиције (један скуп свих темена).
- Сваки ε-нерегуларан пар (A, B) у нашој паритицји ћемо поделити скупове A и B на више мањих делова.
- Када добијемо ε-регуларну партицију, стајемо.

Овај процес ће се сигурно завршити (ако за скупове узмемо појединачна темена), али главни проблем је обезбедити да број коначан број делова не зависи од величине графа. Да бисмо ограничили број итерација оваквог алгоритма, увећћемо погодону *моноваријанту* - величину која ће нам расти док партиција није ε-регуларна, а да је пиртом ограничена.

Дефиниција 8. За граф G и његове дисјунктне подскупове темена $A, B \subset V(G)$, *средња квадратна густина* је

$$q(A, B) = \frac{|A||B|}{n^2} d^2(A, B),$$

где је $n = |V(G)|$. Додатно, за партицију темена $\mathcal{P} = \{V_i\}_{i=0}^k$ дефинишимо

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} q(V_i, V_j).$$

Подсетимо се да нам је за скуп V_0 једино битно да он буде мали (уопште не разматрамо регуларност парова (V_0, V_i)), па можемо скуп V_0 посматрати као партицију на синглтоне:

$$\mathcal{V}_0 = \{\{v\} : v \in V_0\}.$$

Дакле, код $q(V_0, V_i)$ узимаћемо заправо $\sum_{v \in V_0} q(\{v\}, V_i)$, што ће нам бити корисно касније.

Приметимо да је $q(\mathcal{P})$ ограничена:

Лема 1. $q(\mathcal{P}) \in [0, 1]$.

Доказ. Како је $d(A, B) \leqslant 1$, то имамо:

$$q(\mathcal{P}) \leqslant \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} = 1$$

јер сума $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |V_i||V_j|$ управо броји све парове темена у графу. □

Нама прво кључно својство ове функције је то да она неће опасти при *уситњавању* партиција, тј. при подели скупова на мање делове. Означимо $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$ ако је сваки члан $\mathcal{P}'$ подскуп неког члана у $\mathcal{P}$.

Лема 2. $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}' \implies q(\mathcal{P}) \leqslant q(\mathcal{P}')$

Доказ. Довољно је да докажемо да при уситњавању неког пара (A, B), средња квадратна густина расте. Нека су $\mathcal{P}_A = \{A_i\}_{i=1}^{m}$ и $\mathcal{P}_B = \{B_i\}_{i=1}^{l}$ партиције скупова A и B.

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B) &:= \sum_{(i,j) \in [m] \times [l]} q(A_i, B_j) \\ &= \sum_{(i,j) \in [m] \times [l]} |A_i| \cdot |B_j| d^2(A_i, B_j) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j) \in [m] \times [l]} \frac{e^2(A_i, B_j)}{|A_i| \cdot |B_j|}. \end{aligned}$$

Применом Коши-Шварцове неједнакости је:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{(i,j) \in [m] \times [l]} \frac{e^2(A_i, B_j)}{|A_i| \cdot |B_j|} \right) \cdot (|A| \cdot |B|) &= \left(\sum_{(i,j) \in [m] \times [l]} \frac{e^2(A_i, B_j)}{|A_i| \cdot |B_j|} \right) \cdot \left(\sum_{(i,j) \in [m] \times [l]} |A_i| \cdot |B_j| \right) \\ &\geqslant \left(\sum_{(i,j) \in [m] \times [l]} e(A_i, B_j) \right)^2 \\ &= e^2(A, B). \end{aligned}$$

Када уврстимо ово у претходну једнакост добијамо тражени резултат

$$q(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B) \geqslant \frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^2(A, B)}{|A| \cdot |B|} = q(A, B)$$

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}') &= \sum_{(i,j)\in[k]^2} q(\mathcal{P}_{V_i}, \mathcal{P}_{V_j}) + \sum_{i=1}^{k} q(\mathcal{P}_{V_i}) \\
&\geqslant \sum_{(i,j)\in[k]^2} q(V_i, V_j) \\
&= q(\mathcal{P}).
\end{aligned}$$

□

Желимо да докажемо да све док уситњавамо ε-нерегуларне парове средња квадратна густина ће расти бар за константу. Главна лема је следећа:

Лема 3. Нека је (A, B) ε-нерегуларан и нека су $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$ такви да $|A_1| \geqslant \varepsilon|A|$, $|B_1| \geqslant \varepsilon|B|$ и $|d(A,B) - d(U,V)| > \varepsilon$. Узмимо $\mathcal{P}_A = \{A_1, A \setminus A_1\}$ ($A_2 := A \setminus A_1$) и $\mathcal{P}_B = \{B_1, B \setminus B_1\}$. Тада важи следеће:

$$q(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B) \geqslant q(A, B) + \varepsilon^4 \frac{|A||B|}{n^2}.$$

Доказ. Нека је $A_2 := A \setminus A_1$ и $B_2 := B \setminus B_1$. Униформно одаберимо неко теме $a \in A$ и теме $b \in B$. Нека је A_i скуп из $\mathcal{P}_A$ коме припада теме a и слично дефинишимо B_j. Уведимо случајну промењљву $X = d(A_i, B_j)$. Варијансу ове случајне промењиве ћемо тражити на два начина, користећи се идентитетом

