Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
– из математике –

Партиције природних бројева

Ученик:
Огњен Петров IVц

Ментор:
др Ђорђе Кртинић

Београд, 2021.

Садржај

1

Увод

Партиција природног броја n је представљање n у облику збира природних бројева, при чему је редослед сабирака небитан. Са $p(n)$ означавамо број партиција од n. По дефиницији важи $p(0) = 1$, а на пример ако је $n = 5$, $p(5) = 7$ и то су:

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Након покушаја да се открије директна веза између $p(n)$ и n (тј. покушаја да се $p(n)$ изрази преко елементарних функција од n) можемо закључити, или барем наслутити, да то није могуће. Оно што је јасно јесте да $p(n)$ расте, и то експоненцијално, што је очекивано у комбинаторици (долази до тзв. комбинаторне експлозије). Вредности неких $p(n)$ можемо видети у табели 1.

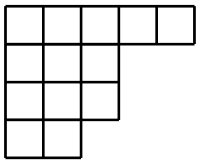
n	0	1	2	3	4	5	...	10	...	50	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	...	42	...	204226	...

Табела 1 – број партиција за неке мање бројеве

Чувени математичари Харди и Рамануџан су се, између осталих ствари, бавили и истраживањем партиција (њихова нажалост кратка, али богата заједничка историја представљена је у филму „The Man Who Knew Infinity"(2015)). Открили су асимптотску формулу понашања $p(n)$ која тврди да када $n \to \infty$

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}. \tag{1.1}$$

Партицију λ неког природног броја n означавамо као $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$, при чему је $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$. Такође, партиције можемо представљати преко Јанговог дијаграма, који можемо видети на дијаграму 1.



Дијаграм 1

Партиција приказана на дијаграму 1 је $(4, 4, 3, 1, 1)$. Међутим, то се добије посматрањем квадрата по колонама, а јасно је да можемо бројати и квадрате по врстама и у том случају посматрамо партицију $(5, 3, 3, 2)$. Овакве партиције називамо конјугованим партицијама.

Теорема 1.1. Број партиција n на највише k сабирака једнак је броју партиција n на сабирке не веће од k.

Доказ. Посматрајмо партицију $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$. Уколико прикажемо ову партицију на Јанговом дијаграму на такав начин да i-та колона садржи λ_i квадрата, онда, због тога што постоји највише k колона, свака врста има највише k квадрата, тј. највећи могући члан конјуговане партиције λ је k. На овај начин смо успоставили бијекцију (функција коју користимо је управо функција конјуговања, јасно је да је она сурјективна и инјективна) између партиције n на највише k сабирака и партиције n на сабирке не веће од k, тј. мора их бити једнако. $\square$

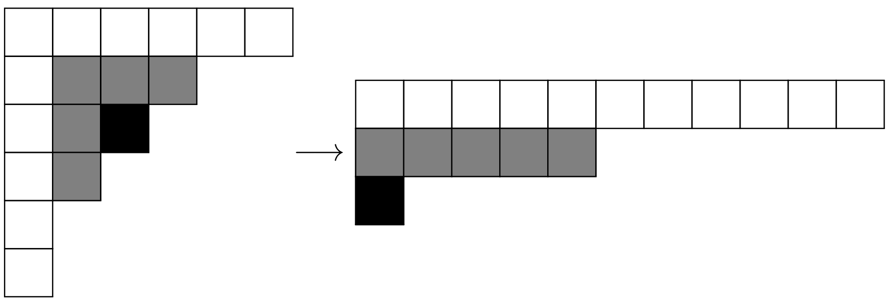
2

Успостављање бијекција на Јанговом дијаграму

Честа метода у раду с партицијама јесте успостављање бијекције. У овом поглављу ћемо се позабавити различитим начинима прављења бијекције између Јангових дијаграма, што је идеја која ће бити коришћена и у другим деловима рада.

Пример 1. Број самоконјугованих партиција једнак је броју партиција на непарне и различите чланове.

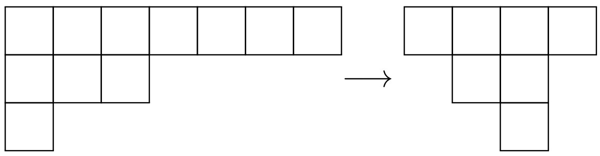
Партиција је самоконјугована уколико је њен конјугат на Јанговом дијаграму једнак њој самој (односно ако је њен Јангов дијаграм симетричан у односу на „главну дијагоналу"). Применићемо функцију која прави нови дијаграм на следећи начин. У првој врсти новог дијаграма ће се налазити онолико квадрата колико их има у унији прве колоне и прве врсте почетног дијаграма. У другој врсти ће се налазити онолико квадрата колико их има у унији друге колоне и друге врсте, а да нису већ пребројани итд. Функција се може лепо представити на дијаграму (пресликава дијаграм 2 у дијаграм 3).



Дијаграми 2 и 3, респективно

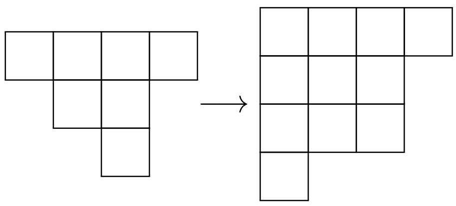
Нека је дата партиција $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$, при чему је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$. Нека је i-ти квадрат на главној дијагонали дефинисан као пресек i-те колоне и i-те врсте. Нека таквих квадрата има m. Нека наша функција пресликава партицију λ у неку партицију κ. Знамо да ће κ онда имати m чланова. Конкретно, биће $\kappa_l = 2(\lambda_l - l) + 1 = 2\lambda_l - 2l + 1$. Дакле, сви κ_l су непарни. Како нам је партиција λ уређена опадајуће, онда је и κ, па су све κ_l различите. Дакле, од полазне самоконјуговане партиције добијамо јединствену партицију с непарним и различитим деловима.

Докажимо још да је инверзни процес такође јединствен. Нека је дата партиција с непарним и различитим члановима $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots, \kappa_m)$ где је κ уређен опадајуће и $\kappa_i = 2\lambda_i - 2i + 1$. Ићи ћемо врсту по врсту и правићемо нову партицију на следећи начин. Најпре ћемо од врсте κ_j направити нову врсту која се састоји од $\lambda_j - j + 1$ квадрата. Сваку следећу врсту ћемо правити на исти начин, с тим што ће бити померена за један квадрат удесно у односу на претходну врсту, тј. од партиције (7,3,1) на дијаграму 4 добићемо дијаграм 5:



Дијаграми 4 и 5, респективно

На новодобијеном дијаграму (дијаграму 6) можемо пресликати симетрично квадрате ван главне дијагонале, у односу на главну дијагоналу, и добити јединствену самоконјуговану партицију (дијаграм 7).



Дијаграми 6 и 7, респективно

Дакле, успоставили смо бијекцију између самоконјугованих типова партиција и партиција на непарне и различите чланове, што доказује да их има једнако.

