Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

-из математике-

Јенсенова неједнакост

Ученик:
Невена Стојановић 4ц

Ментор:
др Ђорђе Кртинић

Београд, мај 2021.

Садржај

Увод

Са најједноставнијим неједнакостима сви смо се сусрели још у основној школи. Касније, кроз школовање, упознајемо се и са неким компликованијим неједнакостима, које неизоставно заузимају важно место чак и на престижним математичким такмичењима.

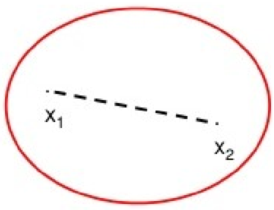
Данас, њихова примена врло је широка. У математичкој анализи, геометрији, вероватноћи, математичкој обради података, статистици, физици, механици, економији, па чак и у биологији и хемији неједнакости имају веома значајну улогу. У реалном свету који нас окружује често долазимо у ситуацију где не можемо тачно одредити неку вредност, већ можемо закључити само од чега је она већа, односно мања, то јест ограничити је. Управо ту наступају неједнакости.

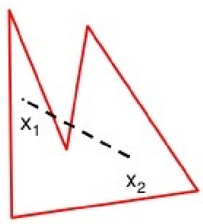
Често је најелегантније решење неког проблема баш оно које као алат користи неку класичну неједнакост. Због тога, одлучила сам да рад посветим једној од њих, Јенсеновој неједнакости. Њен посебан значај огледа се у њеној општости, односно томе да се мноштво других класичних неједнакости може извести управо из ње. Јенсенова неједнакост је такође блиско повезана и са конкавним, односно конвексним функцијама. Све то, кроз мноштво примера, али и са неизбежним теоријским основама, приказано је у овом раду.

1 Конвексност функција

Конвексност је једноставан математички појам који су познавали и њиме се служили чак и старогрчки математичари. Чувени Архимед је конвексност користио како би одређивао приближну вредност броја π служећи се правилним описаним и уписаним многоугловима неке кружнице. Тада је дошао до закључка да обим конвексне фигуре не може бити већи од обима друге конвексне фигуре у којој је садржана. Прва позната дефиниција везана за појам конвексности записана је у Еуклидовој књизи Елементи. Касније је дефиницију дорадио Архимед, користећи познат концепт из физике - тежиште, тврдећи да се тежиште сваке конвексне фигуре мора налазити унутар ње.

Слободније говорећи, фигуру F називамо конвексном уколико за две произвољне тачке те геометријске фигуре важи да дуж одређена њима цела припада унутрашњости фигуре.





Конвексне функције играју важну улогу у многим областима математике. Посебно су важне у проучавању оптимизационих проблема где их одликују јако погодна својства. На пример, строго конвексна функција на отвореном интервалу нема више од једног минимума. Конвексне функције, такође, имају посебну важност у теорији неједнакости.

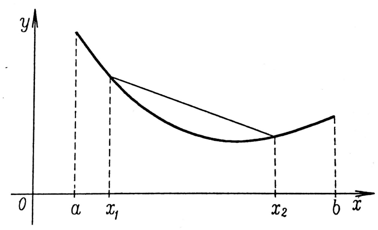
У теорији вероватноће, конвексна функција примењена на очекивану вредност случајне променљиве увек је ограничена одозго очекиваном вредности конвексне функције случајне променљиве, односно $\phi(E[X]) \leqslant E[\phi(X)]$. Овај резултат познат је као Јенсенова неједнакост и уско је повезан са доказом многих других неједнакости као што су неједнакости између средина, Хелдерова неједнакост, Јангова итд.

Позабавимо се за почетак дефиницијом конвексне, односно конкавне функције и неким основним особинама и примерима.

1.1 Дефиниција конвексне функције

Дефиниција 1. За функцију $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ кажемо да је конвексна ако за сваке две тачке x_1, $x_2 \in (a, b)$ и за свака два ненегативна реална броја λ_1, λ_2, за које је $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, важи:

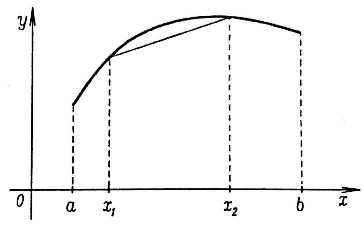
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$



Ако једнакост важи (при услову $x_1 \neq x_2$) само када је $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$ тада је функција строго конвексна.

Функција f је конкавна ако је $-f$ конвексна, то јест ако увек важи:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$



Напомена: Даље, у раду, уколико за конвексну (конкавну) функцију није наглашено на ком је скупу конвексна (конкавна) подразумеваћемо да је конвексна (конкавна) на сваком интервалу садржаном у домену.

Са конвексним функцијама сусретали смо се веома често. Неке нама најпознатије функције као што су $ax + b$ и x^2 су конвексне. Такође конвексне функције имају и многа значајна својства, којима ћемо се позабавити касније.

Пример 1. Покажимо за почетак да је функција $f(x) = ax + b$ конвексна. По дефиницији функције f знамо да је $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + b$. Уколико b представимо у облику $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot b$ и преуредимо израз добијамо $\lambda_1(ax_1 + b) + \lambda_2(ax_2 + b) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, односно функција $f(x) = ax + b$ је конвексна.

Занимљиво је приметити да је линеарна функција такође и конкавна и она је једина функција која је и конвексна и конкавна.

Лема 1. Функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ је конвексна ако и само ако за произвољне тачке x_1, x_2, $x \in (a, b)$, такве да је $x_1 < x < x_2$ важи:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

односно, конкавна ако и само ако за произвољне тачке x_1, x_2, $x \in (a, b)$, такве да је $x_1 < x < x_2$ важи:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Доказ. Нека је функција f конвексна и нека су x_1, x_2, $x \in (a, b)$, такви да је $x_1 < x < x_2$. Можемо написати x у облику $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, за $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, то јест, за $\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ и $\lambda_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ имамо:

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2.$$

Из конвексности функције f следи:

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

одакле лако добијамо тражену неједнакост.
Обратно, из наведене неједнакости аналогно добијамо услов конвексности функције.

За конкавне функције тврђење се доказује аналогно.

Теорема 1. Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ конвексна функција и g конвексна растућа функција на $\mathbb{R}$. Композиција $g \circ f$ је конвексна на домену (a, b).

