Математичка гимназија Београд

МАТУРСКИ РАД

-из физике-

ФАЈНМАНОВА ТАБЛА ЗА ДАМЕ

Ученик: Ментор:

Павле Пакаловић IVд проф. Иван Станић

Београд, јун 2021.

Садржај

Апстракт

Фајнманова табла за даме је математички модел квантне механике који још није комплетан, али у теорији би могао да објасни сваку физичку појаву осим језгра атома и гравитације. Циљ рада је да се објасни како функционише основни модел и да се покажу резултати које он даје. Главни резултат је централни проблем: рачунање вероватноће да се електрон нађе у датој тачки, ако је емитован из координатног почетка. Сви проблеми који су обрађени у раду имају своју физичку интерпретацију, а задати су као математичке теореме. Основни модел се у сваком поглављу надограђује и усложњава тако да све прецизније описује реалне физичке ситуације. Последњи кораци који су потребни да овај модел у потпуности објасни дводимензионалну квантну електродинамику су још увек отворени проблеми.

1. Историја модела

Ричард Фајнман је један од твораца савремене квантне електродинамике. Бавио се решавањем проблема квантне теорије поља, квантне електродинамике и теорије гравитације, а од посебног значаја за овај рад је његов допринос физици елементарних честица. Фајнман је у овој области познат творац схема за прказивање математичких израза који описују понашање субатомских честица – Фајнманових дијаграма. Његова генијалност је у томе што је успео да интеракције субатомских честица, које су тешке за интуитивно разумевање, визуализује на једноставан начин.

Осам година пре открића ових схема, Фајнман је радио на једном мање познатом моделу и успео је да нешто јако комплексно као што је кретање електрона визуализује као кретање жетона на табли за даме. На тако једноставној основи, он формулише низ математичких теорема које имају своју реалну интерпретацију у квантној механици. Значај оваквог математичког моделирања је у томе што када се тежак проблем и његова поставка дефинишу математички, јасно се види приступ решавању проблема, иако сам математички проблем може бити јако тежак.

Иако је модел осмишљен 1940-их, Фајнман није објавио резултате све до средине 1960-их у раду чији је коаутор био Алберт Хибс који је био амерички математичар и физичар познат по објашњавању комплексне науке преко једноставних појмова. Међутим, Фајман није желео да тада објави модел, већ само његове резултате, зато што није пронашао генерализацију за чет製ородимензионални простор-време. То откриће би комплетирало модел и могло би да објасни све осим нуклеарних појава и гравитације, али је то још увек отворен проблем.

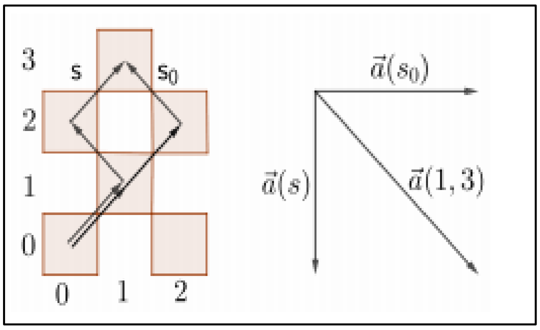
2. Основни модел

На бесконачној дводимензионалној табли за даме, жетон се креће дијагонално. Нека је y оса усмерена нагоре, x оса надесно и координатни почетак је у почетном положају жетона. Дакле, жетон почиње кретање са поља (0, 0) и направи потез горе-десно, на поље (1, 1). У сваком следећем потезу прелази на суседно поље које се налази горе-лево или горе-десно од њега. Свакој путањи жетона s се додељује вектор $\vec{a}$(s) на следећи начин: На почетку вектор има модул 1 и правац и смер y осе. Докле год се жетон креће у истом правцу, вектор се не мења, а када промени правац, вектор се ротира за 90° у смеру казаљке на сату. На крају кретања, вектор се подели са $2^{(y-1)/2}$, где је y укупан број потеза.

Дефиниција. Нека је $\vec{a}$(x, y):=$\sum_s \vec{a}(s)$, где се сумира по свим путањама од (0, 0) до (x, y). Ако нема таквих путања, $\vec{a}$(x, y):=0.

На примеру на слици 2.1., $\vec{a}$(1,3) = (0, -1/2) + (1/2, 0) = (1/2, -1/2).

Дефиниција. Вероватноћа да се електрон нађе на пољу (x, y), ако је емитован с поља (0, 0) је P(x, y):=$|\vec{a}(x,y)|^2$.



сл. 2.1.

(*) Жетон представља електрон емитован из координатног почетка. Вредности y могу се посматрати као фиксне, а поља (-y, y), (-y+2, y), ... , (y, y) као сви могући исходи неког експеримента. На пример, можемо да замислимо да на y хоризонталу постављамо фотоплочу која детектује електрон и посматрамо место на плочи где ће елетрон доћи. Резултати овог ексерпимента могу бити вредности (-y, y), (-y+2, y), ... , (y, y), а може се десити да је електрон апсорбован пре него што стигне на плочу. Када касније докажемо нека својства овог модела, може се уочити прави смисао x и y осе.

2.1 Опажања за мале вредности y. Посматра се шта се дешава за мале вредности y, чему је једнако P(x, y) и $\vec{a}$(x, y) за свако x.

За мале y је једноставно израчунати P(x, y) и $\vec{a}$(x, y) зато што је број путања мали и вредности се могу рачунати ручно. Пре рачунања вредности, могу се донети неки закључци. Може се приметити да се жетон креће у одређеним границама из којих не може изаћи и да је вероватноћа његовог налажења ван њих једнака 0. Његово кретање је ограничено правама y=x и y=2-x. За x<-y+1 и x>y, P(x, y)=0.

Посматрамо поља у дозвољеним границама. Ако се табла обоји као табла за даме, где је поље (0, 0) црно, видимо да жетон може да се креће само по црним пољима јер се креће дијагонално, а кренуо је са црног. Дакле, број путања до белих поља је 0. То су поља за која важи да су x и y различите парности. $x + y \equiv 1\ (mod\ 2) \Rightarrow$ P(x, y)=0. Из начина на који је дефинисан вектор $\vec{a}$(x, y), није очигледно да важи обрнут смер, али постоји генерална формула за вероватноћу P(x, y) коју ћемо извести касније, из које се види да важи $x + y \equiv 1\ (mod\ 2) \Leftrightarrow$ P(x, y)=0, за -y< $x \leq$ y.

Да би жетон дошао на поље (x, y) то мора да уради са поља (x-1, y-1) или са поља (x+1, y-1). Онда је број путања s до поља (x, y) једнак збиру броја путања до (x-1, y-1) и (x+1, y-1). Приметимо да се овако формира Паскалов троугао, па је број путања до (x, y) облика $\binom{n}{k}$ где је n=y-1, а $k \in$ {0, …, n}.