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Нађимо очекиване вредности X и X^2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{(i,j)\in[2]^2} \mathbb{P}[a \in A_i] \cdot \mathbb{P}[b \in B_j] \cdot d(A_i, B_j) \\
&= \sum_{(i,j)\in[2]^2} \frac{|A_i|}{|A|} \cdot \frac{|B_j|}{|B|} d(A_i, B_j) \\
&= \frac{1}{|A| \cdot |B|} \sum_{(i,j)\in[2]^2} e(A_i, B_j) \\
&= \frac{e(A, B)}{|A| \cdot |B|} \\
&= d(A, B),
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{(i,j)\in[2]^2} \frac{|A_i|}{|A|} \cdot \frac{|B_j|}{|B|} d^2(A_i, B_j)$$

$$= \frac{n^2}{|A| \cdot |B|} \sum_{(i,j) \in [2]^2} q(A_i, B_j)$$
$$= \frac{n^2}{|A| \cdot |B|} q(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B).$$

Дакле, наша варијанса једнака је:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \frac{n^2}{|A| \cdot |B|} q(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B) - d^2(A,B) \\ &= \frac{n^2}{|A| \cdot |B|} \left(q(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B) - q(A,B)\right).\end{aligned}$$

Са друге стране, вероватноћа да $X = d(A_1, B_1)$, односно вероватноћа да $|X - E(X)| = |d(A,B) - d(A_1,B_1)| \geqslant \varepsilon$, је $\frac{|A_1| \cdot |B_1|}{|A| \cdot |B|}$, па тиме можемо оценити варијансу X користећи Марковљеву неједнакост.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] \\ &\geqslant \varepsilon^2 \cdot \mathbb{P}[|X - E(X)| \geqslant \varepsilon] \\ &\geqslant \varepsilon^2 \frac{|A_1| \cdot |B_1|}{|A| \cdot |B|} \\ &\geqslant \varepsilon^4,\end{aligned}$$

а ако уврстимо израз за варијансу, добијамо

$$q(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B) - q(A,B) \geqslant \varepsilon^4 \frac{|A||B|}{n^2}.$$

□

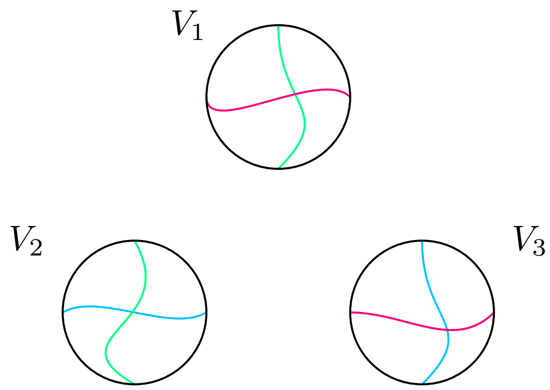
Сада када смо доказали да уситњавањем парова скупова (V_i, V_j) који нису ε-регуларни, средња квадратна густина локално расте, можемо да докажемо да ће при профињењу свих парова (V_i, V_j) који нису ε-регуларни средња квадратна густина читаве партиције порасти за константу.

Ово ће нам практично завршити доказ леме, с тим што ћемо ово профињење касније прилагодити тако да у свакој итерацији имамо скупове једнаких величина.

Лема 4. Нека је $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, V_2, \ldots V_k\}$ нека еквипартиција која није ε-регуларна, а да је притом $|V_0| \leqslant \varepsilon n$. Тада постоји профињење $\mathcal{P}'$ где $|\mathcal{P}' \setminus \{V_0\}| \leqslant k2^k$ и

$$q(\mathcal{P}') \geqslant q(\mathcal{P}) + (1-\varepsilon)\varepsilon^5$$

Доказ. За сваки пар (V_i, V_j) који није ε-регуларан нека је (A^{ij}, A^{ji}) пар подскупова због којих критеријум малих разлика густине није задовољен. Нека је $\mathcal{P}_i$ заједничка партиција свих партиција скупа V_i, $p_{ij} = \{A^{ij}, V_i \backslash A^{ij}\}$ за сваки нерегуларни пар (V_i, V_j). Заменимо свако V_i са $\mathcal{P}_i$ (ако V_i није садржан ни у једном нерегуларном пару, узмимо $\mathcal{P}_i = \{V_i\}$).



Заједничка партиција за
парове (V_1, V_2), (V_2, V_3), (V_3, V_1)

На овај начин је сваки скуп подељен на највише 2^k делова. Докажимо сада да смо овиме повећали средњу квадратну густину.

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}') &= \sum_{(i,j)\in[k]^2} q(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) \\
&= \sum_{(V_i,V_j)\text{рег.}} q(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) + \sum_{(V_i,V_j)\text{нерег.}} q(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) + 2\sum_{i\in[k]} q(\mathcal{V}_0, \mathcal{P}_i) + q(\mathcal{V}_0) \\
&\overset{\text{Лема 2}}{\geqslant} \sum_{(V_i,V_j)\text{ рег.}} q(V_i, V_j) + \sum_{(V_i,V_j)\text{ нерег.}} q(p_{ij}, p_{ji}) + 2\sum_{i\in[k]} q(\mathcal{V}_0, \{V_i\}) + q(\mathcal{V}_0) \\
&\overset{\text{Лема 3}}{\geqslant} q(\mathcal{P}) + \sum_{(V_i,V_j)\text{нерег.}} \frac{|V_i| \cdot |V_j|}{n^2}\varepsilon^4
\end{aligned}$$

Како је бар εk^2 парова (V_i, V_j) нерегуларно и величине скупова V_i све једнаке по $\frac{n-|V_0|}{k}$, то је $\sum_{(V_i,V_j)\text{нерег.}} |V_i| \cdot |V_j| \geqslant \varepsilon(n - \varepsilon n)^2 = \varepsilon(1-\varepsilon)n^2$. Када уврстимо ово у последњу неједнакост следи:

$$q(\mathcal{P}') \geqslant q(\mathcal{P}) + (1-\varepsilon)\varepsilon^5$$

што је и требало доказати. $\square$

Приметимо да наша нова партиција нема једнаке величине скупова, дакле све што је остало урадити је модификовати ово уситњавање тако што ћемо темена пребацивати у V_0, да бисмо добили еквипартицију.