Доказ. Треба показати да важи:

$$g \circ f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 (g \circ f)(x_1) + \lambda_2 (g \circ f)(x_2).$$

Из конвексности функције f, под условом да је g растућа добијамо:

$$g \circ f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = g(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) \leqslant g(\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Даље, како је и g конвексна добијамо:

$$g(\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)) \leqslant \lambda_1 g(f(x_1)) + \lambda_2 g(f(x_2)) = \lambda_1 (g \circ f)(x_1) + \lambda_2 (g \circ f)(x_2).$$

Следи, $g \circ f$ је по дефиницији конвексна.

Дефиниција 2. Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ и $x, y \in (a,b)$, где $x \neq y$. Подељена разлика функције f у тачкама x, y је

$$\Delta_f(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Подељена разлика је симетрична функција од x, y, односно

$$\Delta_f(x,y) = \Delta_f(y,x).$$

Теорема 2. Функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ је конвексна, ако и само ако је њена подељена разлика $\Delta_f(x,y)$ растућа по обе своје променљиве. Аналогно тврђење важи и за конкавне функције.

Доказ. Нека је $f : (a,b) \to R$ конвексна и нека $x_1, x_2 \in (a,b)$ тако да $x_1 < x_2$. За произвољно $x \in (a,b)$, за које је $x_1 < x < x_2$, по Леми 1 знамо да је

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

односно

$$\Delta_f(x_1, x) \leqslant \Delta_f(x, x_2) = \Delta_f(x_2, x),$$

што значи да је функција Δ_f растућа по свом првом аргументу. Због симетричности растућа је и по свом другом аргументу.

Обратно, ако Δ_f расте по обе променљиве, тада за $x_1 < x < x_2$ важи

$$\Delta_f(x_1, x) \leqslant \Delta_f(x_2, x) = \Delta_f(x, x_2),$$

одакле следи конвексност функције f на (a,b).

Теорема 3. Ако је функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ конвексна, тада је f непрекидна на (a,b).

Доказ. Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ конвексна и нека је $x_0 \in (a,b)$. За неко фиксно $y \in (a,b)$, функција $\Delta_f(x,y)$, гледана као функција од $x \in (a, x_0)$, је растућа, по претходној теореми, и ограничена одозго са бројем $\Delta_f(x_0, y)$, па постоји гранична вредност $\lim\limits_{x \to x_0-} \Delta_f(x,y)$ и важи $\lim\limits_{x \to x_0-} \Delta_f(x,y) \leqslant \Delta_f(x_0, y)$. Одавде, за $y \in (a, x_0)$ добијамо $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \leqslant f(x_0)$, а за $y \in (x_0, b)$ добијамо $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \geqslant f(x_0)$, па је $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$. Аналогно се доказује и за $x \to x_{0+}$, па следи да је функција непрекидна у произвољној тачки x_0 интервала (a,b).

Важно је обратити пажњу на то да теорема важи за функцију конвексну на отвореном интервалу (a,b). Ако је функција f конвексна на затвореном интервалу $[a,b]$ она не мора бити непрекидна у крајевима интервала.

1.2 Конвексност и диференцијабилност

Сада, посматраћемо функције које су конвексне (конкавне) и уз то и диференцијабилне. Уз помоћ извода може се установити да ли је нека функција конвексна, односно конкавна. О томе говоре следеће теореме.

Теорема 4. Нека је функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна. Да би f била конвексна у (a, b) неопходно је и довољно да f' расте у (a, b).

Доказ. По Леми 1 знамо да за сваке три тачке $x_1 < x < x_2$ интервала (a, b) важи неједнакост $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Стављајући у овој неједнакости да $x \to x_1$ као и $x \to x_2$, добија се $f'(x_1) = \lim\limits_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \lim\limits_{x\to x_2} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(x_2)$.

У супротном смеру претпоставимо да f' расте. Применом Лагранжове теореме о средњој вредности на функцију f на интервалу (x_1, x), односно (x, x_2), добијамо: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1)$, $x_1 < c_1 < x$, односно $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2)$, $x < c_2 < x_2$. Како је $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ добијамо неједнакост Леме 1, то јест функција f је конвексна.

Слично се доказује тврђење да је диференцијабилна функција f конкавна ако и само ако извод функције опада.

Теорема 5. Нека функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ има у свакој тачки интервала (a, b) други извод. Да би f била конвексна (конкавна) у (a, b), неопходно је и довољно да буде $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) за $x \in (a, b)$.

Доказ. Користећи познати критеријум монотоности диференцијабилне функције ово тврђење добијамо непосредно из претходне теореме.

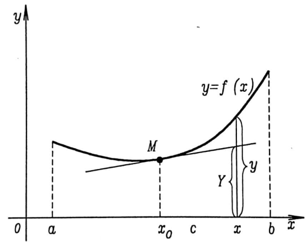
Пример 2. Посматрајмо функцију $f(x) = x^2$, где $x \in \mathbb{R}$. Други извод те функције је $f''(x) = 2 > 0$ што значи да је функција строго конвексна.

Пример 3. Ако је функција строго конвексна на (a, b), не мора да важи да је $f''(x) > 0$ за (a, b). На пример, функција $f(x) = x^4$ је строго конвексна на $\mathbb{R}$, али је $f''(x) = 12x^2$ и $f''(0) = 0$.

Пример 4. Посматрамо функцију $f(x) = \sin x$ за $x \in (0, \pi)$. Важи $f''(x) = -\sin x$, односно $f''(x) < 0$. Следи да је функција строго конкавна на том интервалу.

Теорема 6. Диференцијабилна функција f у интервалу (a, b) је конвексна (конкавна) ако и само ако тачке њеног графика нису испод (изнад) тачака тангенте конструисане у произвољној тачки тог графика. Функција је строго конвексна (конкавна) ако и само ако су тачке њеног графика изнад (испод) тачака тангенте у произвољној тачки графика, не укључујући тачку додира.

Доказ. Повуцимо у произвољној тачки $x_0 \in (a, b)$ тангенту $Y(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ на криву $y = f(x)$.