У табели 2.1. приказане су вредности вектора $\vec{a}$(x, y). У табели 2.2. приказане су вредности P(x, y).

4	$(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$		$(0, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$		$(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{2}{2\sqrt{2}})$		$(0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$
3		$(\frac{1}{2}, 0)$		$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$		$(0, \frac{1}{2})$	
2			$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$		$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$		
1				(0, 1)			
	-2	-1	0	1	2	3	4

Табела 2.1.

4	1/8		1/8		5/8		1/8
3		1/4		1/2		1/4	
2			1/2		1/2		
1				1			
	-2	-1	0	1	2	3	4

Табела 2.2.

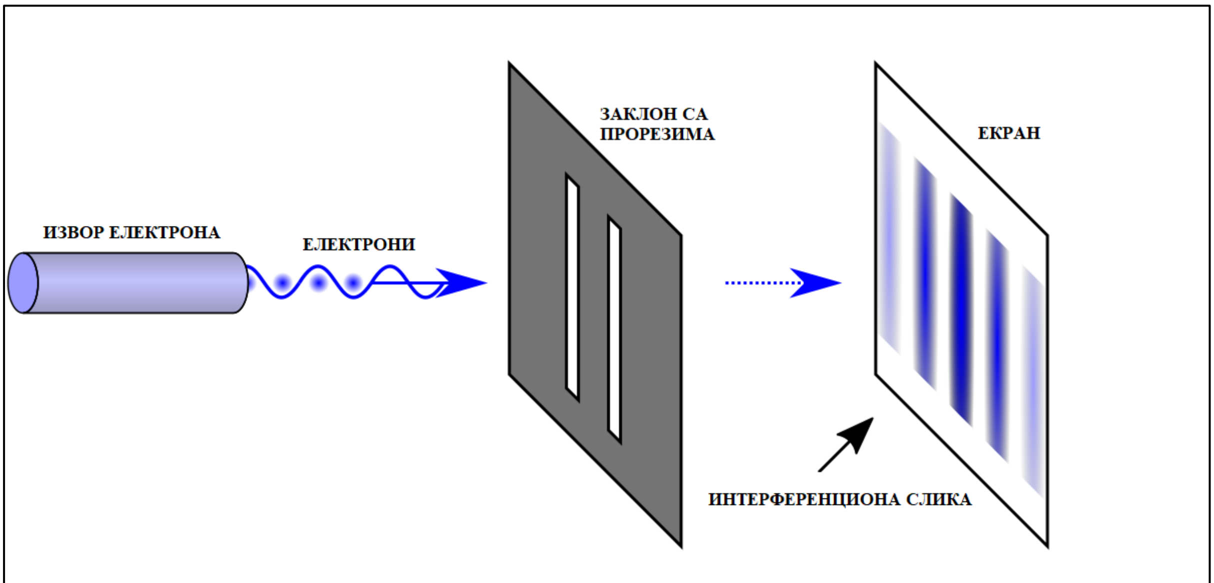
Примећујемо да је за y дате у табели, $\sum_{x\in Z} P(x,\ y) = 1$, што ћемо касније показати да важи за свако y.

2.2. Експеримент са двоструким прорезом. Установљено је да као резултат експеримента (*) може да се деси да електрон буде ,,апсорбован“ и да не стигне на плочу. Дефинишимо вероватноћу да се електрон нађе на пољу (x, y), ако га апсорбује поље (x’, y’) на аналоган начин на који се дефинише P(x, y), с тим што се сумира по свим путањама s које не пролазе кроз (x’, y’). Означимо ову вероватноћу као P(x, y | заобилази x’, y’). У смислу вероватноће можемо је посматрати као условну вероватноћу.

Онда би требало да важи следеће: P(x, y) = P(x, y | заобилази 0, 2) + P(x, y | заобилази 2, 2) зато што свака путања садржи или поље (0, 2) или поље (2, 2). Такође, требало би да важи P(x, y) ≥ P(x, y | заобилази x’, y’). Али, на контрапримеру се може видети да ни једна од тих релација не важи. P(2, 4) = 5/8 ≠ 1/8 + 1/4 = P(x, y | заобилази 0, 2)+ P(x, y | заобилази 2, 2). P(0, 4) = 1/8 < 1/4 = P(0, 4 | заобилази 2, 2).

Наравно, овај резултат није у контрадикцији ни са каквим законима вероватноће зато што P нисмо дефинисали као неку вероватноћу, већ као $|\vec{a}(\mathrm{x},\mathrm{y})|^2$, а придодали смо му значење вероватноће. Да ли је онда овај модел погрешан, зато што његова физичка интерпретација контрадикторна? Заправо, ова парадоксална појава се дешава у природи и отворила је врата квантне механике. То још више доприноси валидности модела, зато што његови резултати имају неочигледне корелације са резултататима квантне механике. Наш конкретан проблем са вероватноћама подсећа управо на познати експеримент са двоструким прорезом.

Овај експеримент је први пут извео Томас Јанг 1801. са светлошћу, а 1927. године је показано да се и електрони понашају на исти начин. Поставка експеримента је приказана на слици 2.2. и састоји се од извора који испаљује електроне који потом долазе до заклона са двоструким прорезом. Када сноп наиђе на отворе, сваки отвор се понаша као извор сферног таласа, по Хајгенсовом принципу. Електрони на крају падају на екран. На екрану се ствара интерференциона слика и резултат показује таласну природу електрона. Интерефенциона слика се састоји из интерференционих максимума између којих су минимуми интензитета 0. Тако се и између свака два поља са вероватноћом већом од 0 налази поље за које је P(x, y)=0, за x у границама -y$< x \leq$ y.



сл. 2.2.

Међутим, ако се на отворе поставе детектори, примећује се да сваки електрон пролази или кроз један или кроз други пролаз, а не кроз оба истовремено или на неки други начин. Ово је аналогија са P(x, y | заобилази 0, 2) или P(x, y | заобилази 2, 2), где на поља (0, 2) и (2, 2) можемо гледати као на два отвора. Касније ћемо видети да y оса заправо има физички смисао времена. Зато нас занима шта се дешава за велико y (како изгледа слика на екрану након много времена). За велико y се испостави да у функцији P(x, y | заобилази 0, 2) + P(x, y | заобилази 2, 2) постоје 2 максимума који доминирају.То се поклапа са резултатима експеримента где се у овом случају добију две траке са занемарљивим утицајем интерференције.