2.3 Доказ леме о регуларности

Лема 5. Нека је $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ нека еквипартиција графа G ($|V(G)| = n$), која није ε-регуларна. Тада постоји профињење $\mathcal{P}'$ (са новим скупом отпадака V_0') које је еквипартиција са не више од $k4^k$ скупова која повећава средњу квадратну густину:

$$q(\mathcal{P}') \geqslant q(\mathcal{P}) + (1-\varepsilon)\varepsilon^5,$$

а да притом скуп отпадака порасте веома мало:

$$|V_0'| \leqslant |V_0| + \frac{n}{2^k}.$$

Доказ. Надоградићемо партицију из претходне леме. Наиме, прво уситнимо партицију $\mathcal{P}$ као у претходној леми. На тај начин смо од $\{V_0, V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ добили партицију $\tilde{\mathcal{P}} = \{V_0, U_1, U_2, \ldots U_M\}$, $M \leqslant k2^k$. Сваки од U_i поделимо у највише могуће дисјунктних подскупова величине $d = \frac{|V_1|}{4^k}$. Остатак из сваког U_i поделићемо на синглтоне и придружити новом скупу V_0'. Видимо да је ово ништа друго него уситњење $\tilde{\mathcal{P}}$ (овде нам је од значаја било што V_0 посматрамо као партицију на синглтоне). Притом, средња квадратна густина ове нове партиције $\mathcal{P}'$ је порасла захваљујући претходној леми:

$$q(\mathcal{P}') \overset{\text{Лема 2}}{\geqslant} q(\tilde{\mathcal{P}}) \overset{\text{Лема 4}}{\geqslant} q(\mathcal{P}) + (1-\varepsilon)\varepsilon^5.$$

Додатно, нова партиција има не више од $k4^k$ скупова

$$|\mathcal{P}' \setminus \{V_0'\}| \leqslant \frac{k|V_1|}{d} = k4^k.$$

Док је скуп V_0 порастао за не више од d елемената по сваком од U_i

$$|V_0'| \leqslant |V_0| + dM \leqslant |V_0| + \frac{n}{k4^k} \cdot k2^k = |V_0| + \frac{n}{2^k}.$$

$\square$

Подсетимо се тврђења централне теореме, Семередијеве леме о регуларности:

Теорема 1. За свако $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ постоји природан број $M = M(\varepsilon, m)$ такав да за сваки граф G постоји ε-регуларна еквипартиција G са $m \leqslant k \leqslant M$ делова.

Доказ. Установили смо да почевши од произвољне еквипартиције, применом профињења из претходне леме, у не више од $\varepsilon^{-5}(1-\varepsilon)^{-1}$ корака долазимо до ε-регуларне еквипартиције. Остало је да се уверимо да овиме коначни скуп отпадака није већи од εn. Са V_0^l означимо скуп отпадака у l-тој итерацији, и претпоставимо да долазимо до ε-регуларне партиције након L итерација.

$$|V_0^L| \leqslant |V_0| + L \cdot \frac{n}{2^{k_0}} \leqslant |V_0| + \frac{n\varepsilon^{-5}(1-\varepsilon)^{-1}}{2^{k_0}},$$

где је k_0 број скупова у иницијалној партицији.
Довољно да одаберемо најмање могуће $k_0 \geqslant m$ и почетно V_0 такво да важи

$$\frac{n\varepsilon^{-5}(1-\varepsilon)^{-1}}{2^{k_0}} \leqslant \frac{n\varepsilon}{2} \qquad\qquad |V_0| \leqslant k_0 \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}$$
$$2^{k_0-1} \geqslant \varepsilon^{-6}(1-\varepsilon)^{-1} \qquad\qquad n \geqslant \frac{2k_0}{\varepsilon}.$$

За $n \leqslant \frac{2k_0}{\varepsilon}$ можемо узети тривијалну партицију на синглтоне и $V_0 = \emptyset$, која је свакако ε-регуларна.