Тада за неко $x \in (a, b)$ важи $f(x) - Y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Примењујући Лагранжову теорему о средњој вредности на функцију f на сегменту $[x_0, x]$ добијамо једнакост: $f(x) - Y(x) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0)$, $c \in (x_0, x)$. Ако је f конвексна тј. њен извод расте, онда је $f(x) - Y(x) \geqslant 0$.

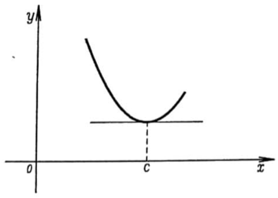
Обрнуто, ако је $f(x) - Y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant 0$, онда је

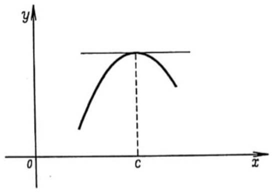
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'(x_0) \text{ за } x_0 < x$$

и

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant f'(x_0) \text{ за } x < x_0.$$

За $x_1 < x < x_2$ следи неједнакост Леме 1 што значи да је функција f конвексна на (a, b). За конкавне функције доказује се слично.





Пример 5. Очигледно је да је веза између конвексности и диференцијабилности неизоставна, међутим, треба бити опрезан. На пример, функција апсолутне вредности $f(x) = |x|$ је конвексна иако у тачки $x = 0$ нема извод.

Функција $f(x) = |x|^p$ за $p \geqslant 1$ је такође конвексна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Експоненцијална функција, $f(x) = e^x$ је строго конвексна пошто је $f''(x) = e^x > 0$.

Чим за функцију докажемо да је конвексна или конкавна самим тим добијамо и да важи нека одговарајућа неједнакост. Једна од најзначајнијих и најлепших неједнакости у математици јесте Јенсенова неједнакост којом ћемо се даље бавити.

2 Јенсенова неједнакост

Лудвиг Вилијам Валдемар Јенсен, познатији као Јохан Јенсен (1859-1925), био је дански математичар и инжењер. Рођен је у Накскову у Данској, али је већи део свог живота провео у северној Шведској, јер је његов отац радио тамо. Породица се враћа у Данску када Јенсен уписује Технолошки факултет у Копенхагену где студира науку, музику, хемију и математику. Још за време студија објављени су његови први радови. Јенсен се сматра аматером у математици јер никада није имао академски положај. 1906. године објавио је чланак у познатом часопису Acta mathematica, који му је загарантовао математичку бесмртност. Радио је као телефонски инжењер од 1881. године па све до 1924. године. Упркос томе што је цели свој радни век радио за копенхагенско телефонско предузеће, досегао је врло висок ниво стручности као математичар. Био је председник Данског математичког друштва од 1892. до 1903. Један од познатијих резултата које је објавио је неједнакост, која је касније названа његовим именом. 1915. он је такође доказао и једну веома значајну формулу у комплексној анализи. Умро је 1925. године у Копенхагену.

Теорема 1. (Јенсенова неједнакост) Нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна функција и нека су λ_1, λ_2 , ... , λ_n ненегативни бројеви, такви да је $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1$. Тада за све $x_1,\ldots,x_n\in(a,b)$ важи неједнакост

$$f(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\ldots+\lambda_nf(x_n).$$

Доказ. Неједнакост ћемо доказати индукцијом. За $n=2$ неједнакост се своди на дефиницију конвексне функције. Претпоставимо да је неједнакост тачна за n бројева из датог интервала и n коефицијената λ чији је збир једнак 1. Нека је $m=\lambda_2+\ldots+\lambda_{n+1}$, $m\neq0$ и $\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}=1$. Тада су $\frac{\lambda_2}{m},\ldots,\frac{\lambda_{n+1}}{m}$ ненегативни коефицијенти чији је збир једнак 1. Важи следеће:

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_{n+1}x_{n+1}) &= f(\lambda_1x_1+mf(\frac{\lambda_2}{m}x_2+\ldots+\frac{\lambda_{n+1}}{m}x_{n+1}))\\
&\leqslant \lambda_1f(x_1)+mf(\frac{\lambda_2}{m}x_2+\ldots+\frac{\lambda_{n+1}}{m}x_{n+1}))\\
&\leqslant \lambda_1f(x_1)+m(\frac{\lambda_2}{m}f(x_2)+\ldots+\frac{\lambda_{n+1}}{m}f(x_{n+1})).
\end{aligned}$$

У случају да је $m = 0$, важило би $\lambda_1 = 1$, а $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$, па се неједнакост своди на $f(x) \leqslant f(x)$. Формално, неједнакост важи и у случају $n = 1$. Тада су са обе стране неједнакости изрази $f(x)$.

За конкавне функције аналогно се доказује обрнута неједнакост.

2.1 Последице Јенсенове неједнакости

Јенсенова неједнакост је такође основа за доказивање и многих класичних неједнакости са којима смо се сусретали много пута кроз школовање. За почетак, посветимо пажњу неким познатијим као што су тежинске неједнакости између средина.

Последица 1. Неједнакост између аритметичке и геометријске средине. Нека су x_i позитивни и λ_i ненегативни реални бројеви, за које важи $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, тада ће важити:

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Једнакост је задовољена за $x_1 = \ldots = x_n$ или уколико су сви λ_i сем једног једнаки нула. Специјално, за $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, добијамо класичну АГ неједнакост.

Доказ. Примењујући Јенсенову неједнакост на функцију $f(x) = e^x$ која је строго конвексна, и бројеве $\ln x_1, \ldots, \ln x_n$ добијамо тражену неједнакост.

Једнакост се може формулисати и под условом да су сви x_i позитивни, λ_i ненегативни реални бројеви и нису сви λ_i једнаки нули, без услова да је збир $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ ако се бројеви $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ замене са $\frac{\lambda_1}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda}$ где је $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ $(\lambda \neq 0)$. Тада она постаје

$$(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}} \leqslant \frac{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}.$$

Последица 2. Неједнакост између аритметичке и квадратне средине. Нека су x_i позитивни и λ_i ненегативни реални бројеви, за које важи $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, тада ће важити:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)^2 \leqslant \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Једнакост је задовољена за $x_1 = \ldots = x_n$. Специјално, за $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, добијамо класичну КА неједнакост.

Доказ. Примењујући Јенсенову неједнакост на функцију $f(x) = x^2$ која је строго конвексна на $\mathbb{R}$, добијамо тражену неједнакост.