2.3. Диракова једначина. Вектор $\vec{a}$(x, y) може да се запише као $\vec{a}(\mathrm{a}_1(\mathrm{x,y}), \mathrm{a}_2(\mathrm{x,y}))$. Циљ је да нађемо $\vec{a}$(x, y) преко поља са којих је електрон дошао на (x, y), односно да нађемо везу између $\mathrm{a}_1(\mathrm{x,y}), \mathrm{a}_2(\mathrm{x,y})$ и $\mathrm{a}_1(\mathrm{x} \pm 1, \mathrm{y}-1)$, $\mathrm{a}_2(\mathrm{x} \pm 1, \mathrm{y}-1)$.

Изведимо формулу за $\mathrm{a}_2(\mathrm{x,y})$, формула за $\mathrm{a}_1(\mathrm{x,y})$ се изводи аналогно. Нека је s било која путања од (0, 0) до (x, y). Нека је T(s) број окрета (промена праваца) у s. Приметимо да ако је T(s) непарно, $\vec{a}$(s) ротира непаран број пута и координата a_2(s)=0. Дакле, $\mathrm{a}_2(\mathrm{s}) \neq 0 \Leftrightarrow$T(s) је парно и аналогно, $\mathrm{a}_1(\mathrm{s}) \neq 0 \Leftrightarrow$ T(s) је непарно. Онда је $\mathrm{a}_2(\mathrm{s}) = \sum_{s|T(s)\equiv 0 (mod\ 2)} \mathrm{a}_2(\mathrm{s})$. Путање где је T(s) непарно никако не доприносе вредности $\mathrm{a}_2(\mathrm{s})$. До (x, y) је електрон дошао или са (x-1, y-1) или са (x+1, y-1). Како је први потез усмерен горе-десно, а има паран број потеза, следи да је последњи потез усмерен горе-десно. Значи да $\mathrm{a}_2(\mathrm{s})$ зависи само од $\mathrm{a}_1(\mathrm{x}-1, \mathrm{y}-1)$ и $\mathrm{a}_2(\mathrm{x}-1, \mathrm{y}-1)$. Нека је s’ путања s без последњег потеза. Ако су смерови последњих потеза у s и s’ исти, вектор $\vec{a}$(s) и $\vec{a}$(s’) имају исти смер, само различите модуле, па је $\vec{a}$(s)= $\vec{a}$(s’)/$\sqrt{2}$=$(\mathrm{a}_1(\mathrm{s}'), \mathrm{a}_2(\mathrm{s}'))/\sqrt{2}$. Ако то није случај $\vec{a}$(s)= $(\mathrm{a}_2(\mathrm{s}'), -\mathrm{a}_1(\mathrm{s}'))/\sqrt{2}$. Коначно, $\mathrm{a}_2(\mathrm{s}) = (\sum \mathrm{a}_2(\mathrm{s}') - \sum \mathrm{a}_1(\mathrm{s}')) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{a}_2(\mathrm{x}-1, \mathrm{y}-1) - \mathrm{a}_1(\mathrm{x}-1, \mathrm{y}-1))$.

$$\mathrm{a}_2(\mathrm{x,y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{a}_2(\mathrm{x}-1, \mathrm{y}-1) - \mathrm{a}_1(\mathrm{x}-1, \mathrm{y}-1))$$

$$\mathrm{a}_1(\mathrm{x,y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{a}_2(\mathrm{x}+1, \mathrm{y}-1) + \mathrm{a}_1(\mathrm{x}+1, \mathrm{y}-1))$$

Проблем који је задат на почетку није оригинална математичка теорема коју је Фајнман поставио као везу са Дираковом једначином, али је дат због једноставности. Зато његов резултат само подсећа на резултат Диракове једначине, у смислу да таласну функцију записујемо преко две функције ψ_1 и ψ_2 са реалним вредностима које зависе од x као једне просторне димензије и t као временске димензије. Већ смо констатовали да у Фајнмановом моделу y има смисао временске координате, а то ћемо ускоро и показати. Међутим, у раду о путним интегралима који су Фајнман и Хибс објавили 1960-их година, налази се резултат овог модела који се у потпуности поклапа са Дираковим.

2.4. Одржање вероватноће. На примерима за мало y се рачуном добија да важи $\sum_{x\in Z} P(x,\ y) = 1$. Помоћу „Диракове једначине“ се може показати да то важи за свако y, индукцијом по $y \in N$.

<u>База индукције</u>: За y=1 је очигледно $\sum_{x\in Z} P(x,\ 1) = 1$ зато што је P(1, 1)=0 и P(x, 1)=0 за све остале x.

<u>Индуктивни корак</u>: Претпоставимо да важи $\sum_{x\in Z} P(x,\ y-1) = 1$.

x пролази кроз цео Z $\Rightarrow$ $\sum_{x\in Z} P(x,\ y-1) = \sum_{x\in Z} P(x+1,\ y-1) = \sum_{x\in Z} P(x-1,\ y-1)$ =1 $\wedge \sum_{x\in Z} a_1(x+1, y-1)\, a_2(x+1, y-1) = \sum_{x\in Z} a_1(x-1, y-1)\, a_2(x-1, y-1)$

$$\sum_{x\in Z} P(x,y) = \sum_{x\in Z}(a_1^2(x,y) + a_2^2(x,y)) = \sum_{x\in Z} a_1^2(x,y) + \sum_{x\in Z} a_2^2(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{x\in Z} a_1^2(x+1,y-1) + \frac{1}{2}\sum_{x\in Z} a_2^2(x+1,y-1) + \sum_{x\in Z} a_1(x+1,y-1)\, a_2(x+1,y-1)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{x\in Z} a_1^2(x-1,y-1) + \frac{1}{2}\sum_{x\in Z} a_2^2(x-1,y-1) - \sum_{x\in Z} a_1(x-1,y-1)\, a_2(x-1,y-1)$$

$$= \frac{\sum_{x\in Z}(a_1^2(x+1,y-1) + a_2^2(x+1,y-1)) + \sum_{x\in Z}(a_1^2(x-1,y-1) + a_2^2(x-1,y-1))}{2}$$

По индуктивној хипотези, свака од ових сума је једнака 1$\Rightarrow \sum_{x\in Z} P(x,\ y) = 1$.

Сада, ово можемо да тумачимо као: За фиксно y, вероватноћа налажења електрона на x оси је 1, односно, електрон се сигурно налази негде на x оси. Ово је у ствари еквивалентно томе да се у једном тренутку електрон сигурно налази негде у простору. У нашем случају је простор једнодимензионалан, онда y координата има физички смисао времена.

2.5. Симетрија. Како су повезане вредности $\mathrm{a}_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$ за $\mathrm{x} \geq 0$ и за x<0 (за фиксно y)? А како вредности $\mathrm{a}_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{a}_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$?