За довољно велика n, довољно је да одаберемо произвољан скуп V_0 величине $n \mod k_0$, да бисмо остатак поделили на k_0 једнаких делова. Нека је $f(k) = k4^k$. Сваком итерацијом леме 5, од k делова добијамо не више од $f(k)$ делова. Поновном применом леме 5 долазимо до ε-регуларне еквипартиције са не више од:

$$k = \max\{f^{(\varepsilon^{-5}(1-\varepsilon)^{-1})}(k_0), \frac{2k_0}{\varepsilon}\} = M(\varepsilon, m)$$

делова. Како је k_0 одабрано да буде $\max\{m, -\log_2(\varepsilon^6(1-\varepsilon))\}$, k је заиста ограничено функцијом од ε и m, чиме смо доказали лему о регуларности. $\square$

2.4 Оцене у леми о регуларности

Запитајмо се какве оцене смо добили за M. За мања ε (што углавном желимо) наш доказ даје оцене облика

$$f^{((1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon^{-5})}(k_0).$$

Приметимо да је $4^{4^k} > f(k) > 4^k$, те имамо ограничење за $f^(n)(k)$

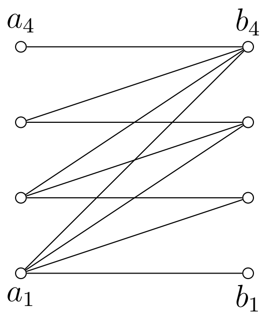
$$\underbrace{4^{4^{4^{\cdots^{k}}}}}_{2n \text{ пута степеновано}} > f^n(k) > \underbrace{4^{4^{4^{\cdots^{k}}}}}_{n \text{ пута степеновано}}.$$

Ово значи да лема о регуларности производи смислене резултате само за огромна n (како $n > M$). Тешко је и замислити колико брзо ове такозване *тораћ* функције расту. Ако уведемо ознаку $a \uparrow\uparrow n$ да буде тораћ величине n са базом a, видимо да је већ $2 \uparrow\uparrow 4 = 65536$, док је $2 \uparrow\uparrow 5 = 2^{65536}$ што је већ много веће од броја атома у универзуму (10^{82}).

Делује да овај доказ леме о регуларности оставља доста простора за побољшање и да су оцене доста грубе, али испоставља се да је ова оцена заправо одговарајућа, бар у квалитативном смислу. Наиме Гауерс је у [5] доказао да постоје графови за које је потребно барем $2 \uparrow\uparrow \varepsilon^{-c}$ делова да би се постигла ε-регуларна партиција.

Друго питање које се природно намеће је да ли се број парова који нису ε-регуларни може побољшати. Испоставља се да постоје графови који намећу значајан удео ε-нерегуларних парова. Један такав пример је *полу-граф*.

Дефиниција 9. Бипартитиван граф H_n са теменима $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$, где $a_i b_j \in E(H_n)$ акко $i \leqslant j$ зовемо *полу-графом.*



Граф H_4

Тврђење. За свако довољно мало $\varepsilon > 0$, постоји $c > 0$ такво да за свако k постоји n такво да свака ε-регуларна подела H_n на k делова има бар ck ε-нерегуларних парова.

3 Лема о уклањању троуглова

У наредном поглављу ћемо се бавити тврђењима која нам говоре да бројеви структура у регуларној партицији не одступају много од очекиваних вредности броја тих структура у одговарајућем случајном графу. Конкретно, у овом поглављу ћемо се фокусирати на троуглове и формулисати и доказати лему о уклањању троуглова, и приказати неке од њених примена, као што је Ротова теорема о којој је било речи у уводу.

3.1 Припема и доказ леме

Најпре ћемо доказати једну помоћну лему која нам говори да у ε-регуларном пару (A, B) скоро сва темена имају близу очекивано много ивица са једним теменом у скупу B.

Лема 6. (Лема о степену) Нека је (A, B) неки ε-регуларан пар са густином d_{AB}. Онда за бар $(1-\varepsilon)|A|$ темена a из A важи

$$\deg_B(a) := |e(\{a\}, B)| \geqslant (d_{AB} - \varepsilon)|B|$$

Доказ. Претпоставимо супротно, да за бар $\varepsilon|A|$ темена $a \in A$ важи $\deg_B(A) \leqslant d_{AB} - \varepsilon$. Међутим, густина између скупа таквих темена A' и скупа B је барем

$$d(A', B) = \frac{\sum_{a \in A'} |e(a, B)|}{|A'||B|} \geqslant d_{AB} - \varepsilon$$

што је у супротности са претпоставком да је пар (A, B) ε-регуларан. $\square$

Сада желимо да оценимо број троуглова у скуповима X, Y, Z, где су (X, Y), (Y, Z) и (Z, X) сви ε-регуларни. У одговарајућем случајним графовима, са вероватноћама $d_{XY} := d(X, Y)$, $d_{YZ} = d(Y, Z)$ и $d_{ZX} = d(Z, X)$, очекиван број троуглова $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ је

$$\mathbb{E}[\Delta] = \sum_{(x,y,z) \in X \times Y \times Z} \mathbb{E}[1_{\Delta_{xyz}}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(x,y,z)\in X\times Y\times Z} \mathbb{P}[\Delta_{xyz}] \\
&= \sum_{(x,y,z)\in X\times Y\times Z} d_{XY}d_{YZ}d_{ZX} \\
&= d_{XY}d_{YZ}d_{ZX}|X||Y||Z|.
\end{aligned}
$$

Испоставља се да за довољно густе регуларне парове, слично тврђење важи.

Теорема 2. (Лема о броју троуглова.) Дат је граф G и његови подскупови темена X, Y, Z (не нужно дисјунктни ни различити) такви да су (X, Y), (Y, Z) и (Z, Y) ε-регуларни. Ако су $d_{XY}, d_{YZ}, d_{ZX} \geqslant 2\varepsilon$ густине између одговарајућих парова, онда је број троуглова $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ једнак барем

$$(1-2\varepsilon)(d_{XY}-\varepsilon)(d_{YZ}-\varepsilon)(d_{ZX}-\varepsilon)|X||Y||Z|.$$

Доказ. Користећи лему о степену знамо да мање од $\varepsilon|X|$ темена $x \in X$ има мање од $(d_{XY}-\varepsilon)|Y|$ суседа у Y. Онда постоји барем $(1-2\varepsilon)|X|$ темена из X која имају бар $(d_{XY}-\varepsilon)|Y|$ суседа у Y и бар $(d_{ZX}-\varepsilon)|Z|$ суседа у Z.