Последица 3. Неједнакост између геометријске и хармонијске средине. Нека су x_i позитивни и λ_i ненегативни реални бројеви, за које важи $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$, тада ће важити:

$$\frac{1}{\frac{\lambda_1}{x_1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{x_n}} \leqslant x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Специјално, за $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=\frac{1}{n}$, добијамо класичну ХГ неједнакост.

Доказ. Примењујући горе наведену неједнакост аритметичке и геометријске средине на бројеве $\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}$ добијамо тражену неједнакост.

Неједнакост се може преформулисати у неједнакост

$$\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}{\frac{\lambda_1}{x_1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{x_n}} \leqslant (x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_n+\ldots+\lambda_n}},$$

за коју није потребан услов да је збир $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$, већ само да нису сви λ_i једнаки нули.

Пример 1. Нека су $x_1,x_2,\ldots,x_n$ позитивни бројеви. Доказати да тада важи неједнакост

$$(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} \leqslant x_1^{x_1}\ldots x_n^{x_n}.$$

Доказ. Применимо неједнакост између хармонијске и геометријске средине на $x_1,\ldots,x_n$ ако су $\lambda_i=x_i$. Важи $\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}{\frac{\lambda_1}{x_1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{x_n}} \leqslant (x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}}$, односно $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \leqslant (x_1^{x_1}\ldots x_n^{x_n})^{\frac{1}{x_1+\cdots+x_n}}$. Како из класичне неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи да је $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geqslant (x_1\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$, добијамо $(x_1^{x_1}\ldots x_n^{x_n})^{\frac{1}{x_1+\cdots+x_n}} \geqslant (x_1\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$, односно пошто су бројеви позитивни $(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} \leqslant x_1^{x_1}\ldots x_n^{x_n}$, што је и требало доказати.

Неједнакост се може доказати и директном применом Јенсенове неједнакости на функцију $x\ln x$. Пошто је функција конвексна, узимајући $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ добијамо да важи $\frac{(x_1+\ldots+x_n)}{n}\ln(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}) \leqslant \frac{x_1}{n}\ln x_1+\ldots+\frac{x_n}{n}\ln x_n$. Како је $\ln(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}) \geqslant \frac{\ln x_1+\ldots+\ln x_n}{n}$ из претходне неједнакости следи $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}(\ln x_1+\ldots+\ln x_n) \leqslant x_1\ln x_1+\ldots+x_n\ln x_n$, одакле се лако добија тражена.

Пример 2. Ако су a,b и c природни бројеви, доказати да важи

$$\frac{(b+c)^a+(c+a)^b+(a+b)^c}{2^{a+b+c}} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \leqslant a^ab^bc^c.$$

Доказ. Докажимо прво десну неједнакост. Применом неједнакости између геометријске и хармонијске средине на бројеве a,b и c где су $\lambda_1=a,\lambda_2=b$ и $\lambda_3=c$ добијамо

$$\frac{a+b+c}{\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}} \leqslant (a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

односно

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant (a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

из чега следи тражена неједнакост.

Докажимо сада леву неједнакост. Применом неједнакости између геометријске и аритметичке средине на бројеве $b+c, c+a$ и $a+b$ где су $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$ и $\lambda_3 = c$ добијамо

$$\left((b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}} \leqslant \frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{a+b+c}.$$

Користећи познату неједнакост $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$ добијамо:

$$\left((b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}} \leqslant 2 \cdot \frac{a+b+c}{3},$$

то јест

$$\left((b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c\right) \leqslant \left(2 \cdot \frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c},$$

из чега дељењем обе стране неједнакост са 2^{a+b+c} добијамо тражену неједнакост.

Пример 3. Наћи правилну четворострану пирамиду бочне ивице a чија је запремина највећа могућа.

Решење. Нека је x основица, а H висина пирамиде. Тада важи $\frac{x^2}{2} + H^2 = a^2 = const$. Користећи АГ неједнакост за бројеве $x_1 = \frac{x^2}{4}$ и $x_2 = H^2$, и $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, а $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, добијамо да важи $3V = x^2H = 4 \cdot [(\frac{x^2}{4})^{\frac{2}{3}} \cdot (H^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{3}{2}} \leqslant 4 \cdot [\frac{2}{3}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{3}H^2]^{\frac{3}{2}} = \frac{4a^3}{3\sqrt{3}}$. Једнакост се достиже за $x = 2H$, односно $H = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

2.2 Неке класичне неједнакости као последице Јенсенове неједнакости

У овом делу приказане су неке познате неједнакости, као што су Јангова, Хелдерова, неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског и неједнакост Минковског, које су директна последица Јенсенове. Испраћене су примерима, а такође наведена је и једна интересантна процена израза уз помоћ Јенсенове и Петровићеве неједнакости.

Јангова неједнакост. Нека је $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и u и v ненегативни реални бројеви, тада важи $uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$, при чему је једнакост задовољена ако и само ако је $u^p = v^q$.

Доказ. Посматрајмо функцију $f(x) = a^x$ за $a > 0$. Функција је конвексна на свом домену, скупу $\mathbb{R}$. Значи да за све реалне x и ненегативне λ за које је $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ важи неједнакост $a^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \leqslant \lambda_1 a^{x_1} + \lambda_2 a^{x_2}$. Ако ставимо $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ и $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ и $a^{\lambda_1 x_1} = u$ а $a^{\lambda_2 x_2} = v$ добијамо $uv \leqslant \lambda_1 u^{\frac{1}{\lambda_1}} + \lambda_2 v^{\frac{1}{\lambda_2}} = \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$ што је и требало доказати.

Пример 4. Ако су x и y позитивни реални бројеви за које важи $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, наћи минимум израза $\frac{2^x}{x} + \frac{3^y}{y}$.

Решење. Директном применом Јангове неједнакости на дати израз добијамо да је задовољена неједнакост $\frac{2^x}{x} + \frac{3^y}{y} \geqslant 6$, односно минимум је $\boxed{6}$. Минимум се достиже ако и само ако је $2^x = 3^y$, односно $x = \log_2 6$ и $y = \log_3 6$.

Хелдерова неједнакост. Нека је $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и нека су $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ позитивни реални бројеви. Тада важи

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \ldots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$.