Свака путања s се може пресликати у односу на y осу. Ако путања s води до (x, y), онда њена слика води до (-x, y). Зато је $\mathrm{a}_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{a}_1(-\mathrm{x},\mathrm{y})$. Користећи „Диракову једначину“ може се извести:

$$\mathrm{a}_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{a}_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{2}\mathrm{a}_1(\mathrm{x}-1,\mathrm{y}+1) = \sqrt{2}\mathrm{a}_1(1-x,y+1) = \mathrm{a}_1(2-\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{a}_2(2-\mathrm{x},\mathrm{y}).$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{a}_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{a}_1(-\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \mathrm{a}_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{a}_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{a}_1(2-\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{a}_2(2-\mathrm{x},\mathrm{y})\end{gathered}}$$

2.6. Општа формула вероватноће.

1) За y>|x|:

$$\boxed{\begin{gathered} a_1(x,y) = 2^{\frac{1-y}{2}} \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor} (-1)^r \binom{\frac{y+x-2}{2}}{r} \binom{\frac{y-x-2}{2}}{r} \\ a_2(x,y) = 2^{\frac{1-y}{2}} \sum_{r=1}^{\left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor} (-1)^r \binom{\frac{y+x-2}{2}}{r} \binom{\frac{y-x-2}{2}}{r-1} \end{gathered}} \qquad \textbf{(**)}$$

2) За y=x>0: $a_1(x,y) = 0,\ a_2(x,y) = 2^{\frac{1-y}{2}}$.

3) За y=x<0 || 0<y<|x|: $a_1(x,y) = 0,\ a_2(x,y) = 0$.

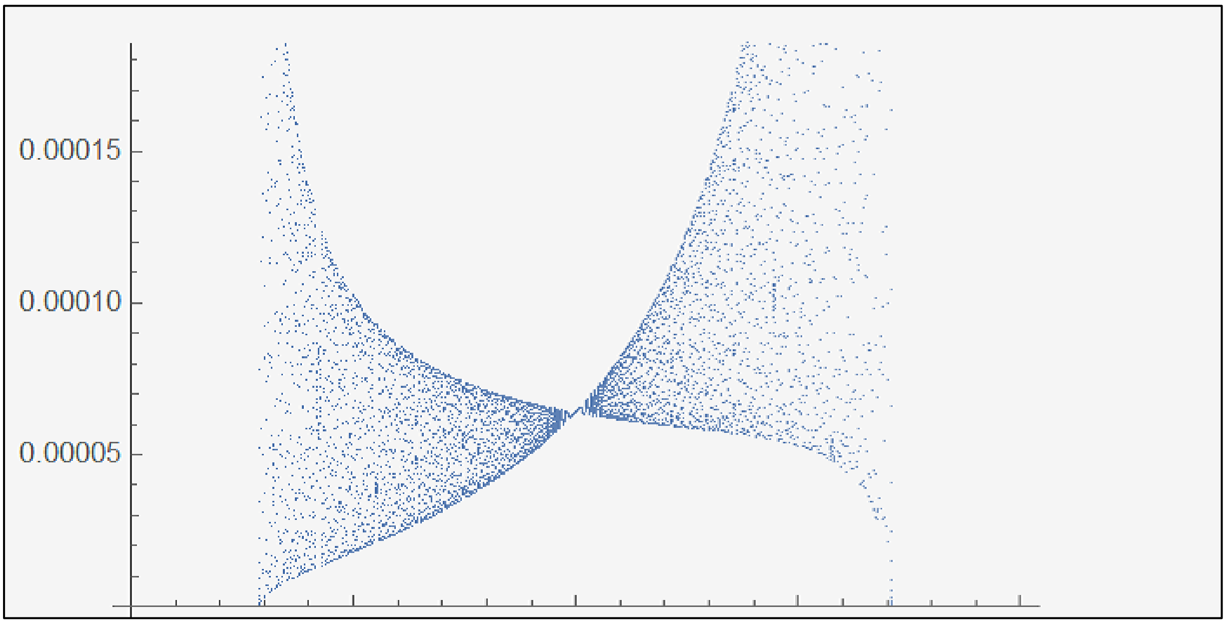
Случајеви (2) и (3) су тривијални, докажимо формулу за случај (1).

Тражимо $a_1(x,y)$. Нека је s путања од (0,0) до (x, y) са непарним бројем окрета. Показали смо да путање са парним бројем окрета не доприносе вредности $a_1(x,y)$. Нека су L и D бројеви потеза горе-лево и горе-десно, редом. Важи D- L=x и D+ L=y. Одатле је D=(x+y)/2 и L=(y-x)/2. Укупан број окрета је 2r+1, $r \in N$. (r је строго веће од 0, иначе је то случај 2). Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ бројеви узастопних горе-десно потеза пре првог, трећег, ... , последњег окрета, редом. Слично, $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$ су бројеви узастопних горе-лево потеза након првог, трећег, ... , последњег потеза. Онда је:

$$D = x_1 + x_2 + \ldots + x_{r+1} \text{ и } L = y_1, + y_2, + \cdots + y_{r+1}.$$

Једначина $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ има $\binom{n-1}{k-1}$ решења у N. Како су x_i и y_i природни бројеви, горње једначине имају, редом, $\binom{D-1}{r}$ и $\binom{L-1}{r}$ решења. Када се убаце вредности D=(x+y)/2 и L=(y-x)/2 и сумира по r, водећи рачуна о знаку, добија се тражена формула. За $a_2(x,y)$ се изводи аналогно.

На слици 2.3. предсављен је график P(x, y) за y=10000, са изостављеним великим вредностима P(x, y) због прегледности. Програм који рачуна и дискретно скицира функцију P(x, y) за фиксно y је рађен у програму Wolfram Mathematica. Код је дат у поглављу **Кодови**, као и код рађен у C++ који рачуна P(x, y) помоћу методе Backtracking.



сл. 2.3.

3. Спин

У основном моделу електрон нема никаква физичка својства која иначе испољава у природи. Основни модел се надограђује тако што се у математички модел додају неки услови, који имају своју физичку интерпретацију. У овом случају је то спин електрона.

Приликом решавања претходних проблема, било је корисно да раздвојимо путање на оне са парним и непарним бројем окрета. За оне са парним бројем окрета важи да је последњи потез горе-десно (јер је први био горе-десно), а за оне са непарним, горе-лево. Тако можемо раздвојити електроне у две класе: на левe и десне. Ово се поклапа са важним својством електрона које се зове спин. Важно је нагласити да у просторима са 3 или више димензија, којима се овај рад не бави, лево и десно немају значења смера. Због лакше визуализације, ова стања се често замишљају као смер ротације електрона око неке осе која је иста за све електроне, али се спин не може објаснити преко појмова класичне механике.