2.1 Бресудова бијекција

Уколико је нека партиција подељена на различите чланове, то значи да се свака два члана партиције разликују барем за 1. Ако се сви чланови партиције разликују барем за 2, назовимо онда такве чланове *суперразличити*.

Посматрајмо партиције броја 10 на суперразличите чланове. То су

$$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 6 + 3 + 1.$$

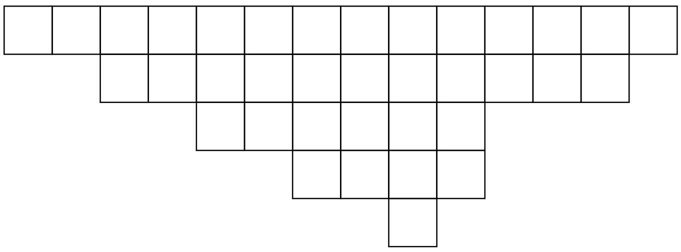
Посматрајмо сада партиције броја 10 на различите чланове. То су

$$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 7 + 2 + 1 = 6 + 3 + 1 = 5 + 4 + 1 = \\ 5 + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 + 1.$$

Свакако је јасно да је број партиција на суперразличите чланове неког броја мањи од броја партиција на различите чланове тог броја, јер је свака партиција са суперразличитим деловима такође и партиција с различитим деловима, али не и обратно. Међутим, уколико ограничимо различите партиције увођењем неког додатног услова, могуће је успоставити бијекцију између таквих типова партиција.

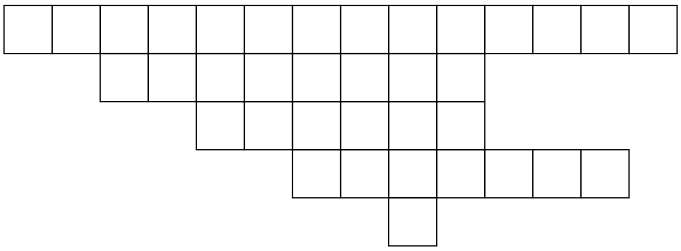
Теорема 2.1. Број партиција на суперразличите чланове једнак је броју партиција на различите чланове код којих је сваки парни члан већи од двоструког броја непарних чланова

Доказ. Посматрајмо најпре неку партицију са суперразличитим деловима. Померимо сваку врсту за два квадрата удесно у односу на претходну врсту на Јанговом дијаграму. На пример, ако смо пошли од партиције $36 = 14 + 11 + 6 + 4 + 1$, онда ће она изгледати овако на Јанговом дијаграму (дијаграм 8).



Дијаграм 8

Повуцимо сада десно од првог доњег квадрата замишљену вертикалну линију, која дели сваки члан партиције на леви и десни. Означимо целокупну партицију са $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$, при чему је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$ и $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} + 2$ за $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ (јер је партиција на суперразличите чланове и опадајући је низ λ_i, онда је ово добро дефинисано). Тада је број квадрата лево од наше линије у i-том реду $2(k - i) + 1$. Десно од наше линије се у i-том реду налази $\kappa_i = \lambda_i - 2(k - i) - 1$. Сортирајмо сада све κ_i опадајуће, најпре непарне, а онда парне делове (уколико су сви $\kappa_i = 0$, онда нема квадрата десно од линије и сви чланови почетне партиције су непарни, оваква партиција спада у обе класе почетних партиција и нема потребе успостављати бијекцију између њих). Овим поступком добијамо низ κ'_i и долазимо до следеће партиције (дијаграм 9):



Дијаграм 9

Докажимо да је новодобијена партиција $\lambda'_i = 2(k-i)+1+\kappa'_i$ управо тип партиције који смо тражили, тј. партиција с различитим деловима где је сваки парни део барем двоструко већи од броја непарних делова.

Сви леви делови (односно делови $2(k-i)+1$) почетне партиције су непарни, а након што извршимо сортирање свих κ_i, свеукупно ће први ред бити највећи парни број у новонасталој партицији (леви и десни делови су непарни, под претпоставком да постоји κ_i које је непарно, у супротном је доказ аналоган). Пошто су нам сортирани низови и лево (са ове стране је строго опадајући низ) и десно (односно најпре сортирани непарни, па парни) од наше замишљене линије, онда се и наша новодобијена партиција састоји од различитих делова, јер нам редом строго опадају прво парне партиције, па онда строго опадају непарне партиције (свеукупно посматрано).

Докажимо сада да су сви парни делови барем два пута већи од броја непарних делова. Претпоставимо да је првих j делова партиције $\lambda'_j \equiv 0 \pmod 2$ и $\lambda'_{j+1} \equiv 1 \pmod 2$ ($j \in \{0,1,2,3,\dots,k\}$). То значи да у партицији λ' имамо укупно $k-j$ непарних чланова. Због $\kappa'_i \geq 0$ знамо да је $\lambda'_i \geq 2(k-i)+1$. Приметимо да је

$$\min\{\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_j\} \geq \lambda'_j \geq 2(k-j)+1, \tag{2.1}$$

што значи да су сви чланови за које важи $\lambda'_j \equiv 0 \pmod 2$ управо већи од двоструког броја непарних чланова.

Преостало је још да докажемо да на јединствен начин можемо пресликати добијену партицију у првобитну. Рецимо да имамо партицију на различите делове код којих је сваки парни део већи барем двапут од броја непарних делова означену са λ. Раздвојмо λ на подскупове σ и τ такве да је свака партиција из σ парна, а свака партиција из τ непарна и $\sigma \sqcup \tau = \lambda$. Поређајмо сада делове на Јанговом дијаграму тако да нам прво иду делови из σ сортирани опадајуће, па потом делови из τ сортирани опадајуће. Транслирајмо опет све партиције за два квадрата удесно, као на почетку. Сада смо добили партицију идентичну партицији на дијаграму 8. Уколико опет замислимо линију идентичну оној с почетка доказа, онда је јасно да ће сортирање делова десно од линије и поновно спајање дати почетну партицију. Још треба доказати да такву линију можемо повући.

Последњих $|\tau|$ редова су непарни (под последњим редом подразумевамо онај испод ког нема више делова партиције). Сваки претходни ред у τ је барем за 2 мањи од претходног (да би се одржала парност). Аналогно, сваки претходни ред из σ је барем за 2 мањи од претходног. Нека су нам нумерисани индекси чланова σ и τ тако да је новонастала партиција на дијаграму предста-вљена са $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{|\sigma|}, \tau_{|\sigma|+1}, \ldots \tau_{|\sigma|+|\tau|})$ (посматрано одозго надоле). Тврђење с почетка пасуса доказује да је $\tau_i \geq \tau_{i+1} + 2$, а како је $\tau_{|\sigma|+|\tau|} \geq 1$, то повлачи $\tau_{|\sigma|+i} \geq 2(|\tau| - i) + 1$, за $i \in 1, 2, \ldots, |\tau|$. Због дефиниције типа партиције је $\min\{\sigma\} = \sigma_{|\sigma|} \geq 2|\tau| + 1$, тј.

$$\sigma_{|\sigma|} \geq 2|\tau| + 1 = 2(|\sigma| + |\tau| - |\sigma|) + 1. \tag{2.2}$$

Аналогно као малопре, ово повлачи $\sigma_i \geq 2(|\sigma|+|\tau|-i)+1$, за $i \in \{1, 2, \ldots, |\sigma|\}$. Свеукупно ово значи да у i-том реду партиције имамо барем $2(|\sigma| + |\tau| - i) + 1$ квадрата, што нам омогућава да повучемо тражену линију, а то је и требало доказати.