Доказ. Посматрајмо функцију $f(x) = x^p$ која је конвексна за $x > 0$. Из Јенсенове неједнакости, на произвољним бројевима $a_i > 0$ и $b_i > 0$ ако означимо $B = b_1 + \ldots + b_n$ и $\lambda_i = \frac{b_i}{B}$ важи

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^p,$$

односно

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{p-1} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i a_i^p\right).$$

За $a_i = x_i y_i^{-\frac{1}{p-1}}$ и $b_i = y_i^{\frac{p}{p-1}}$ добијамо Хелдерову неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = \ldots = a_n$. Ако бројеви x_i, y_i нису позитивни, Хелдерова неједнакост важи у следећем облику

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пример 5. Доказати да је функција

$$f(x) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} b_i a_i^x\right)$$

конвексна, при чему су $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ $n-$торке позитивних бројева.

Решење. За ненегативне λ_1 и λ_2, за које важи $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, применом елементарних трансофмација и Хелдерове неједнакости, узимајући у обзир да је функција $\ln x$ строго растућа на свом домену, добијамо:

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} b_i a_i^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\right) &= \ln\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \left(a_i^{x_1}\right)^{\lambda_1} \left(a_i^{x_2}\right)^{\lambda_2}\right) \\
&= \ln\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\lambda_1} (a_i^{x_1})^{\lambda_1} b_i^{\lambda_2} (a_i^{x_2})^{\lambda_2}\right) \\
&= \ln\left(\sum_{i=1}^{n} (b_i a_i^{x_1})^{\lambda_1} (b_i a_i^{x_2})^{\lambda_2}\right) \\
&\leqslant \ln\left[\left(\sum_{i=1}^{n} b_i a_i^{x_1}\right)^{\lambda_1} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i a_i^{x_2}\right)^{\lambda_2}\right] \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),
\end{aligned}$$

односно функција f је конвексна.

Пример 6. Ако су a, b, c и d позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c+d=1$, доказати да важи неједнакост:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)(1-b)}\geqslant\frac{1}{15}.$$

Решење. Користећи Хелдерову неједнакост, где су $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n$ и $(z_i)_{i=1}^n$ три низа позитивних реалних бројева добијамо:

$$\sum_{i=1}^n x_iy_iz_i=\sum_{i=1}^n (x_iy_i)z_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n (x_iy_i)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n z_i^3\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Употребом Хелдерове неједнакости још једном добијамо:

$$\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{3}{2}}y_i^{\frac{3}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{3}{2}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^{\frac{3}{2}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^3\right)^{\frac{1}{2}},$$

одакле заменом у прву неједнакост добијамо:

$$\sum_{i=1}^n x_iy_iz_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n z_i^3\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Даље, за $n=4$ и

$$\begin{aligned}
(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\left(\frac{a}{\sqrt[3]{(1+b)(1-c)}},\frac{b}{\sqrt[3]{(1+c)(1-d)}},\frac{c}{\sqrt[3]{(1+d)(1-a)}},\frac{d}{\sqrt[3]{(1+a)(1-b)}}\right),\\
(y_1,y_2,y_3,y_4)&=\left(\sqrt[3]{1+b},\sqrt[3]{1+c},\sqrt[3]{1+d},\sqrt[3]{1+a}\right),\\
(z_1,z_2,z_3,z_4)&=\left(\sqrt[3]{1-c},\sqrt[3]{1-d},\sqrt[3]{1-a},\sqrt[3]{1-b}\right)
\end{aligned}$$

заменом добијамо:

$$\begin{aligned}
&x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+x_3y_3z_3+x_4y_4z_4=a+b+c+d=1,\\
&\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{a^3}{(1+b)(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)(1-b)}\right)^{\frac{1}{3}},\\
&\left(y_1^3+y_2^3+y_3^3+y_4^3\right)^{\frac{1}{3}}=(4+a+b+c+d)^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}},\\
&\left(z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_4^3\right)^{\frac{1}{3}}=(4-(a+b+c+d))^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{3}},
\end{aligned}$$

односно:

$$a+b+c+d\leqslant\left(\frac{a^3}{(1+b)(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)(1-b)}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}},$$

одакле следи неједнакост

$$\frac{1}{15^{\frac{1}{3}}}\leqslant\left(\frac{a^3}{(1+b)(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)(1-b)}\right)^{\frac{1}{3}},$$

из које се лако добија тражена. Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског. За реалне бројеве $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ важи неједнакост

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Једнакост важи за $\frac{x_1}{y_1} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$.

Доказ. Стављајући у Хелдеровој неједнакости $p = q = 2$ добијамо тражену неједнакост.

Занимљиво је да ова неједнакост има једноставну геометријску интерпретацију. Наиме, ако ставимо $n = 3$, она се своди на

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

и представља неједнакост

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leqslant |\vec{x}||\vec{y}|$$

за векторе $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Уколико се узме у обзир дефиниција скаларног производа вектора као $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos(\vec{x}, \vec{y})$, она је заправо неједнакост $|\cos(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant 1$.

Неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског представља основу за увођење геометријских појмова (као што су скаларни производ и угао између вектора) у вишедимензионим просторима.

У простору $\mathbb{R}^n$ свих n-димензионих вектора важи да је скаларни производ два вектора мањи или једнак од производа њихових дужина (норми).

Последица. За произвољне реалне n-торке $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ важи неједнакост:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Доказ. Из неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског следи да је

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Уколико се обе стране помноже са 2, а потом им се дода $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$, добија се:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

односно

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + 2|a_k b_k| + b_k^2\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Пример 7. Ако је $a^2+b^2+c^2=1$ и $x^2+y^2+z^2=1$, доказати да је $-1 \leqslant ax+by+cz \leq 1$.

Решење. Применимо неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског на бројеве $x_1=a, x_2=b, x_3=c$ и $y_1=x, y_2=y, y_3=z$. Добија се да важи $|ax+by+cz| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$, одакле следи тражена неједнакост.