Дефиниција. Нека је $\vec{a}$(x, y,+):=$\sum_s \vec{a}(s)$, где се сумира по свим путањама од (0, 0) до (x, y) које почињу и завршавају се потезом горе-десно. Аналогно се дефинише $\vec{a}$(x, y, -), где се сумира по свим путањама које почињу потезом горе-десно, а завршавају се потезом горе-лево.

Дефиниција. Вероватноћа да се десни електрон нађе на пољу (x, y), ако је емитован с поља (0, 0) је P(x, y,+):=$|\vec{a}(\mathrm{x,y,+})|^2$. Вероватноћа да се леви електрон нађе на пољу (x, y), ако је емитован с поља (0, 0) је P(x, y,-):=$|\vec{a}(\mathrm{x,y,-})|^2$.

3.1. Веза нових величина са онима из основног модела. За путање s од (0,0) до (x,y) са парним бројем потеза је $\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{s})$=$2^{\frac{1-y}{2}}(0,\pm 1)$, а са непарним је $\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{s})$=$2^{\frac{1-y}{2}}(\pm 1,0)$. Зато је:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{a}(\mathrm{x, y,+})=(0, \mathrm{a_2(x,y)})\\ \vec{a}(\mathrm{x, y,-})=(\mathrm{a_1(x,y)}, 0)\end{gathered}}$$

Одатле је P(x, y)=$|\vec{a}(\mathrm{x,y,+})+\vec{a}(\mathrm{x,y,-})|^2$=$\mathrm{a_1^2(x,y)+a_2^2(x,y)}$ = P(x, y,+) + P(x, y,-).

$$\boxed{\mathrm{P(x, y) = P(x, y,+) + P(x, y,-)}}$$

3.2. Нека својства левих електрона. Која је вероватноћа налажења левог електрона на линији y, ако ту вероватноћу дефинишемо као $P(y,-)=\sum_{x\in Z} P(x,y,-)$, за фиксно y? За које y је та вероватноћа највећа и колика је? Да би се ово одредило потребни су нам сви претходни резултати и следећа лема:

Лема 3.1. За 0<y'<y важи следећи идентитет:

$$a_1(x,y)=\sum_{x'\in Z}(a_2(x',y')\,a_1(x-x'+1,y-y'+1)+a_1(x',y')a_2(x-x'+1,y-y'+1))$$

Доказ.

Нека је y' фиксно и мање од y и нека је s путања од (0,0) до (x, y) и поље (x', y') поље где s пресеца праву y=y'. Назовимо путању s_1 део путање s од (0, 0) до (x', y'), а s_2 део путање чије је почетно поље пресек путање s и праве y=y'-1 и крајње поље (x, y). Транслирајмо s_2 тако да почиње од (0,0).

Онда је $a_1(s) = a_1(s_1)a_2(s_2)$, ако је потез до (x', y') горе-лево и $a_1(s) = a_2(s_1)a_1(s_2)$, ако је потез до (x', y') горе-десно. Дакле,

$$a_1(x,y) = \sum_{s} a_1(s) = \sum_{x'} \sum_{\text{s пролази кроз } (x',y')} a_1(s) = \sum_{x'} \Big(\sum_{\text{потез горе}-\text{ лево}} a_1(s_1)a_2(s_2) + \sum_{\text{потез горе}-\text{десно}} a_2(s_1)a_1(s_2) \Big)$$

што је једнако десној страни једнакости коју је дребало доказати.

Важи и сличан идентитет за $a_2(x,y)$:

$a_2(x,y) = \sum_{x' \in Z} (a_2(x',y')\, a_2(x - x' + 1, y - y' + 1) - a_1(x',y')a_1(x - x' + 1, y - y' + 1))$ који се доказује аналогно.

Такође, директно из дела 2.6. следи:

Последица 2.6.

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1(0,4n+2) = \frac{(-1)^n}{2^{(4n+1)/2}}\binom{2n}{n}, \; a_2(0,4n+2) = 0 \\[2ex] a_1(0,4n) = 0, \; a_2(0,4n) = \frac{(-1)^n}{2^{(4n-1)/2}}\binom{2n-1}{n} \end{array}}$$

Сада, имамо све што је потребно да кренемо са извођењем формуле за $P(y,-)$. Нека је $S_1(y) = \sum_x a_1^2(x,y)$, $S_2(y) = \sum_x a_2^2(x,y)$ и $S_{12}(y) = \sum_x a_1(x,y)a_2(x,y)$.

(2.4.) $\Rightarrow S_1(y) + S_2(y) = 1$, за свако $y \geq 1$.

(2.3.) $\wedge$ (2.5.) $\wedge$ Лема 3.1 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_x (a_1(x,y)(a_2(x,y) - a_1(x,y)) + a_2(x,y)(a_2(x,y) + a_1(x,y))) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-S_1(y) + S_2(y) + 2S_{12}(y)) = a_1(0,2y)$.

(2.4.) $\Rightarrow S_1(y+1) - S_2(y+1) = 2S_{12}(y)$. Дакле, $S_1(y+1) - S_2(y+1) =$

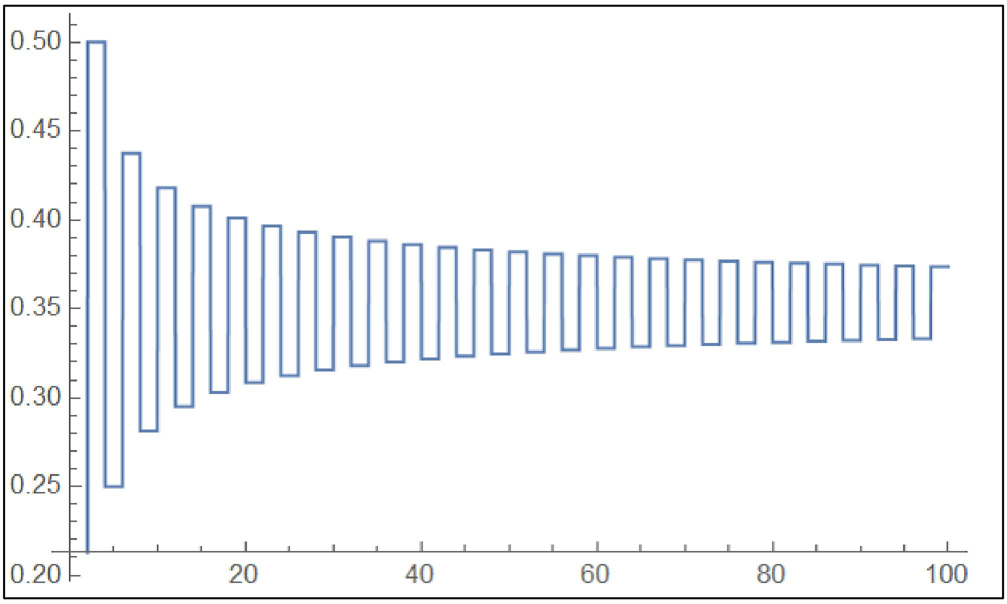
$= S_1(y) - S_2(y) + \sqrt{2}a_1(0,2y)$. Како је $S_1(y) + S_2(y) = 1 \Rightarrow$ рекурентна веза

$S_1(y+1) = S_1(y) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0,2y)$.