Дакле, успоставили смо бијекцију између горепоменутих типова партиција, што управо доказује теорему. □

2.2 Горње ограничење за $p(n)$

Као што је наглашено у уводу, $p(n)$ расте експоненцијално. Међутим, ипак је могуће ограничити $p(n)$ одозго помоћу неког другог низа који је погоднији за контролу.

Јасно је да је $p(n) > p(n-1)$ (за $n \geq 2$), јер на сваку партицију $n-1$ можемо додати још један квадрат на дну Јанговог дијаграма и самим тим добијамо неку партицију n. Приметимо да је

$$p(n-1) = p(n \mid \text{постоји барем један члан } 1). \tag{2.3}$$

Директна последица овога је

$$p(n) = p(n-1) + p(n \mid \text{не постоји члан } 1). \tag{2.4}$$

Можемо закључити да је $p(n-2) = p(n \mid \text{постоји барем један члан } 2)$, јер је додавање једног члана 2 (као и уклањање члана 2) с Јанговог дијаграма бијекција. Посматрајмо функцију која повезује партиције код којих не постоји члан 1 и партиције код којих постоји барем један члан 2. Узмимо најмањи члан из партиције код које не постоји члан 1 (тај члан је барем дужине два). Исецкајмо тај члан на један члан дужине 2 и преостале чланове дужине 1. Оваква партиција је управо други тип партиција, тј. у овој партицији постоји барем један члан 2. Ово пресликавање није бијективно, али јесте инјективно, што нам говори да је

$$p(n \mid \text{не постоји члан } 1) \leq p(n \mid \text{постоји барем један члан } 2) = p(n-2). \tag{2.5}$$

Комбиновањем (2.4) и (2.5) добијамо да је

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2). \tag{2.6}$$

Нека је са F_n означен n-ти Фибоначијев број ($F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Докажимо индукцијом да је $p(n) \leq F_{n+1}$. За $n = 0$ и $n = 1$ је тврђење тривијално ($1 \leq 1$). Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$ и $n-2$. Комбиновањем (2.6) са индуктивном хипотезом добијамо

$$\begin{aligned} p(n) &\leq p(n-1) + p(n-2) \\ &\leq F_n + F_{n-1} \\ &= F_{n+1}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

што смо и хтели да докажемо.

Дошли смо до закључка да $p(n)$ расте највише онолико брзо колико расту и Фибоначијеви бројеви, иако оба низа расту експоненцијално. У табели 2 је дато поређење $p(n)$ са F_{n+1} за неке вредности n.

n	0	1	2	3	4	5	6	...	10	...	50	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	...	42	...	204226	...
F_{n+1}	1	1	2	3	5	8	13	...	55	...	12586269025	...

Табела 2 – Поређење $p(n)$ и F_{n+1}

Видимо да Фибоначијеви бројеви, иако јесу горње ограничење за $p(n)$, много одступају од $p(n)$ за велико n, али за мале n дају процену која је често довољна за одговарајућу примену.

2.3 Понашање $p(n)$ у бесконачности

Више пута смо нагласили да $p(n)$ експоненцијално расте, но то није у потпуности тачно. Низ $p(n)$ расте заправо брже од полиномне, али спорије од експоненцијалне функције. Доказаћемо да је

$$\lim_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{2.8}$$

Пре него што дођемо до тога, докажимо следећу лему.

Лема 1. Ако $\sigma(k)$ представља збир свих делилаца природног броја k, онда важи

$$np(n) = \sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j).$$

Доказ леме 1. Посматрајмо све партиције броја n. По дефиницији, њих има $p(n)$, а збир сваке је n, па је збир свих чланова ових партиција $np(n)$, тј. управо израз с леве стране. Посматрајмо сада неки сабирак k. Он се појављује барем једном у $p(n-k)$ партиција, барем двапут у $p(n-2k)$ партиција итд. Дакле, укупан број појављивања k у свим партицијама је

$$p(n-k) + p(n-2k) + p(n-3k) + \dots$$

Сада имамо

$$\begin{aligned} np(n) &= \sum_{k=1}^{n} k(p(n-k) + p(n-2k) + p(n-3k) + \dots) \\ &= \sum_{ik\le n} kp(n-ik) \\ &= \sum_{j=1}^{n} p(n-j) \sum_{k|j} k = \sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j), \end{aligned} \tag{2.9}$$

што је и требало доказати. □

Докажимо сада да за свако $\varepsilon > 0$ постоји довољно велика константа c, таква да је

$$1 \le p(n) \le c(1+\varepsilon)^n. \tag{2.10}$$

Посматрајмо најпре низ $a_j = \dfrac{j(j+1)}{2(1+\varepsilon)^j}$. Ред $S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ је конвергентан, јер је

$$\lim_{j\to\infty} \left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{j+2}{j(1+\varepsilon)}\right| < 1. \tag{2.11}$$

Дакле, онда можемо да одаберемо N (у функцији од ε) такво да је $N \geq S$. Одаберимо константу

$$c = \max_{1\leq n\leq N} \frac{p(n)}{(1+\varepsilon)^n}.$$

Докажимо сада индукцијом да важи (2.10). Због одабира константе c, јасно је да ће неједнакост важити за све $n \leq N$. Претпоставимо сада да (2.10) важи до неког n (где је $n > N$), а не укључујући n. Због леме 1 имамо

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j) \leq \frac{c}{n}\sum_{j=1}^{n}(1+\varepsilon)^{n-j}\sigma(j) \\ &= \frac{c}{n}(1+\varepsilon)^n \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma(j)}{(1+\varepsilon)^j} \leq \frac{c}{n}(1+\varepsilon)^n \sum_{j=1}^{n} \frac{1+2+\ldots+j}{(1+\varepsilon)^j} \\ &= \frac{c}{n}(1+\varepsilon)^n \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2(1+\varepsilon)^j} \leq \frac{c}{n}(1+\varepsilon)^n N \leq c(1+\varepsilon)^n. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Дакле, важи (2.10). Узимањем n-тог корена и пуштањем лимеса добијамо

$$1 \leq p(n)^{\frac{1}{n}} \leq (1+\varepsilon)\sqrt[n]{c}, \tag{2.13}$$

а како је ε произвољан позитиван број, онда су лимеси у бесконачности леве и десне стране једнаки 1. По леми два полицајца добијамо и егзистенцију и вредност траженог лимеса, тј.

$$\lim_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{2.14}$$

Да смо рачунали аналогни лимес за Фибоначијев низ, онда бисмо добили резултат $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Одавде је јасно да Фибоначијев низ расте експоненцијално, док $p(n)$ расте спорије од експоненцијалне, али брже од полиномске функције (за полиномску функцију би овај лимес износио нула, а за експоненцијалну би била нека константа већа од 1). Ово додатно потврђује формулу (1.1) (лимес n-тог корена асимптотске апроксимације заиста износи 1).