Пример 8. Ако су a, b, c дужине страница неког троугла доказати да важи неједнакост

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Решење. Означимо полуобим са s, односно $s=\frac{a+b+c}{2}$. Означимо такође $x=s-a$, $y=s-b$ и $z=s-c$, где су $x, y, z>0$. Тада је заправо $a=(s-b)+(s-c)=y+z$, $b=(s-c)+(s-a)=z+x$ и $c=(s-a)+(s-b)=x+y$, тако да тражена неједнакост постаје

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z) \geqslant 0,$$

то јест, након сређивања

$$xy^3+yz^3+zx^3 \geqslant xyz(x+y+z).$$

Докажимо сада ову еквивалентну неједнакост. Применом неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског за $n=3$ на бројеве

$$x_1=\sqrt{yx^3}, x_2=\sqrt{zx^3}, x_3=\sqrt{xy^3}, y_1=\sqrt{x}, y_2=\sqrt{y}, y_3=\sqrt{z}$$

добија се:

$$(\sqrt{yz^3}\cdot x+\sqrt{zx^3}\cdot\sqrt{y}+\sqrt{xy^3}\cdot\sqrt{z})^2=\sqrt{xyz}(x+y+z) \leqslant (xy^3+yz^3+zx^3)(x+y+z).$$

Дељењем обе стране неједнакости са $x+y+z$ добијамо тражену неједнакост.

Неједнакост Минковског. Нека је $p>1$ и нека су $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ позитивни реални бројеви. Тада важи неједнакост

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\frac{x_1}{y_1}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}$.

Доказ. Применимо Хелдерову неједнакост на оба сабирка на десној страни идентитета

$$\sum_{i=1}^{n}(x_1+y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}x_i\,(x_i+y_1)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i\,(x_i+y_1)^{p-1}.$$

Добијамо

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

одакле даље лако добијамо тражену неједнакост.

Занимљиво је да, уколико у овој неједнакости заменимо $p = 2$ и $n = 3$, добијамо следећу неједнакост:

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

Уколико ставимо $x_i = a_i - b_i$ и $y_i = b_i - c_i$ добијамо заправо добро познату неједнакост, неједнакост троугла у класичној геометрији

$$d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C),$$

где су $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ и $C(c_1, c_2, c_3)$ темена троугла.

Наведена неједнакост троугла се такође може директно добити из раније наведене последице неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског.

Пример 9. Доказати следеће уопштење неједнакости Минковског:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2},$$

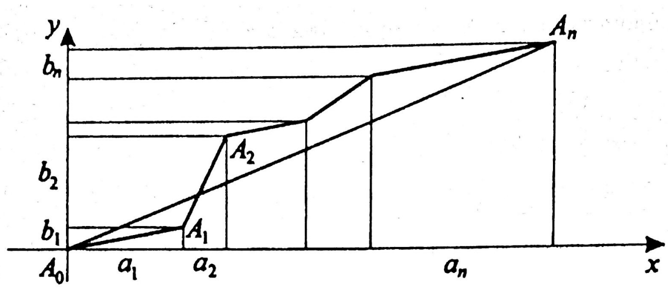
за произвољне бројеве $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Дати геометријску интерпретацију.

Решење. Дата неједнакост је последица неједнакости многоугла (свака страница многоугла мања је од збира осталих страница). Да бисмо то показали, приметимо најпре да је довољно доказати тврђење за случај када су сви бројеви a_i, b_i у датој неједнакости ненегативни. У противном ако је, на пример, неки a_i негативан, заменимо га са $-a_i$, тиме се лева страна неједнакости неће променити, а десна се повећава, па ако тврђење тада важи, важиће и у полазном облику. Конструишемо изломљену линију $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ у координатној равни тако да је $A_0(0, 0), A_1(a_1, b_1), A_2(a_1 + a_2, b_1 + b_2), \ldots, A_n(a_1 + \ldots + a_n, b_1 + \ldots + b_n)$. Тада је

$$A_0A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2},\ A_1A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2},\ \ldots,\ A_{n-1}A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$A_0A_n = \sqrt{(a_1 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + \ldots + b_n)^2},$$

а неједнакост $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n \geqslant A_0A_n$ је управо поменута неједнакост многоугла. Једнакост важи ако и само ако се изломљена линија дегенерише у дуж A_0A_n, што је испуњено само ако су низови (a_i) и (b_i) пропорционални, односно важи: $\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.



Касније у раду, биће приказано и рачунско решење ове неједнакости, употребом Јенсенове неједнакости.

Пример 10. За природно n дефинисана је вредност S_n као минимум суме

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2},$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви чији је збир 17. Постоји јединствено n за које је S_n цео број. Наћи то n.

Решење. Користићемо претходно доказану последицу неједнакости Минковског,

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2}.$$

Даље, следи да је

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2}.$$

Како је $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 17$, и

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2,$$

добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2} \geqslant \sqrt{n^4 + 17^2},$$

односно тражена минимална вредност суме је $S_n = \sqrt{n^4 + 17^2}$. Сада преостаје да нађемо $n \in \mathbb{N}$ за које је $S_n = \sqrt{n^4 + 17^2} \in \mathbb{Z}$. Квадрирањем обе стране једнакости добијамо

$$(S_n - n^2)(S_n + n^2) = 17^2.$$

Даље имамо два случаја, $S_n + n^2 = S_n - n^2 = 17$ или $S_n + n^2 = 17^2$ и $S_n - n^2 = 1$. Из првог добијамо $S_n = 17, n = 0$, међутим $n \notin \mathbb{N}$, што не одговара услову задатка. У другом случају је $S_n + n^2 = 289$ и $S_n - n^2 = 1 \implies S_n = 145 \implies n = \boxed{12}$.

Теорема 2. (Петровићева неједнакост) Нека је $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ конвексна функција, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни бројеви. Тада важи неједнакост

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \leqslant f(x_1 + \ldots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Доказ. Означимо са m суму $m = x_1 + \ldots + x_n$ и $\lambda_i = \frac{x_i}{m}$. Тада ће важити $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ и $x_i = (1-\lambda_i) \cdot 0 + \lambda_i \cdot m$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Из конвексности функције f следи да је $f(x_i) \leqslant (1-\lambda_i)f(0) + \lambda_i f(m)$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Сабирањем ових n неједнакости добијамо тражену.