Фиксирајмо неко такво теме $x \in X$. Како скупови суседа $N_Y(x)$ и $N_Z(x)$ имају барем $(d_{XY}-\varepsilon)|Y| \geqslant \varepsilon|Y|$ и $\varepsilon|Z|$ темена, можемо искористити услов ε-регуларности пара (Y, Z).

$$
\begin{aligned}
e(N_Y(x), N_Z(x)) &= d(N_Y(x), N_Z(x))|N_Y(x)||N_Z(x)| \\
&\geqslant (d_{YZ}-\varepsilon)\cdot(d_{XY}-\varepsilon)|Y|\cdot(d_{YZ}-\varepsilon)|Z| \\
&= (d_{XY}-\varepsilon)(d_{YZ}-\varepsilon)(d_{YZ}-\varepsilon)|Y||Z|.
\end{aligned}
$$

Дакле, x се садржи у барем $(d_{XY}-\varepsilon)(d_{YZ}-\varepsilon)(d_{YZ}-\varepsilon)|Y||Z|$ троуглова, те је укупан број троуглова једнак бар

$$(1-2\varepsilon)(d_{XY}-\varepsilon)(d_{YZ}-\varepsilon)(d_{YZ}-\varepsilon)|X||Y||Z|,$$

што је и требало доказати. □

Приметимо да нам ова лема заправо говори да постојање једне довољно густе ε-регуларне тројке индукује постојање доста (тј. око очекивано много) троуглова у њој. Ово тврђење ће нам бити кључно за доказивање наредне познате теореме Руже и Семередија [6].

Теорема 3. (Лема о уклањању троуглова.) За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да сваком графу од n темена са мање од δn^3 троуглова можемо обрисати не више од εn^2 ивица да бисмо добили граф без троуглова.

Ово је прво тврђење које није директно везано за регуларне партиције, па ћемо на њему видети како узимање регуларних партиција може бити корисно. Идеја за доказ је да желимо да одаберемо δ које ће условити да регуларне партиције графа немају густе регуларне тројке, јер како смо видели у претходној леми, оне индукују постојање више троуглова. Онда ћемо обрисати све ивице између нерегуларних парова и ивице између парова са малом густином и добити граф без троуглова, а да смо притом обрисали не више од εn^2 ивица.

Доказ. Претпоставимо да граф G има мање од $\delta(\varepsilon)n^3$ троуглова, где ћемо $\delta(\varepsilon)$ одабрати касније. Узмимо онда $\frac{\varepsilon}{4}$-регуларну еквипартицију овог графа (параметар m нам не игра улогу овде, па можемо одабрати $m = 1$). Тако смо добили партицију темена $\{V_0, V_1, \dots V_k\}$, $k < M$. Из графа онда бришемо следеће ивице:

1. Бришемо читав скуп V_0 и ивице које садрже теме из V_0. Како скуп V_0 нема више од $\frac{\varepsilon}{4}n$ темена у овом кораку смо обрисали не више од
$$E_{V_0} \leqslant |V_0| \cdot n \leqslant \frac{\varepsilon}{4}n^2$$
ивица.

2. Бришемо ивице између сваког пара (V_i, V_j) $(ij \neq 0)$ који није $\frac{\varepsilon}{4}$-регуларан. Како оваквих парова има не више од $\frac{\varepsilon}{4}k^2$, и $|V_i| = \frac{n-|V_0|}{k}$ и овом кораку смо обрисали не више од
$$E_{\text{нерег.}} \leqslant \sum_{(V_i,V_j)\ \text{нерег.}} |V_i||V_j| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}k^2 \cdot \frac{(n-|V_0|)^2}{k^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}n^2$$
ивица.

3. Имајући на уму лему о броју троуглова уклонићемо ивице између свих парова (V_i, V_j) са густином мањом од $\frac{\varepsilon}{2}$. Тиме смо у овом кораку обрисали не више од
$$E_{\text{ретки}} \leqslant \sum_{d(V_i,V_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}} d(V_i,V_j)|V_i||V_j| \leqslant \sum_{d(V_i,V_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{2}|V_i||V_j| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}n^2$$
ивица.

Укупно смо обрисали не више од

$$E_{V_0} + E_{\text{нерег.}} + E_{\text{ретки}} \leqslant \varepsilon n^2$$

ивица. Тврдимо да граф сада нема троуглова. Заиста, ако претпоставимо супротно, да постоји троугао (i, j, k) у овом редукованом графу, он мора припадати некој тројци (V_i, V_j, V_k) која има густину већу од $\frac{\varepsilon}{2}$ по паровима. Користећи Лему о броју троуглова, видимо да у тројци (V_i, V_j, V_k) има барем

$$|\{(i, j, k) \text{ чине троугао} : (i, j, k) \in V_i \times V_j \times V_k\}| \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3 \left(\frac{n}{M}\right)^3$$

троуглова, односно да постоји барем $\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3 \left(\frac{n}{M}\right)^3$ троуглова у редукованом графу (узимајући случај $i = j = k$). Коначно, ако одаберемо $\delta(\varepsilon)$ као

$$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^3$$

добијамо да редуковани, па самим тим и почетни граф има бар δn^3 троуглова, контрадикција. Дакле, брисањем не више од εn^2 ивица смо заиста обрисали све троуглове, чиме смо доказали тврђење теореме. □

Користећи асимптотску нотацију можемо преформулисати лему о уклањању троуглова.