3

Генераторна функција

3.1 Појам и дефиниција

Дефиниција 1. Функција

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

где записани степени ред конвергира у некој области, назива се функцијом генератрисе, тј. генераторном функцијом низа $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

Функција генератрисе има широку примену у комбинаторици и пружа нов приступ проблемима. Њихово кључно својство је то што једнозначно одређују низ.

Лема 2. Функција генератрисе низа $(1, 1, 1, \ldots)$ износи $\dfrac{1}{1-x}$.

Доказ. Због конвергенције мора бити $|x| < 1$. Генераторна функција $F(x) = 1+x+x^2+x^2+\ldots$ представља геометријски низ, тј. управо је $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$. □

Увођењем смене $t = -x$ можемо да закључимо да генераторна функција низа $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ износи $\dfrac{1}{1+x}$.

Уколико не буде другачије наглашено, у даљем делу рада ће се подразумевати да је x из конвергентног домена и то ће најчешће бити $(-1, 1)$.

Пример 2. Одредити општи члан F_n Фибоначијевог низа у функцији од n ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$).

Општи члан можемо лако добити стандардним поступком решавања линеарне хомогене диференцне једначине, али проблем можемо решити и помоћу генераторне функције. Нека је $g(x)$ генераторна функција Фибоначијевог низа. Тада је

$$\begin{aligned} g(x) &= F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \dots, \\ x g(x) &= x F_0 + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \dots, \\ x^2 g(x) &= x^2 F_0 + F_1 x^3 + F_2 x^4 + \dots \end{aligned}$$

Одузимањем друге и треће једначине од прве добијамо

$$(1 - x - x^2) g(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \dots \tag{3.1}$$

Сви коефицијенти, изузев оног уз линеарни члан, износе 0 због дефиниције низа. Одавде је $g(x) = -\dfrac{x}{x^2 + x - 1}$. Нуле квадратног тринома у имениоцу су $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Израз $g(x)$ можемо онда представити и као $g(x) = \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\dfrac{1}{1-\alpha_1 x} - \dfrac{1}{1-\alpha_2 x}\right)$. Уколико је $\max\{|\alpha_1 x|, |\alpha_2 x|\} < 1$, онда можемо $\dfrac{1}{1-\alpha_1 x}$ и $\dfrac{1}{1-\alpha_2 x}$ представити преко геометријског низа, тј. као функцију генератрисе низа $(1, \alpha_1, \alpha_1^2, \dots)$, односно низа $(1, \alpha_2, \alpha_2^2, \dots)$. Одавде добијамо

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_2^i x^i\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_1^i - \alpha_2^i) x^i. \tag{3.2}$$

Дакле, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

3.2 Генераторна функција низа $p(n)$

Посматрајмо функцију $G(x)$ облика

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)\dots = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} x^{ki}. \tag{3.3}$$

Нека је коефицијент уз x^m у овом производу a_m, тј. тада је $G(x)$ функција генератрисе низа $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Произвољну партицију неког природног броја

n можемо на јединствен начин представити као $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + \ldots = n$, где k_1 представља број јединица у партицији, k_2 број двојки у партицији итд. Сада видимо да је a_n управо број начина на које можемо представити n у оваквом облику, тј. $p(n) = a_n$. Због конвергенције је $|x| < 1$, тада сваку заграду у првобитној поставци функције $G(x)$ можемо записати као суму геометријског низа. Одавде добијамо да је генераторна функција низа $p(n)$ управо

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. (*Ојлер*) Број партиција n на различите сабирке једнак је броју партиција n на непарне сабирке.

Доказ успостављањем бијекције. Нека су $P_R(n)$ и $P_N(n)$ редом скупови партиција n на различите, односно непарне чланове. Нека је

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_t, \lambda_t, \ldots, \lambda_t)$$

партиција n за коју су $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_t$ различити непарни бројеви и нека постоји тачно n_i чланова партиције који су једнаки $\lambda_i (1 \leq i \leq t)$. Покушајмо сада да направимо функцију $\varphi : P_N(n) \to P_R(n)$ која претвара партицију λ, чији су сви чланови непарни, у партицију λ', чији су сви чланови различити. Због начина на који смо дефинисали партицију λ, знамо да важи $\sum_{i=1}^{t} n_i \lambda_i = n$. Представимо n_1 у бинарном запису, тј. нека је

$$n_1 = \sum_{k=1}^{s} 2^{m_1}, \tag{3.5}$$

где важи $m_1 > m_2 > \cdots > m_s \geq 0$. Уколико свако n_k представимо на овај начин, добијемо n приказан на другачији начин, али опет као збир неких природних бројева од којих сваки представља члан неке нове партиције

$$\lambda' = (2^{m_1}\lambda_1, 2^{m_2}\lambda_1, \ldots, 2^{m_s}\lambda_1, 2^{t_1}\lambda_2, 2^{t_2}\lambda_2, \ldots, 2^{t_q}\lambda_2, \ldots).$$

Докажимо да су сви чланови ове партиције различити. Претпоставимо супротно, тј. нека постоје нека два члана ове партиције који су једнаки. Тада би важило $2^m\lambda_i = 2^t\lambda_j$. Пошто је свако λ_i непарно, онда мора важити $m = t$ и $i = j$, зато што „парни” и „непарни” делови морају бити међусобно једнаки. Како важи $i = j$, то значи да се 2^m и 2^t налазе у бинарном запису истог броја као различити чланови. Ово је немогуће због тога што смо нагласили да су у бинарном запису сви експоненти двојке различити. Контрадикција. Дакле сви чланови ове партиције су различити и λ' је партиција коју смо тражили, тј. $\varphi(\lambda) = \lambda'$. Преостало је још да докажемо да је φ бијекција. Нека је $\psi : P_R(n) \to P_N(n)$ функција која врши процес обрнут φ, тј. од партиције чији су сви чланови различити прави партицију чији су сви чланови непарни. Нека је $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t)$ партиција чији су сви чланови различити. Свако λ_i можемо записати као производ неког степена двојке и неког непарног броја, тј. $\lambda_i = 2^{m_i}\lambda'_i$. Уколико ово применимо на свако λ_i, добијемо партицију $(2^{m_1}\lambda'_1, 2^{m_2}\lambda'_2, \ldots, 2^{m_t}\lambda'_t)$. Уколико групишемо све λ'_i који су једнаки на начин супротан начину на који смо малочас дошли до партиције λ', могли бисмо да се вратимо у јединствену партицију чији су сви чланови непарни. Приметимо да, уколико на неку партицију чији су сви чланови различити применимо функцију ψ и потом на новодобијену партицију применимо функцију φ, добијемо исту партицију од које смо кренули, тј. важи $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, па су φ и ψ међусобно инверзне бијекције. Како је φ бијекција, онда мора важити да је $|P_N(n)| = |P_R(n)|$, што је и требало доказати. $\square$