Уколико у Јенсеновој неједнакости ставимо $\lambda_i = \frac{1}{n}$ добијамо да важи

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Са друге стране, Петровићеву неједнакост можемо да запишемо у облику

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \frac{1}{n}\left[f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + (n-1)f(0)\right].$$

Стога, добијамо двоструку неједнакост

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \frac{1}{n}\left[f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + (n-1)f(0)\right].$$

Дакле, Јенсенова и Петровићева неједнакост заједно дају обострану процену израза

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

2.3 Примене Јенсенове неједнакости

Јенсенова неједнакост, чак примењена на једноставне, једнодимензионалне конвексне функције има велику примену у решавању проблема са оптимизацијом са којима се можемо сусрести и у свакодневном животу.

Пример 1. Стандардни рачунски проблем. Дата је ограда дужине 100m. Која је највећа могућа површина плаца правоугаоног облика који се може оградити том оградом ?

Решење. Из услова познато нам је да важи $2x_1+2x_2 = 100$, где су x_1 и x_2 димензије плаца. Односно, $x_1+x_2 = 50$. Тражимо максимум производа x_1x_2 где нам је познато да су $x_1, x_2 > 0$. То је исто као да тражимо минимум од $-\ln x_1x_2 = -\ln x_1 - \ln x_2$. Како је функција $f(x) = -\ln x$ конвексна на свом домену, односно за позитивне x, применом Јенсенове неједнакости за $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ добијамо да важи $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$ односно $-\ln x_1 - \ln x_2 \geqslant 2\cdot(-\ln 25)$. Једнакост, односно минимум, достиже се за $x_1 = 25$ и $x_2 = 25$ из чега следи да је тражена површина једнака $\boxed{625\mathrm{m}^2}$.

Пример 2. Стандардни комбинаторни проблем. У соби се налази 100 столица нумерисаних бројевима од 1 до 100 које су обојене са 10 различитих боја. Нема столица које нису обојене. Колико најмање парова столица је обојено истом бојом ?

Решење. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ означавају колико столица је обојено бојом $1, 2, 3, \ldots, 10$ редом. Из услова задатка знамо да је $x_1 + \ldots + x_{10} = 100$. Уколико имамо x_i столица у i-тој боји онда је таквих парова $\binom{x_i}{2} = \frac{x_i(x_i-1)}{2}$. Потребно је да нађемо min($\binom{x_1}{2} + \ldots + \binom{x_{10}}{2}$). Пошто је $f(x) = \binom{x}{2}$ конвексна функција, применом Јенсенове неједнакости добијамо $\binom{x_1}{2} + \ldots + \binom{x_{10}}{2} \geqslant \binom{\frac{x_1+\ldots+x_{10}}{10}}{2}\cdot 10 = 450$. Једнакост, односно минимум, достиже се ако и само ако $x_1 = \ldots = x_{10} = 10$. Парова је по $\binom{10}{2} = 45$ за сваку боју, а укупно $\boxed{450}$.

Многи проблеми процене у геометрији, тригонометрији, алгебри као и разне неједнакости лакше и брже се могу доказати уз помоћ Јенсенове неједнакости. Стога, наведимо пар интересантних примера.

Пример 3. Одредити минимум израза

$$A = \left(a + \frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \frac{1}{c}\right)^{10},$$

где су $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$.

Решење. Применимо Јенсенову неједнакост на функцију $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ узимајући за x_1, x_2, x_3 редом a, b, c и $\lambda_i = \frac{1}{3}$.
Функција је конвексна на домену јер је $f''(x) = 10\left(x + \frac{1}{x}\right)^8 \left(9\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) > 0$.
Добијамо да важи $f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant \frac{A}{3}$, односно, како је $a+b+c = 1$, важи $A \geqslant 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{10}{3}\right)^{10} = \boxed{\dfrac{10^{10}}{3^9}}$, што је тражени минимум.

Пример 4. Доказати да за $n \in N$ важи неједнакост

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \geqslant \frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}.$$

Решење. Посматрамо функцију $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Она је конвексна због тога што важи $f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$. Применимо Јенсенову неједнакост на $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, где су $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots x_n = n$ и $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Тада ће важити

$$\frac{\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1}}{n} \geqslant \sqrt{\left(\frac{1+\ldots+n}{n}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + 1},$$

односно

$$\frac{\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1}}{n} \geqslant \frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{2},$$

одакле множењем целе неједнакости са n добијамо тражену.

Пример 5. Доказати да за углове троугла α, β, γ важи неједнакост

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Решење. Како $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, а функција $f(x) = \sin x$ је на интервалу $[0, \pi]$ конкавна, можемо применити Јенсенову неједнакост. Важиће $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leqslant \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$. Заменом $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ добијамо $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, одакле добијамо тражену неједнакост. Једнакост се достиже за $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Пример 6. Доказати неједнакост

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{s-a_n}\geqslant\frac{n}{n-1},$$

где су $a_i>0$ и $s=a_1+\ldots+a_n$.

Решење. Посматрајмо функцију $f(x)=\frac{x}{s-x}$ на $(0,s)$. $f''(x)=\frac{2s}{(s-x)^3}$ што је за $x>0$ и $s>x$ позитивно, те је функција конвексна. Применом Јенсенове неједнакости добијамо:

$$\frac{\frac{a_1}{s-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{s-a_n}}{n}\geqslant\frac{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}}{s-\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}},$$

односно

$$\frac{\frac{a_1}{s-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{s-a_n}}{n}\geqslant\frac{\frac{s}{n}}{s-\frac{s}{n}}=\frac{1}{n-1}.$$

Множењем целе неједнакости са n добијамо тражену.

Пример 7. Доказати да за позитивне бројеве важи неједнакост

$$\sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Решење. Применимо Јенсенову неједнакост на функцију $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ која је строго конвексна, јер $f''(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}>0$. Важиће неједнакост: $\sqrt{1+(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n)^2}\leqslant\lambda_1\sqrt{1+x_1^2}+\ldots+\lambda_n\sqrt{1+x_n^2}$. За $\lambda_i=\frac{a_i}{a_1+\ldots+a_n}$ задовољен је услов $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$, и за $x_i=\frac{b_i}{a_i}$ добијамо: $\sqrt{1+\left(\frac{a_1}{a_1+\ldots+a_n}\frac{b_1}{a_1}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_n}\frac{b_n}{a_n}\right)^2}\leqslant\frac{a_1}{a_1+\ldots+a_n}\sqrt{1+\frac{b_1^2}{a_1^2}}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_n}\sqrt{1+\frac{b_n^2}{a_n^2}}$, односно $\frac{\sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}}{a_1+\ldots+a_n}\leqslant\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{a_1+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{a_1+\ldots+a_n}$. Множењем неједнакости са $a_1+\ldots+a_n$ добијамо тражену неједнакост.