Последица 2.6. $\Rightarrow S_1(y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor y/2 \rfloor - 1} \frac{1}{(-4)^k}\binom{2k}{k}$.

(3.1.) $\Rightarrow P(y,-) = S_1(y)$. Коначно, добија се формула: $\boxed{P(y,-) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor y/2 \rfloor - 1} \frac{1}{(-4)^k}\binom{2k}{k}}$

$\frac{1}{(4)^k}\binom{2k}{k}$ опада и зато $P(y,-) < P(3,-)$, за свако у > 3. Ова функција вероватноће максимум достиже за $P(3,-) = P(2,-) = 1/2$. То се може видети и на графику ове функције који се налази на слици 3.1. Програм који рачуна и скицира функцију P(у, -) за у од 1 до 100 је рађен у програму Wolfram Mathematica. Код је дат у поглављу **Кодови**.



сл. 3.1.

На графику се види да $P(y,-)$ осцилује око неке вредности и како у расте, све јој се више приближава. Колико је $P(y,-)$ кад у→+∞? Из проширења биномне формуле на R

$(1+x)^r = \sum_0^\infty \binom{r}{k} x^k$, где је $\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$. Онда је, за $r = -1/2$, $\sum_{k=0}^\infty \binom{2k}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ за $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. За $x = -\frac{1}{4}$, следи да је $\lim_{y\to\infty} P(y,-) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. Маса

Поред спина, друго основно својство електрона је маса. Маса се може имплементирати у овај модел на следћи начин:

Дефиниција. Нека су ε и m реални бројеви већи од 0 и нека се зову <u>корак решетке</u> и <u>маса честице</u>, респективно. Свакој путањи жетона s се додељује вектор $\vec{a}(\mathrm{s}, m\varepsilon)$ на следећи начин: На почетку вектор има модул 1 и смер у осе. Докле год се жетон креће у истом смеру, вектор се не мења, а када промени смер, вектор се ротира за 90° у смеру казаљке на сату и помножи се са $m\varepsilon$. На крају кретања, вектор се подели са $(1+m^2\varepsilon^2)^{(y-1)/2}$, где је у укупан број потеза.

Све остале нове величине се дефинишу аналогно њиховим еквивалентима из основног модела са укљученим спином. Такође, види се да за $m\varepsilon = 1$, масени модел постаје исти као основни.

4.1. Безмасене и тешке честице. Чему је једнако $P(x, y, 0, +)$ и $P(x, y, \infty, +)$, за свако x и y?

Нека је t(s) број окрета у путањи s од (0,0) до (x,y). По дефиницији за $\vec{a}(\mathrm{s}, m\varepsilon)$, $\vec{a}(\mathrm{s}, m\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{t(s)} = 0$. Односно, $P(x, y, 0, +) = 1$, за x = y и $P(x, y, 0, +) = 0$, иначе.

$$P(x, y, \infty, +) = \lim_{m\varepsilon\to\infty} P(x, y, m\varepsilon, +)$$

По дефиницији, $\lim\limits_{m\varepsilon\to\infty} |\vec{a}(\mathrm{s}, m\varepsilon)| = \lim\limits_{m\varepsilon\to\infty} \frac{(m\varepsilon)^{\mathrm{t(s)}}}{(\sqrt{1+(m\varepsilon)^2})^{y-1}} = \lim\limits_{m\varepsilon\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+(m\varepsilon)^2})^{y-1-\mathrm{t(s)}}}$

Тај лимес је једнак 1 за $\mathrm{t(s)} = \mathrm{y} - 1$ и једнак 0, иначе. $\mathrm{t(s)} = \mathrm{y} - 1$ значи да се електрон у сваком потезу окрене. Онда је $P(x, y, \infty, +) = 1$ за x = 1 и непарно y, а $(x, y, \infty, +) = 0$, иначе.

4.2. Аналогне формуле.

Ове формуле се доказују слично као и у основном моделу, с тиме што се мора водити рачуна о начину на који је дефинисан $\vec{a}(\mathrm{s}, m\varepsilon)$.

Еквивалент Диракове једначине у моделу с масом је следећи:

$$\boxed{\begin{gathered}
a_1(x, y, m\varepsilon, -) = \frac{1}{\sqrt{1+(m\varepsilon)^2}}(m\varepsilon \mathrm{a}_2(\mathrm{x}+1, \mathrm{y}-1, m\varepsilon, +) + \mathrm{a}_1(\mathrm{x}+1, \mathrm{y}-1,\ m\varepsilon, -)) \\
a_2(x, y, m\varepsilon, +) = \frac{1}{\sqrt{1+(m\varepsilon)^2}}(\mathrm{a}_2(\mathrm{x}+1, \mathrm{y}-1, m\varepsilon, +) - m\varepsilon \mathrm{a}_1(\mathrm{x}+1, \mathrm{y}-1,\ m\varepsilon, -)) \\
a_2(x, y, m\varepsilon, -) = 0 \\
a_1(x, y, m\varepsilon, +) = 0
\end{gathered}}$$

У овом случају општа формула вероватноће за y>|x| има следећи облик:

$$a_1(x,y,m\varepsilon) = (1+(m\varepsilon)^2)^{\frac{1-y}{2}} \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{y}{2}\right\rfloor} (-1)^r \binom{\frac{y+x-2}{2}}{r} \binom{\frac{y-x-2}{2}}{r} (m\varepsilon)^{2r+1}$$

$$a_2(x,y,m\varepsilon) = (1+(m\varepsilon)^2)^{\frac{1-y}{2}} \sum_{r=1}^{\left\lfloor\frac{y}{2}\right\rfloor} (-1)^r \binom{\frac{y+x-2}{2}}{r} \binom{\frac{y-x-2}{2}}{r-1} (m\varepsilon)^{2r}$$

За y=x>0: $a_1(x,y,m\varepsilon) = 0$, $a_2(x,y,m\varepsilon) = (1+(m\varepsilon)^2)^{\frac{1-y}{2}}$.