Доказ помоћу генераторне функције. На почетку овог поглавља смо видели како партицију можемо записати у облику $k_1+2k_2+3k_3+4k_4+\ldots$ Уколико желимо да нам сви чланови партиције буду једнаки, онда је јасно да партиција има све различите чланове ако је $k_i \in \{0, 1\}$. Сада је генераторна функција низа $p_R(n)$

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k). \tag{3.6}$$

Нека је $F(x)$ генераторна функција низа $p_N(n)$. У нашем представљању партиције то је еквивалентно са $k_{2i} = 0$ (за $i \in \mathbb{N}$), тада је

$$F(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)\ldots = \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} x^{(2k+1)i}. \tag{3.7}$$

Због конвергенције је $|x| < 1$, па имамо

$$F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}. \tag{3.8}$$

Приметимо да сваку заграду производа $G(x)$ можемо представити као $1 + x^k = \dfrac{1-x^{2k}}{1-x^k}$, тј.

$$G(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}\right) = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\ldots = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}} = F(x). \tag{3.9}$$

Како је $F(x) = G(x)$, због инјективности то повлачи и да су њихови низови једнаки, односно $p_R(n) = p_N(n)$ за све n, што је и требало доказати. $\square$

Пример 3. Генераторна функција $G_t(x)$ низа броја партиција на чланове не веће од t (односно броја партиција на највише t чланова) јесте

$$G_t(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^t)}. \tag{3.10}$$

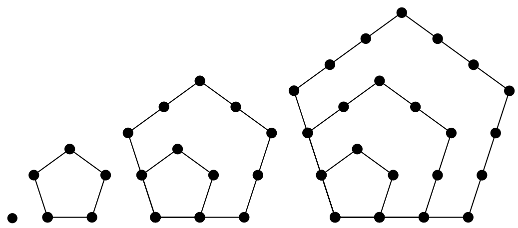
Аналогним поступком као када смо доказивали како изгледа генераторна функција низа $p(n)$ долазимо и до овог закључка.

4

Ојлерова теорема о пентагоналним бројевима

4.1 Пентагонални бројеви

За број кажемо да је *пентагоналан* ако се тај број тачака може распоредити у равни на такав начин да можемо направити низ петоуглова који почиње из њихове заједничке тачке и на чијој се свакој ивици налази једнак број тачака. На пример, 12 је пентагоналан број зато што можемо распоредити 12 тачака у равни као што је приказано на слици 1.



Слика 1 – Примери пентагоналних бројева

Означимо са p_n n-ти пентагонални број. Примећујемо да можемо изразити наредни члан у зависности од претходног преко рекурентне везе

$$p_{n+1} = p_n + 3n + 1. \tag{4.1}$$

Можемо да направимо телескопску суму како бисмо брзо решили ову рекурентну једначину, тј.

$$p_n - p_1 = (p_n - p_{n-1}) + (p_{n-1} - p_{n-2}) + \ldots + (p_2 - p_1) = 3\frac{n(n-1)}{2} + n - 1. \tag{4.2}$$

По дефиницији је $p_1 = 1$, одакле директно добијамо $p_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$. Првих неколико пентагоналних бројева су:

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, \ldots$$

Дефинишимо и рефлексије пентагоналних бројева као $p'_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$, односно уколико проширимо да је $n \in \mathbb{Z}$, а не само $n \in \mathbb{N}$. Првих пар рефлексија пентагоналних бројева су:

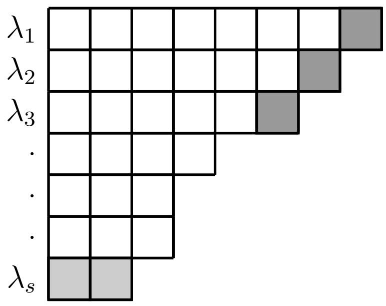
$$2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, \ldots$$

Пентагонални бројеви заједно са својим рефлексијама чине генерализоване пентагоналне бројеве, који су општег облика $\dfrac{3n^2 \pm n}{2}$, за $n \in \mathbb{N}_0$. У даљем делу рада се подразумева да се израз пентагонални бројеви односи на генерализоване пентагоналне бројеве.

Теорема 4.1. Нека је $p_R(n, P)$ број партиција n на паран број различитих чланова, а $p_R(n, N)$ на непаран број различитих чланова. Онда за сваки природан број n важи

$$p_R(n,P) - p_R(n,N) = \begin{cases} 1, \text{ ако је } n = \frac{3j^2 \pm j}{2} \text{ и } j \text{ парно} \\ -1, \text{ ако је } n = \frac{3j^2 \pm j}{2} \text{ и } j \text{ непарно} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Доказ. Нека је $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ нека партиција n, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_s$. Посматрајмо најпре Јангов дијаграм овакве партиције, који је приказан на дијаграму 10.

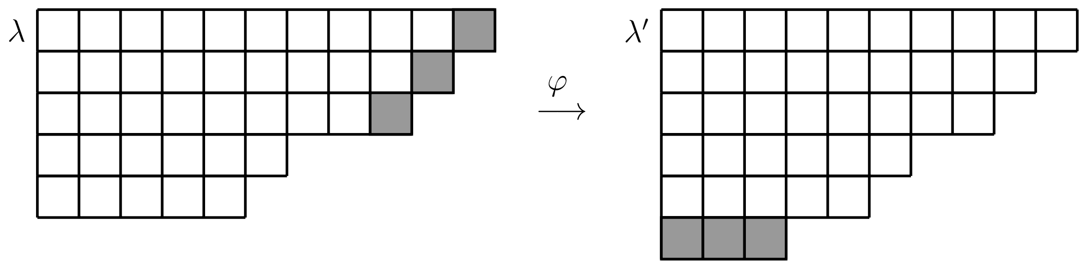


Дијаграм 10

Крајња десна дијагонала у Јанговом дијаграму назива се *косина* (на овом дијаграму то су тамносиви квадрати), а последња врста назива се *база* (светлосиви квадрати) и нека је $b = \lambda_s$ број елемената у бази, а k број елемената у косини партиције. Поделимо сада скуп $P_R(n)$ на три дисјунктне класе партиција, тј. $P_R(n) = P_{R,1}(n) \sqcup P_{R,2}(n) \sqcup P_{R,3}(n)$. Ови подскупови су дефинисани на следећи начин.

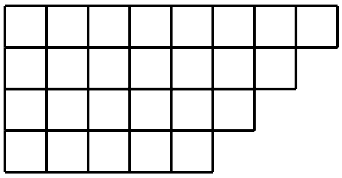
$$
\begin{aligned}
P_{R,1} &= \{\ \lambda \mid b \geq k+2 \vee b = k+1 \text{ и база и косина се не пресецају}\} \\
P_{R,2} &= \{\ \lambda \mid k > b \vee k = b \text{ и база и косина се не пресецају}\} \\
P_{R,3} &= P_R(n) \setminus (P_{R,1}(n) \sqcup P_{R,2}(n))
\end{aligned}
$$

Дефинишимо функцију φ, помоћу које ћемо успоставити везу између ових дисјунктних подскупова. Нека φ пресликава партицију λ на различите чланове у партицију λ' тако што премешта све квадрате са косине партиције λ испод своје базе и тиме ствара нову партицију λ'. Ова функција се може лепо представити Јанговим дијаграмом (φ слика дијаграм 11 у дијаграм 12).