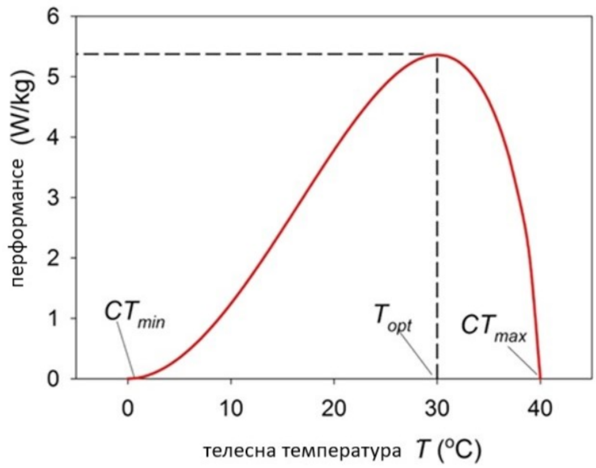
Геометријска интерпретација, као и вредности a_i и b_i за које се достиже једнакост наведени су раније у примеру након неједнакости Минковског.

Као што је већ наведено на самом почетку, Јенсенова неједнакост има велике примене не само у математици, већ и у многим другим гранама науке и индустрије.

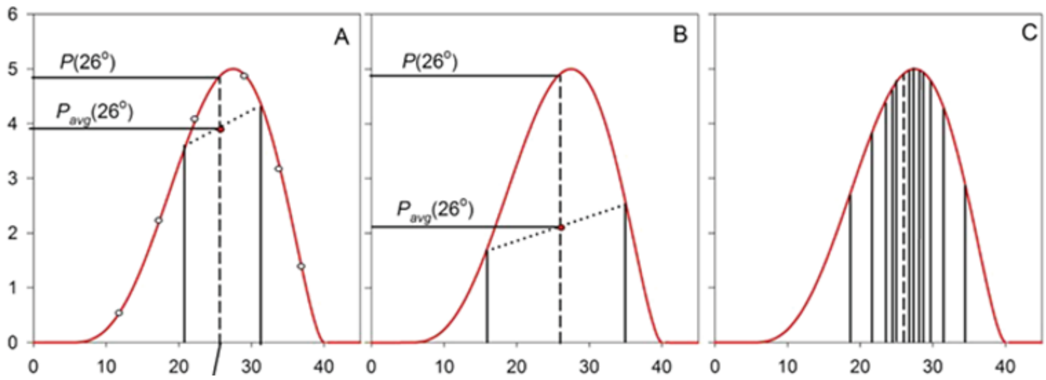
Једна од најактуелнијих тема данас јесте тема глобалног загревања и утицај температурних промена на екосистеме. Температура утиче на све. Од ње зависе брзине хемијских реакција у организму, односно директно утиче на метаболизам, фотосинтезу, раст, развој итд.

С обзиром да температура управља практично свим аспектима живота, поставља се питање како температурна колебања утичу на перформансе организама (у овом контексту могу бити на пример: метаболизам, брзина кретања, стопа раста и слично).

Узорак у коме карактеристике неког организма варирају у зависности од телесне температуре традиционално се представља кривом топлотних перформанси, односно функцијом приказаном на слици испод.



Овде је значајна употреба Јенсенове неједнакости као показатеља тога да је просек перформанси неког организма нижи од перформанси на просечној температури због конкавности посматране функције на сегменту око оптималне температуре.



Формално, ако функцију топлотних перформанси означимо са $P(T)$ добијамо да важи

$$\overline{P(T)} \neq P\big(\overline{T}\big),$$

односно прецизније

$$\overline{P(T)} \leqslant P\big(\overline{T}\big),$$

јер је у посматраном сегменту функција конкавна. Занимљиво је и да се $\overline{P(T)}$ може апроксимирати

$$\overline{P(T)} \cong P\big(\overline{T}\big) + \frac{1}{2}P''\sigma^2,$$

где је константа σ^2 привремена варијанса телесне температуре самог организма, $\overline{P(T)}$ је просечна вредност топлотних перформанси, а $P\big(\overline{T}\big)$ вредност посматране функције на просечној температури.

3 Закључак

Овај рад је пре свега посвећен Јенсеновој неједнакости, уз помоћ које су и неке друге овде наведене класичне неједнакости обједињене. Све неједнакости испраћене су одабраним примерима и задацима којих је у литератури данас заиста велик број.

У првом делу представљен је сам појам конвексности и конкавности, веза са диференцијабилношћу и основне дефиниције.

Други део базиран је на Јенсеновој неједнакости и неким најважнијим последицама. Што се тиче примена, због обимности саме теме, приказане су неке са којима се најчешће можемо сусрести кроз мноштво различитих примера. Такође, идеја је била и да се помене важност ове неједнакости не само при решавању математичких задатака, већ и у практичним сферама науке.

Посебно бих желела да се захвалим ментору професору Ђорђу Кртинићу на помоћи и сугестијама при изради рада, као и на пренетом знању из математике у протекле две године.

4 Литература

[1] Zdravko Cvetkovski, *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, Berlin 2011

[2] Mark Denny, *Performance in a variable world: using Jensen's inequality to scale up from individuals to populations*, Conservation Physiology 2020

[3] З. Каделбург, Д. Лукић, М. Лукић и И. Матић, *Неједнакости*, Материјали за младе математичаре свеска 42, Друштво математичара Србије, Београд 2014.

[4] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром, уџбеник са збирком задатака за 4. разред Математичке гимназије*, Круг, Београд 2016.

[5] Милош Лабан, *Збирка решених задатака из математике 1*, Научна књига, Београд 1987.

[6] Јосип Е. Печарић, *Конвексне функције - неједнакости*, Научна књига, Београд 1987.

[7] Јосип Е. Печарић, *Јенсенова и са њом повезане неједнакости*, Докторска дисертација, Универзитет у Београду - Електротехнички факултет, Београд 1981.