За y=x<0 || 0<y<|x|: $a_1(x,y,m\varepsilon) = 0$, $a_2(x,y,m\varepsilon) = 0$.

Такође важи одржање вероватноће, односно: $\boxed{\sum_{x\in Z} P(x,\ y,m\varepsilon\ ) = 1.}$

5. Централни проблем

Са надоградњама основног модела, електрон сада посматрамо као масену честицу са спином $\pm 1/2$. У експериментима се мери вероватноћа да се у тачно одређеном тренутку y=y_0 елктрон налази у неком интервалу простора $[x_0, x_0 + \Delta x]$, а не у тачно одређеној вредности x. У овом проблему $x_0, \Delta x$ и y_0 нису цели бројеви, већ стварне дужине. Без умањења општости, нека је поље са ког је кренуо електрон црно. Ако сва поља имају димензије $\frac{1}{n}$x $\frac{1}{n}$, онда се дати интервал може апроксимирати групом црних поља $\left(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor\right)$, где за x и y важи $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$ и y=y_0. Да бисмо дужине могли да посматрамо као „непрекидне“, занима нас вероватноћа да се електрон нађе на пољу $\left(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor\right)$, у граничном случају када $n \to \infty$, у коме су димензије поља (квадратића) бесконачно мале. Нека електрон има масу $\frac{m}{n}$ $(\varepsilon \to 0)$. Централни проблем:

За свако x, y наћи $\lim_{n\to\infty} n\vec{a}(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor, \frac{m}{n}, -)$ и $\lim_{n\to\infty} n\vec{a}(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor, \frac{m}{n}, +)$.

Уведимо ознаке $x_n = 2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, y_n = 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor, A = \frac{x_n+y_n}{2}, B = \frac{y_n-x_n}{2}$. За решавање овог проблема ће бити потребни претходни резултати, као и леме које следе.

Лема 5.1. $\lim_{n\to\infty}(1+(\frac{m}{n})^2)^{(y_n-1)/2} = 1.$

Доказ.

$$1 < (1+(\frac{m}{n})^2)^{(y_n-1)/2} < (1+(\frac{m}{n})^2)^{\,ny} = \sqrt[n]{(1+(\frac{m}{n})^2)^{n^2 y}} \to \sqrt[n]{e^{ym^2}} \to 1.$$

По теореми о два полицајца, како је низ у средини ограничен са два низа чија је гранична вредност 1, следи да постоји лимес тог низа и да је $\lim_{n\to\infty}(1+(\frac{m}{n})^2)^{(y_n-1)/2} = 1$.

Лема 5.2. $\lim_{n\to\infty} n(-1)^r\binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}(\frac{m}{n})^{2r+1} = (-1)^r\frac{(\frac{x+y}{2})^r(\frac{y-x}{2})^r m^{2r+1}}{(r!)^2}.$

Доказ.

Јасно је да важи $n(-1)^r\binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}(\frac{m}{n})^{2r+1} = \frac{(A-1)(A-2)\ldots(A-r)(B-1)(B-2)\ldots(B-r)}{(r!)^2}\frac{m^{2r+1}}{n^{2r}}$. За свако k$\in \{1,\ldots,r\}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{A-k}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{A}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\left(\frac{x+y}{2}\right) + o(1) = \frac{x+y}{2}$. Аналогно је и $\lim_{n\to\infty}\frac{B-k}{n} = \frac{y-x}{2}$. Онда је:

$\lim_{n\to\infty} n(-1)^r\binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}(\frac{m}{n})^{2r+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(A-1)(A-2)\dots(A-r)(B-1)(B-2)\dots(B-r)}{(r!)^2}\frac{m^{2r+1}}{n^{2r}}$

$= (-1)^r \frac{(\frac{x+y}{2})^r(\frac{y-x}{2})^r m^{2r+1}}{(r!)^2}$, што је и требало доказати.

Лема 5.3. Ред $n\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}(\frac{m}{n})^{2r+1}$ апсолутно конвергира за свако $n \in N$.

Доказ.

За свако n је $\left|(-1)^r\binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^{2r+1}\right| < \left|(-1)^r \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^r\left(\frac{y-x}{2}\right)^r m^{2r+1}}{(r!)^2}\right|$ зато што је $\frac{A-k}{n} < \frac{A}{n} < \frac{x+y}{2}$ и $\frac{B-k}{n} < \frac{B}{n} < \frac{y-x}{2}$ за свако k$\in \{1, \dots, r\}$.

Онда имамо да је $n\sum_{r=0}^{\infty} |(-1)^r\binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}(\frac{m}{n})^{2r+1}| < \sum_{r=0}^{\infty} |(-1)^r \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^r\left(\frac{y-x}{2}\right)^r m^{2r+1}}{(r!)^2}|$

$= \sum_{r=0}^{\infty} m\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^r\left(\frac{y-x}{2}\right)^r m^{2r}}{(r!)^2} < \sum_{r=0}^{\infty} m\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^r\left(\frac{y-x}{2}\right)^r m^{2r}}{r!} = me^{\frac{y^2-x^2}{4}m^2} = const$. Како је низ растућ и мањи је од неке константне вредности, по теореми о монотоном и ограниченом низу, он конвергира.

Како ред $n\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^{2r+1}$ апсолутно конвергира за свако $n \in N$, следи да он конвергира за свако $n \in N$ (па и за $n = 1$) . Онда је:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^{2r+1} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0;\ r \text{ је парно}}^{\infty} \binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^{2r+1}\right) - \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0;\ r \text{ је непарно}}^{\infty} \binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^{2r+1}\right)$$

Лема 5.4. Нека је $(\{a_0(n)\},\{a_2(n)\}, \dots)$ низ ненегативних низова такав да $\lim_{n\to\infty} a_k(n) < b_k$ и $a_k(n) = b_k$ за свако k и n. $\lim_{n\to\infty}\sum_{к=0}^{\infty} a_k(n) = \sum_{к=0}^{\infty} b_k$=$b$.

Доказ.

$\sum_{к=0}^{\infty} a_k(n) < b$. Нека је $\varepsilon > 0$. Одаберимо довољно велико N такво да $\sum_{к=0}^{N} b_k > b - \varepsilon$. За свако 0$\leq k \leq N$ одаберимо $M_к$ тако да $\forall t \geq M_к$ важи да је $a_k(t) > b_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Онда за свако n које је веће од мах$(M_0, \dots, M_N)$ имамо да је $\sum_{к=0}^{\infty} a_k(n) > b - \varepsilon$. Коначно, $\lim_{n\to\infty}\sum_{к=0}^{\infty} a_k(n) = \sum_{к=0}^{\infty} b_k$=$b$.