Дијаграми 11 и 12, респективно

Међутим, очигледно је да ову функцију не можемо применити на сваку партицију λ. Да би сви чланови партиције λ' такође били различити, потребно је да $b \geq k+2$ или да је $b = k+1$ и да се база и косина не пресецају, тј. φ можемо применити на све партиције из класе $P_{R,1}(n)$. Лако примећујемо да применом φ на неку партицију λ из класе $P_{R,1}(n)$ добијамо партицију λ' из класе $P_{R,2}(n)$. Проширимо сада домен и кодомен φ тако што ћемо дозволити да не пресликава само из $P_{R,1}(n)$ у $P_{R,2}(n)$, већ да пресликава из $P_{R,1}(n) \cup P_{R,2}(n)$ у $P_{R,1}(n) \cup P_{R,2}(n)$. Уколико $\lambda \in P_{R,2}(n)$, тада можемо „одсећи” базу и залепити је на косину и тиме правимо партицију из класе $P_{R,1}(n)$. Лако се види да је $\varphi^2 = \mathrm{id}$, па је φ бијекција. Сваки пут када применимо φ на неку партицију, број чланова те партиције се или смањи или повећа за 1, тј. промени парност. Како је φ бијекција, онда се у $P_{R,1}(n) \cup P_{R,2}(n)$ налази исти број партиција на парне и непарне (различите) сабирке. Пошто су у $P_{R,3}(n)$ све преостале партиције, лако увиђамо да за ову класу важи да је $b = k+1$ и да се база и косина пресецају, или је $b = k$ и да се база и косина пресецају. Први тип је представљен на дијаграму 13.

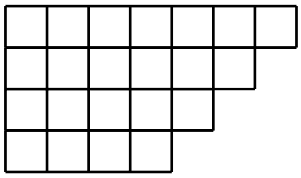


Дијаграм 13

У овом случају видимо да је укупан број партиција k и да се дијаграм састоји од једног квадрата странице k и једног једнакокракоправоуглог троугла чија је катета k и чија се свака колона смањује за један квадрат гледајући слева надесно, па је

$$n = k^2 + k + (k-1) + (k-2) + \ldots + 1 = k^2 + \sum_{i=1}^{k} i = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{3k^2+k}{2}.$$

Други тип партиција у овој класи се може представити на дијаграму 14.



Дијаграм 14

Овде видимо да је дијаграм сачињен од једног квадрата странице k и једног једнакокракоправоуглог троугла странице $k-1$. Сада n износи

$$n = k^2 + (k-1) + (k-2) + \ldots + 1 = k^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i = k^2 + \frac{(k-1)k}{2} = \frac{3k^2-k}{2}.$$

Сада можемо закључити да, ако је $n \neq \frac{k(3k\pm1)}{2}$, тада су све партиције из $P_{R,1}(n) \sqcup P_{R,2}(n)$ и тада важи $p_R(n,P) - p_R(n,N) = 0$. У осталим случајевима, ако је $n = \frac{k(3k\pm1)}{2}$ и k је парно, онда имамо једну више партицију на паран број различитих сабирака, а ако је k непарно, онда имамо једну мање партицију, што је и требало доказати. $\square$

4.2 Ојлеров полином

Приликом решавања бројних проблема комбинаторике и теорије бројева, Ојлеру су се појавили полиноми специјалног облика. Један од таквих полинома је

$$\psi_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1-x^k),$$

где је $n \in \mathbb{N}$. Погледајмо како изгледа овај полином у развијеном облику за неке мање n.

$\psi_1(x) = 1 - x$

$\psi_2(x) = 1 - x - x^2 + x^3$

$\psi_3(x) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6$

$\psi_4(x) = 1 - x - x^2 + 2x^5 - x^8 - x^9 + x^{10}$

$\psi_5(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^6 + x^7 - x^8 - x^9 - x^{10} + x^{13} + x^{14} - x^{15}$

...

$\psi_{10}(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + x^{11} - x^{12} - x^{13} - 2x^{15} + \ldots + x^{55}$

...

Можемо доста ствари наслутити из ових неколико примера. Као прво, видимо да, како n расте, коефицијенти уз x^k се на неки начин „стабилизују”, тј. постају константни за неко велико n. Ово је инспирисало Ојлера да дефинише функцију

$$\psi(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k),$$

која се још назива Ојлерова функција. Очигледно важи $\psi(x) = \frac{1}{F(x)}$, где је $F(x)$ функција генератрисе низа $p(n)$ (када је $|x| < 1$).

Развијањем овог полинома за велико n закључујемо да ће израз бити облика

$$\psi(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \ldots.$$

Због претходног дела текста, наслућујемо да ће у експонентима остати само пентагонални бројеви, што нам је мотивација за следећу теорему.

Теорема 4.2. (*Ојлерова теорема о пентагоналним бројевима*) Ако је $F(x)$ функција генератрисе низа $p(n)$, онда важи

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i x^{\frac{3i^2+i}{2}}.$$

Доказ. Посматрајмо како изгледа генераторна функција низа $p_R(n)$, где је $p_R(n)$ број партиција n на различите чланове. Из теореме 2.1 нам је познато да функција генератрисе овог низа износи

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k). \tag{4.3}$$

Уколико додамо неки коефицијент уз x, нека је то коефицијент y, онда добијамо следећи израз

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+yx^k) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} p_R(n,m)x^n y^m, \tag{4.4}$$

где је $p_R(n,m)$ број партиција n са тачно m различитих сабирака. Уколико ставимо да је $y=1$, добијамо

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} p_R(n,m)\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_R(n)x^n, \tag{4.5}$$

а уколико ставимо $y=-1$, онда имамо

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m p_R(n,m)\right)x^n. \tag{4.6}$$

Нека је $p_R(n,P)$ број партиција n на паран број различитих чланова, а $p_R(n,N)$ на непаран број различитих чланова. У претходном изразу видимо да, како се мења парност m, тако се мења и знак испред $p_R(n,m)$, тј. ако је m парно, онда у суми унутар заграде имамо $+p_R(n,m)$, а ако је m непарно, онда имамо $-p_R(n,m)$. Из овога можемо закључити да важи

$$\frac{1}{F(x)} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = \sum_{n=0}^{\infty}(p_R(n,P)-p_R(n,N))x^n. \tag{4.7}$$

Из теореме 3.1 знамо да је $p_R(n,P)-p_R(n,N)=0$ уколико је $n \neq \dfrac{k(3k\pm 1)}{2}$, као и $p_R(n,P)-p_R(n,N)=(-1)^k$ када је $n=\dfrac{k(3k\pm 1)}{2}$. Ово нам управо говори да ћемо у резултату имати чланове чији су експоненти искључиво пентагонални бројеви (сви остали коефицијенти су нула), тј.