Теорема. (Лема о уклањању троуглова, асимптотски) Сваком графу од n темена са $o(n^3)$ троуглова можемо обрисати $o(n^2)$ ивица да бисмо добили граф без троуглова.

3.2 (6,3)-проблем

(6,3)-проблем подсећа на проблеме екстремалне теорије графова, само што се бави 3-униформним-хиперграфовима, уместо обичних графова. Уместо парова темена, 3-униформни-хиперграф узима тројке темена за ивице.

Дефиниција 10. Нека је V неки коначан скуп, и нека је E неки подскуп $\binom{V}{3}$. Онда $G = (V, E)$ зовемо 3-униформним-хиперграфом.

Браун, Ердош и Шош су у [7] поставили следеће питање: За фиксно $k \geqslant 6$, колико највише ивица може имати 3-униформни-хиперграф од n темена, где било којих k темена међу собом има мање од $k-3$ ивица? Поставили су хипотезу да је одговор облика $o(n^2)$, а једини случај у коме је познат одговор је $k=6$, за који су Ружа и Семереди доказали да је одговор потврдан.

Испоставља се да се ово тврђење може превести на језик обичних графова, које можемо доказати применом леме о уклањању троуглова.

Теорема 4. (Ружа-Семереди) 3-униформни-хиперграф H са n темена, такав да било којих 6 темена нема међу собом 3 или више ивица, има највише $e(H)$ ивица, где је

$$e(H) = o(n^2).$$

Доказ. Приметимо да троуглови у обичном графу могу да одговарају хиперивицама у 3-униформном хиперграфу над истим теменима. Доказаћемо да је ово тврђење еквивалентно следећем:

Теорема 5. Граф са n темена, при чему се свака ивица садржи у тачно једном троуглу, има $o(n^2)$ ивица.

Доказ еквиваленције.

- Теорема 4 $\Longrightarrow$ Теорема 5. Обришимо све четворке темена које имају међу собом 2 хиперивице. Било које од ових темена се не налази у ни једној другој хиперивици, па у овом кораку бришемо не више од n хиперивица. У преосталом хиперграфу сваке две хиперивице имају највише један заједнички елемент: за хиперивице $h_v = \{v_i, v_j, v_k\}$ и $h_u = \{u_i, u_j, u_k\}$ важи $|h_v \cap h_u| \leqslant 1$. Онда можемо узети класичан граф где одговарају хиперивицама у овом редукованом хиперграфу.

- Теорема 5 $\Longrightarrow$ Теорема 4. Сваком троуглу придружимо одговарајућу хиперивицу у хиперграфу, услов теореме 5 је задовољен.

Сада докажимо Теорему 5.

Доказ теореме 5 Како свака ивица лежи у тачно једном троуглу, граф G има тачно $\frac{|E|}{3} < \frac{n^2}{3} = o(n^3)$ троуглова, па можемо применити лему о уклањању троуглова. Дакле, уклонивши $o(n^2)$ ивица смо уклонили све троуглове из G. Међутим, како свака ивица брише тачно један троугао то имамо да је у овом брисању уклоњено барем $\frac{|E|}{3}$ ивица. Дакле $|E| = o(n^2)$. $\square$

3.3 Ротова теорема

Сада ћемо доказати Ротову теорему, тако што ћемо најпре конструисати граф где ће решења једначине $x + z = 2y$ у скупу A одговарати троуглу. Нека је дат скуп $A \subseteq [N]$. Радићемо над групом $G = \mathbb{Z}_{2N+1}$, и скуп A ћемо посматрати као подскуп елемената групе. Конструишимо трипаритивни граф над скуповима темена $X, Y, Z = G$, где ћемо повезати темена

- $x \in X$ са $y \in Y$ ако и само ако $y - x \in A$,
- $y \in Y$ са $z \in Z$ ако и само ако $z - y \in A$,
- $z \in Z$ са $x \in X$ ако и само ако $\frac{z-x}{2} \in A$.

Циклична група је непарна, па је последњи корак добро дефинисан. Троугао (x, y, z) у овом графу онда одговара том да бројеви

$$z_1 = y - x \qquad x_1 = z - y \qquad y_1 = \frac{z - x}{2} \tag{3.1}$$

припадају A, и чине аритметичку прогресију у $\mathbb{Z}_{2N+1}$. Међутим, како су x_1, y_1, z_1 елементи из A то ћемо имати једнакост и у $\mathbb{Z}$, $x_1 + z_1 = 2y_1$. Како једначина $x + z = 2y$ има увек тривијална решења у A ($x = y = z$), видимо да ће овај граф садржати само те тривијалне троуглове када за A узмемо да је подскуп $[N]$ без аритетичких прогресија дужине три.

Теорема 6. (Ротова теорема) Нека је $r_3(N)$ величина највећег подскупа $[N]$ који не садржи аритметичке прогресије дужине 3. Онда је $r_3(N) = o(N)$.

Доказ. Нека $A \subseteq [N]$ не садржи аритметичке прогресије дужине 3. Конструишимо трипартитивни граф над три копије $\mathbb{Z}_{2N+1}$ као што смо претходно описали. Троуглови у овом графу одговарају тривијалним аритметичким прогресијама у A, па за сваку ивицу графа uv постоји тачно једно теме w, такво да је uvw троугао (решавајући систем 3.1 за $x_1 = y_1 = z_1$). Како се свака ивица налази у тачно једном троуглу, по теореми 5 овај граф има $o(N^2)$ ивица. Међутим, сваки елемент из A одговара тачно $3(2N+1)$ ивица у овом графу, те је $3(2N+1)|A| = o(N^2)$, односно $|A| = o(N)$, што је и требало доказати.

□

3.4 Оцене у Ротовој теореми

Посматрајући оцене из леме о уклањању троуглова, претходни доказ не даје сјајне оцене. Наиме, оцене из претходног доказа су облика

$$r_3(N) \leqslant \frac{N}{(\log^* N)^c}$$

где је $\log^*(N)$ број пута колико треба да логаритмујемо N да бисмо добили број мањи од 1 (налик инверзу торањ операције $\uparrow\uparrow$), а c константа. У Ротовом доказу оцена је била облика $\frac{N}{\log(\log N)}$, што је знатно боља оцена од ове. Међутим, што се тиче доњих ограничена најпознатије је дао Беренд четрдесетих година, и занимљиво је да та оцена није знатно побољшана од тад.

Теорема 7. (Беренд) Постоји константа $c > 0$ таква да за сваки природан број N постоји подскуп $A \subseteq [N]$ који не садржи аритметичке прогресије дужине три, а да притом важи

$$|A| \geqslant N e^{-c\sqrt{\log N}}.$$

Доказ. За природне бројеве m, d посматрајмо целобројну решетку $[m]^d$ и њене пресеке са сферама полупречинка $\sqrt{L}$ ($L \in \mathbb{N}$)

$$X_L = \{(x_1, \dots, x_d) \in [m]^d : x_1^2 + \cdots + x_d^2 = L\}$$

Очигледно мора бити $L \leqslant dm^2$, па један од скупова $X_1, X_2, \dots, X_{dm^2}$ мора имати барем $\frac{m^d}{dm^2}$ елемената. Нека је $|X_l| \geqslant \frac{m^d}{dm^2}$. Свакој d-торци у овом скупу придружићемо одговарајући природни број тако што ћемо узети број са овим цифрама у систему са базом $2m + 1$.

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots x_d) &:= \sum_{i=1}^{d} x_i (2m+1)^{i-1} \\ &= \overline{x_d x_{d-1} \dots x_1}_{(2m+1)} \end{aligned}$$

Пресликавање ϕ је очигледно ињективно. Приметимо да ако три различита вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X_l$ чине аритметичку прогресију онда то чине и природни бројеви $\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{z})$ и обратно, јер нема преноса цифре у сабирању:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}) &= \overline{x_d x_{d-1} \dots x_1}_{(2m+1)} + \overline{y_d y_{d-1} \dots y_1}_{(2m+1)} \\ &= \overline{(2z_d)(2z_{d-1}) \dots (2z_1)}_{(2m+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \overline{z_d z_{d-1} \dots z_1}_{(2m+1)} \\ &= 2 \cdot \phi(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

Докажимо да различити вектори на истој сфери не могу задовољавати једначину $\mathbf{x} + \mathbf{z} = 2\mathbf{y}$. Применимо неједнакост троугла (односно неједнакост Минковског):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{z}\| &\geqslant \|\mathbf{x} + \mathbf{z}\| \\ &= 2\|\mathbf{y}\| \end{aligned}$$

Како су вектори на истој сфери то је $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{z}\|$, односно мора се постићи једнакост у претходној неједнакости, што ће рећи да је $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{z}$, односно $\mathbf{x} = -\mathbf{z}$ (због једнаких норми и различитости). Међутим тада је $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, што очигледно не припада нашој сфери.

Дакле скуп $\phi(X_l)$ нема аритметичких прогресија, јер X_l нема аритметичких прогресија. Сви бројеви у скупу $\phi(X_l)$ су не већи од

$$M = m \cdot \frac{(2m+1)^d - 1}{2m}$$

Остало је да одаберемо d и m у функцији од N које ће максимизовати израз

$$|X_l| \geqslant \frac{m^{d-2}}{d},$$

а да притом важи $N \approx M$. Узимајући $(d, m) = (\sqrt{\log N}, \frac{1}{2}e^{\sqrt{\log N}})$ добијамо управо оцену

$$|A| = |\phi(X_l)| = |X_l| \geqslant \frac{m^d}{dm^2} \geqslant Ne^{-c\sqrt{\log N}}.$$

□

3.5 Аритметичка лема о уклањању троуглова

Видели смо један пример како лема о уклањању троуглова, тврђење које је везано за графове, може бити корисна у доказу Ротове теореме, тврђења које је везано за низове без неких решења једначина. Сада ћемо доказати аритметичку лему о уклањању троуглова, која ће нам налик графовској леми о уклањању троуглова, рећи да ако низ садржи мали број решења $x + y = z$, можемо уклонити та решења бришући мали број елемената.

Одговор на питање максималне величине низа $A \subseteq [N]$ без тројке елемената $x+y = z$ (коју надаље зовемо аритметичка тројка) није исте природе као Ротова теорема - можемо узети на пример све непарне бројеве и тако добити подниз природних бројева густине $\frac{1}{2}$ који не садржи аритметичку тројку. Ипак, при бојењу природних бројева ће постојати једнобојна аритметичка тројка, што нам говори следећа теорема.