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i x^{\frac{3i^2+i}{2}}, \tag{4.8}$$

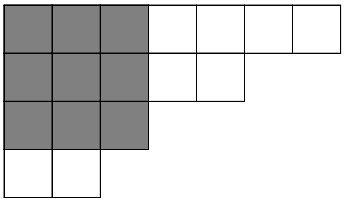
што је и требало доказати. □

4.3 Јакобијеви идентитети

Теорема 4.3. Ако је $F(x)$ генераторна функција низа $p(n)$, онда важи

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2(1-x^3)^2 \dots (1-x^n)^2}.$$

Доказ. Посматрајмо највећи квадрат на Јанговом дијаграму чије једно теме одговара горњем левом ћошку дијаграма. Нпр. за партицију (7,5,3,2) то је квадрат осенчен на дијаграму 15.



Дијаграм 15

Посматрајмо неку партицију броја n и означимо дужину странице квадрата са t. Јасно је да део дијаграма који се налази испод квадрата и десно од квадрата јесу неке партиције са највише t чланова (односно партиције на чланове не веће од t). Обележимо са r, односно s, број квадрата испод, односно десно од осенченог квадрата, редом (на нашем дијаграму је $n = 17$, $t = 3$, $r = 2$ и $s = 3$). Јасно је да је $r + s = n - t^2$.

Посматрајмо сада све партиције одређене неким n и t. Број партиција r (односно s) са највише t чланова једнак је коефицијенту уз x^r (односно x^t) функције $G_t(x)$ из примера 3. Дакле, број типова партиција које тражимо дат је као коефицијент уз x^{n-t^2} у изразу $G_t(x)^2$, односно као коефицијент уз x^n у изразу

$$x^{t^2} G_t(x)^2 = \frac{x^{t^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2(1-x^3)^2 \dots (1-x^t)^2}. \tag{4.9}$$

Уколико сумирамо овај израз по t, онда ће нам у новодобијеном изразу коефицијент уз x^k управо бити $p(k)$, јер сумирањем „покривамо” све могуће партиције k, тј.

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2(1-x^3)^2 \dots (1-x^n)^2}, \tag{4.10}$$

што је и требало доказати. □

Наредне две теореме је доказао Ојлер. Помоћу тих идентитета је Јакоби успео да дође до својих резултата.

Теорема 4.4.

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+ax^{2n+1})=\sum_{n-0}^{\infty}\frac{a^n x^{n^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2n})}.$$

Доказ. Означимо са $K(a,x)=\prod_{n=0}^{\infty}(1+ax^{2n+1})=1+c_1(x)a+c_2(x)a^2+\dots$ Приметимо да је $K(a,x)=(1+ax)K(ax^2,x)$, тј.

$$1+c_1(x)a+c_2(x)a^2+\dots=(1+ax)(1+c_1(x)ax^2+c_2(x)a^2x^4+\dots). \qquad (4.11)$$

Са леве стране коефицијент уз a^k износи $c_k(x)$, а са десне износи $c_k(x)x^{2k}+c_{k-1}(x)x^{2k-1}$, па је $c_k(x)=c_k(x)x^{2k}+c_{k-1}(x)x^{2k-1}$, при чему је $c_0=1$, а $c_1(x)=x$. Докажимо индукцијом да је

$$c_k(x)=\frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^{2k})}. \qquad (4.12)$$

Када је $k=1$, тада нам коефицијент уз a једнак $x+x^3+x^5+\dots=x(1+x^2+x^4+\dots)=\frac{x}{1-x^2}$ (када је $|x|<1$, што је подразумевано у овом контексту), што нам доказује случај за $k=1$. Претпоставимо да је тврђење тачно за $n-1$. Из индуктивне хипотезе и добијене рекурентне везе имамо

$$\begin{aligned} c_n(x)(1-x^{2n}) &= c_{n-1}(x)\frac{x^{(n-1)^2+2n-1}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2n-2})} \\ &= c_{n-1}(x)\frac{x^{n^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2n-2})}. \qquad (4.13)\end{aligned}$$

Дељењем обеју страна са $1-x^{2n}$ добијамо тражени израз за n. Дакле, доказали смо општи облик $c_k(x)$, који одговара члану a^k, тј.

$$K(a,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n x^{n^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2n})}, \qquad (4.14)$$

што је и требало доказати. □

Убацивањем вредности $a = 1$ и $a = x$, редом, у теорему 4.4 добијамо следеће идентитете:

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2n})}, \tag{4.15}$$

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\ldots = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{x^{n^2+n}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2n})}. \tag{4.16}$$

Теорема 4.5.

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+ax^{2n+1}} = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n x^n}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2n})}.$$

Доказ. Спроведимо аналогни доказ као у претходној теореми. Нека је

$$L(a,x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+ax^{2n+1}} = \prod_{n=0}^{\infty}(1-ax^{2n+1}+a^2x^{2(2n+2)}-\ldots) = 1+c_1(x)a+c_2(x)a^2+\ldots$$

Приметимо да је $L(ax^2, x) = L(a,x)(1+ax)$. Коефицијент уз a^k на левој страни износи $c_k(x)x^{2k}$, а на десној износи $c_k(x) + xc_{k-1}(x)$, одакле је $c_k(x) = -\dfrac{xc_{k-1}(x)}{(1-x^{2k})}$. Како је $c_0 = 1$, одавде одмах добијамо

$$c_k(x) = \frac{(-1)^k x^k}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{2k})}, \tag{4.17}$$

што нам управо доказује тврђење. $\square$

Теорема 4.6. (*Јакобијев идентитет о троструком производу*)

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z)(1+x^{2n-1}z^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}z^n.$$

Доказ. Запишимо $K(z,x)$ (из теореме 4.4) на следећи начин:

$$K(z,x) = F(x^2)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(x^{n^2}z^n\prod_{k=0}^{\infty}\big(1-x^{2n+2+2k}\big)\Big). \tag{4.18}$$

Сума пролази по $n \in \mathbb{Z}$, но сви коефицијенти уз x^n, за $n < 0$, износе 0, јер ће један од фактора производа бити 0. Поделимо израз са $F(x^2)$ и применимо на производ $\prod_{k=0}^{\infty}(1 - x^{2n+2+2k})$ теорему 4.4 са вредношћу параметра $a = -x^{2n+1}$. Добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{K(z,x)}{F(x^2)} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{n^2} z^n x^{m^2+m+2mn}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2m})} \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^n x^{(n+m)^2+m}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2m})} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m z^{-m} x^m}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2m})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n+m} x^{(n+m)^2} \right) \\
&= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2j+1}z^{-1}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2} z^n. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Последња једнакост је добијена преко теореме 4.5 стављањем $a = z^{-1}$. Множењем обеју страна са $\prod_{j=0}^{\infty}(1 + x^{2j+1}z^{-1})$ добијамо

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z)(1+x^{2n-1}z^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2} z^n, \qquad (4.20)$$

што је и требало доказати. □

Јакобијев идентитет нам говори много ствари. У неком смислу се може сматрати уопштенијом верзијом Ојлерове теореме. Заиста, када уместо x и z убацимо $x^{\frac{3}{2}}$ и $-x^{\frac{1}{2}}$, добијамо управо Ојлерову теорему о пентагоналним бројевима. Можемо и да уместо x и z убацимо $x^{\frac{1}{2}}$ и $zx^{\frac{1}{2}}$. Тада имамо

$$(1+z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)(1+x^n z)(1+x^n z^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty}(z^m + z^{-m-1})x^{\frac{m(m+1)}{2}}. \qquad (4.21)$$

Десну страну можемо представити као

$$\sum_{m=0}^{\infty}(z^m + z^{-m-1})x^{\frac{m(m+1)}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m(1+z^{-1})(z^{-2m} - z^{-2m-1} + \ldots + 1)x^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Поделимо сада обе стране у (4.21) са $1 + z^{-1}$ и пустимо да $z \to -1$.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{\frac{m(m+1)}{2}}. \qquad (4.22)$$

У некој литератури се (4.22) такође назива Јакобијевим идентитетом троструког производа.

4.4 Рекурентна веза низа $p(n)$

Као што смо на почетку рада нагласили, није могуће изразити $p(n)$ једноставно у директној функцији од n. Но као директну последицу теореме 4.2 можемо доказати следеће.

Последица 1. Низ $p(n)$ задовољава рекурентну везу

$$p(n) = \sum_{j \geq 1} (-1)^{j+1} \left(p\left(n - \frac{j(3j+1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{j(3j-1)}{2}\right)\right). \tag{4.23}$$

Из Ојлерове теореме имамо да је

$$F(x) \cdot \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i x^{\frac{3i^2+i}{2}} \right) = 1, \tag{4.24}$$

где је $F(x)$ генераторна функција низа $p(n)$. Због дефиниције, у функцији генератрисе низа $p(n)$, коефицијент уз x^n износи $p(n)$. Изједначавањем коефицијената уз одговарајуће степене добијамо да је

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots \tag{4.25}$$

што је и требало доказати.

Треба нагласити да је израз на десној страни коначан, јер ће за довољно велико j, n бити мање од $\dfrac{j(3j \pm 1)}{2}$ (ти чланови су нула јер је број природних партиција негативног броја је 0).

5

Аритметичка својства $p(n)$

Рамануџан је дошао до занимљивих резултата када се бавио партицијама. Установио је да је за свако $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} p(5k+4) &\equiv 0 \pmod 5 \\ p(7k+5) &\equiv 0 \pmod 7 \\ p(11k+6) &\equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

Такође, Рамануџан је наслутио да не постоји ниједан прост број p изузев 5, 7 и 11, за који постоји идентитет облика $p(pk+l) \equiv 0 \pmod p$. Ово тврђење је доказано 2003, у раду [1].

Докажимо сада први идентитет. Приметимо најпре да је $(1-x)^5 \equiv 1-x^5 \pmod 5$ (када пишемо конгруенције у оквиру полинома, подразумевамо да се упоређују коефицијенти уз одговарајуће степене, по модулу 5). Када развијемо бином, коефицијент уз x^k ће бити $(-1)^k\binom{5}{k}$. Користећи се чињеницом да је биномни коефицијент $\binom{p}{k}$, где је p прост, а $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, дељив са p, одмах добијамо да је тврђење тачно. Одавде следи

$$\frac{1}{F(x)^5} \equiv \frac{1}{F(x^5)} \pmod 5, \tag{5.1}$$

где је $F(x)$ генераторна функција низа $p(n)$. Управо због тога имамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = F(x) = \frac{F(x)^5}{F(x)^4} = \frac{F(x)^5}{F(x)F(x)^3} \equiv \frac{F(x^5)}{F(x)F(x)^3} \pmod 5. \tag{5.2}$$

Одраније нам је познато да је

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i x^{\frac{3i^2+i}{2}} \tag{5.3}$$

из теореме 4.2, а такође је

$$\frac{1}{F(x)^3} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) x^{\frac{m(m+1)}{2}} \tag{5.4}$$

из (4.22). Приметимо да експоненти x из (5.3) и (5.4) не покривају све вредности по модулу 5, већ је

$$\begin{aligned} \frac{3i^2+i}{2} &\equiv 0,1,2 \pmod 5, \\ \frac{m(m+1)}{2} &\equiv 0,1,3 \pmod 5. \end{aligned}$$

Но $\dfrac{m(m+1)}{2} \equiv 3 \pmod 5$ акко је $m \equiv 2 \pmod 5$, а тада је $2m+1 \equiv 0 \pmod 5$, па такви чланови не утичу на резултат. Када избацимо ту могућност, видимо да никад не можемо добити члан у производу (5.3) и (5.4) чији ће експонент давати остатак 4 при дељењу са 5. Како је

$$F(x^5) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{5n}} = (1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x^{10}+x^{20}+\dots)\dots = \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} x^{5ki}, \tag{5.5}$$

онда $F(x^5)$ садржи само оне чланове чији су експоненти дељиви са 5. У комбинацији са закључком из претходног пасуса, видимо да у (5.2) са десне стране није могуће добити чланове чији експонент даје остатак 4 при дељењу 5. Дакле, коефицијенти уз x^{5k+4} са десне стране су нула, тј.

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(5k+4) x^{5k+4} \equiv 0 \pmod 5, \tag{5.6}$$

што је и требало доказати.

Потпуно аналогно смо могли да докажемо конгруенцију и по модулу 7 и по модулу 11, с тим што је мало већи посао по модулу 11, али је поступак готово исти.

6

Закључак

Партиције су, упркос својој наизглед једноставној дефиницији, изразито тешка област за истраживање и данас се сматрају једном од слабије истражених грана математике. Примену проналазе у испитивању симетричних полинома, физици, па чак и у генетици.

Видели смо да је могуће доказати неке веома лепе алгебарске идентитете када их доведемо у везу с партицијама, а и саме идеје доказа су можда лепше од крајњег резултата. Одлика партиција јесте управо та лепота у доказима и прављењу бијекција између различитих типова партиција, које повезују наизглед потпуно различите и насумичне рестрикције над типом партиција.

***

На крају бих желео да захвалим свом ментору Ђорђу Кртинићу, како на помоћи коју ми је пружио приликом израде овог рада, тако и на предавањима анализе са алгебром у претходне две године, током којих ме је инспирисао да се више бавим математиком.

Литература

[1] S. Ahlgren, M. Boylan, *Artithmetic properties of the partition function*, Springer-Verlag, University of Illinois, USA, 2013.

[2] G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press publishing, United Kingdom, 1976.

[3] G. E. Andrews, K. Errikson, *Integer partitions*, Cambridge University Press publishing, United Kingdom, 2004.

[4] M. D. Hirschhorn, *Simple proofs of Ramanujan's partitions congruences*, East China Normal University, China, 2013.

[5] П. Младеновић, *Комбинаторика*, 4. издање, ДМС, Београд, 2013.

[6] Y. Wang, *Partiton Congruences in the Spirit of Ramanujan*, University of Electronic Science and Technology of China, China, 2013.

[7] https://imomath.com/srb/dodatne/particije_ddj.pdf