Теорема 8. (Шурова теорема) Доказати да постоји $N = N(k)$, такво да за свако k-бојење бројева $\{1, 2, \ldots N\}$ постоје истобојни бројеви x, y, z који задовољавају $x + y = z$.

Доказ. Индексирајмо наше боје. Посматрајмо граф K_N над скупом $[N]$ где је грана која одговара бројевима uv, $u \neq v$ обојена бојом $|u - v|$. Видимо да је троугао uvw онда истобојан ако и само ако су бројеви $|u - v|$, $|v - w|$, $|w - u|$ истобојни. Међутим, постојање истобојног троугла онда одговара истобојној једначини $(u - v) + (v - w) = (u - w)$ (ако је без умањења општости $u > v > w$). Са друге стране, по Ремзијевој теореми чији доказ читалац може наћи у [2] за довољно велико N мора постојати истобојан троугао у K_N, чиме смо доказали тврђење теореме. □

Баш зато што постоје густи скупови без аритметичких тројки, занимљивије ће нам бити следеће тврђење о скуповима који скоро немају аритметичке тројке.

Теорема 9. (Аритметичка лема о уклањању троуглова) За свако $\varepsilon > 0$ постоји δ такво да сваки скуп $A \subseteq [n]$ који има мање од δn^2 аритметичких тројки, постоји скуп B са не више од εn елемената такав да $A \setminus B$ нема аритметичких тројки.

Доказ. Конструисаћем граф слично као у доказу Ротове теореме. Додатно, аритметичку тројку (x, y, z), $x + y = z$, сматраћемо различитом од тројке (y, x, z) (осим ако $x = y$). Ово ће променити δ из тврђења за највише фактор 2, што нам не смета. Конструишимо трипартитивни граф над $X, Y, Z = \mathbb{Z}_{2n}$. Темена повезујемо на следећи начин:

- $x \in X$ са $y \in Y$ ако и само ако $y - x \in A$
- $y \in Y$ са $z \in Z$ ако и само ако $z - y \in A$
- $z \in Z$ са $x \in X$ ако и само ако $z - x \in A$.

Онда сваки троугао одговара артиметичкој тројци у A, док за сваку аритметичку тројку (a, b, c) постоји тачно $2n$ дисјунктних троуглова који њој одговарају. Граф (од $6n$ темена) дакле садржи мање од $2\delta n^3$ троуглова, па можемо применити лему о уклањању троуглова да добијемо редуковани граф G' који нема троуглове, притом уклањајући не више од $\varepsilon' n^2$ ивица. Нека је скуп тих обрисаних ивица E'. За свако $a \in A$ означимо скуп свих ивица између (X, Y), (Y, Z) и (Z, X) које одговарају a са $XY(a)$, $YZ(a)$ и $ZX(a)$, редом. Из скупа A ћемо обрисати све елементе a такве да бар један од скупова $XY(a)$, $YZ(a)$ и $ZX(a)$ има бар $\frac{2n}{3}$ заједничких ивица са E'.

Овиме смо обирсали највише $|E'|/\frac{2n}{3} \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon' n$ елемената из A. Остало је да докажемо да не постоји аритметичка тројка у преосталом скупу. Претпоставимо супртоно, да постоји аритметичка тројка $(a, b, c) \in A/B$. Посматрајмо свих $2n$ троуглова у почетном графу који одговарају овој аритметичкој тројци, где a одговара ивици између X и Y, b ивици између Y и Z, а c ивици између Z и X. Како су они дисјунктни, знамо да скуп E' садржи бар по ивицу од сваког од тих троуглова. Међутим, по Дирихлеовом принципу, онда неки од $XY(a), YZ(b), ZX(c)$ има барем $\frac{2n}{3}$ заједничких ивица са E'. Али тада то теме припада скупу обрисаних темена B. $\square$

4 Закључак

У овом раду смо представили Семередијеву лему о регуларности. Кроз увод смо описали мотивацију иза леме, а у првом делу смо увели појмове ε-регуларних парова и партиција, и доказали лему о регуларности. У другом делу смо разматрали лему о уклањању троуглова, и доказали неке од њених лепих последица - Ротову теорему, $(6, 3)$-проблем и аритметичку верзију леме о уклањању троуглова. Читалац може наћи пуно корисног материјала за даљи рад у [1].
Овом приликом бих хтела да се захвалим свом ментору Луки Милићевићу на издвојеном времену и корисним коментарима и сугестијама. Такође бих хтела да се захвалим свим професорима који су ми предавали, и својим трудом допринели мом даљем развоју и продубили моје интересовање према математици.

Литература

[1] Y. Zhao, 18.217, *Graph Theory and Additive Combinatorics*, (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare), http://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA

[2] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, Germany, 2016

[3] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Acta Arithmetica 27 (1975), 199–245

[4] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (1978), 399–401

[5] W. T. Gowers, *Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma*, Geometric and Functional Analysis 7 (1997), 322–337

[6] I. Z. Ruzsa, E. Szemerédi, *Triple systems with no six points carrying three triangles*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely) (1978) pp. 939–945

[7] W. G. Brown, P. Erdös, V. T. Sós, *On the existence of triangulated spheres in 3-graphs and related problems*, Period. Math. Hungar 3 (1973), 221–228.