Доказ главног проблема природно следи из ових лема.

У крајњем резултату ће се појављивати суме облика:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2} \text{ и } J_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k+1}}{(k!)(k+1)!}$$

Ово су познате суме које се зову Беселове функције прве врсте реда 0 и 1. Беселове функције прве врсте и реда α су решења Беселове диференцијалне једначине $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$. Универзална ознака за њих је $J_\alpha(\mathrm{x})$ и најзначајнији су случајеви када је ред α цео број или половина целог броја. Ове функције се појављују у решењима разних једначина у физици.

Сада, можемо кренути са доказом централног проблема: Лема 5.2. ⋀ Лема 5.4.⇒

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{r=0;\, r \text{ je парно}}^{\infty} \binom{A-1}{r}\binom{B-1}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^{2r+1} = \sum_{r=0;\, r \text{ je парно}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^r \left(\frac{y-x}{2}\right)^r m^{2r+1}}{(r!)^2}$$

Аналогна формула важи и за непарне r.

(4.2) ⋀ Лема 5.1. $\lim_{n\to\infty} n\vec{a}\left(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor, \frac{m}{n}, -\right) = \left(\sum_{r=0;\, r \text{ je парно}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^r\left(\frac{y-x}{2}\right)^r m^{2r+1}}{(r!)^2}\right) - \left(\sum_{r=0;\, r \text{ je непарно}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^r\left(\frac{y-x}{2}\right)^r m^{2r+1}}{(r!)^2}\right) = mJ_0\left(m\sqrt{y^2-x^2}\right)$. Слично се изводи и друга формула. Коначан резултат:

$$\lim_{n\to\infty} n\vec{a}\left(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor, \frac{m}{n}, -\right) = mJ_0\left(m\sqrt{y^2-x^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\vec{a}\left(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor, \frac{m}{n}, +\right) = -i\,\frac{(x+y)}{\sqrt{y^2-x^2}} mJ_1\left(m\sqrt{y^2-x^2}\right)$$

6. Закључак

У овом матурском раду је дат један математички модел Ричарда Фајнмана који обухвата низ тврђења и теорема, а резултати те математике се поклапају са резултатима који су већ откривени у физици. Користећи тај модел, могу се извести и нови резултати и објаснити разне појаве.

Треба напоменути да због једноставности, модел који је овде приказан није у потпуности исти као Фајнманов оригинални модел, па неки његови резултати само подсећају на резултате који су пре тога откривени. Као пример је дат експеримент са два прореза и Диракова једначина. Фајнман, у раду који је објавио, помоћу овог модела извео потпуно исти облик једначине који је и Дирак извео пар деценија раније, користећи скроз другачији приступ. Овакве везе доприносе валидности модела, али и додатно потврђују резултате добијене раније.

У овом раду се од основног модела, надограђујући га корак по корак, дошло до модела који представља кретање елктрона узимајући у обзир његова својства-масу и спин. Али, модел може да се још надогради, на пример, узимајући у разматрање како ради извор електрона, средину којом се крећу електрони или како на електроне утиче спољашње магнетно поље. Али модел до кога смо дошли у раду је довољан да пружи решење за битан проблем, а то је налажење вероватноће да се у одређеном тренутку електрон нађе у неком интервалу (једнодимензионалног) простора. А уз додатне надоградње може и решити неке конкретне проблеме, као што је рачунање процента светлости дате таласне дужине одбијене о стаклену плочицу дате дебљине, као и друге појаве, докле год немају везе са нуклеарном физиком или гравитацијом.

7. Кодови

7.1. C++ код. Овај програм помоћу методе Backtracking рачуна вредности P(x, y) за фиксно y које се уноси. Није много ефикасан, али ми је помогао у предвиђању неких резултата који су доказани у поглављу 2.

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
bool UGranicama(int xt, int yt)
{
    return (1-yt<xt && xt<=yt)||(xt==0 && yt==0);
}
void ispisniza(int a[100], int n)
{
    for(int i=0; i<n; i++) cout<<a[i]<<endl;
}
void f(int xt, int yt, int k, int smer, double& a, double& b, double& s)
{
    if(xt==0 && yt==0)
    {
        if(k%4==0) {a+=0; b+=1;}
        if(k%4==1) {a+=1; b+=0;}
        if(k%4==2) {a+=0; b+=-1;}
        if(k%4==3) {a+=-1; b+=0;}
    }
    if(UGranicama(xt-1, yt-1))
    {
        if(smer==0) f(xt-1, yt-1, k, 1, a, b, s);
        else
        {
            if(smer==1) f(xt-1, yt-1, k, 1, a, b, s);
            else
            {
                if(smer==2) f(xt-1, yt-1, k+1, 1, a, b, s);
            }
        }
    }
    if(UGranicama(xt+1, yt-1))
    {
        if(smer==0) f(xt+1, yt-1, k, 2, a, b, s);
        else
        {
            if(smer==1) f(xt+1, yt-1, k+1, 2, a, b, s);
            else
            {
                if(smer==2) f(xt+1, yt-1, k, 2, a, b, s);
            }
        }
    }
}
void pisizay(int y)
{

    for(int x=2-y; x<=y; x+=2)
    {
        double s=0, a=0, b=0;
        f(x, y, 0, 0, a, b, s);
        s=(a*a+b*b)/pow(2, y-1);
```

```
        cout<<s<<endl;
    }
}
int main()
{
    int y;
    cin>>y;
    pisizay(y);
}
```

7.2. WolframMathematica кодови. Први програм рачуна вредности функција P(x, y) користећи готову формулу изведену у поглављу 2 и скицира ту функцију за фиксно y, дискретно (узима само целобројне вредности x). Други програм рачуна и скицира функцију P(y, -) за y од 1 до 100.

Први код:

```
f[x_, y_] :=
 Which[Mod[x + y, 2] ==
   1 || (0 < y && y < Abs[x]) || ((y == -x) && (x < 0)),
  0, (y == x) && (x > 0), 2^(1 - y),
  y > Abs[x], (2^(1 - y))*(Sum[((-1)^r)*Binomial[(x + y - 2)/2, r]*
      Binomial[(y - x - 2)/2, r], {r, 0, Floor[y/2]}])^2 + (2^(1 -
      y))*(Sum[((-1)^r)*Binomial[(x + y - 2)/2, r]*
      Binomial[(y - x - 2)/2, r - 1], {r, 1, Floor[y/2]}])^2 ];
sdata = Table[f[x, 1000], {x, -750, 750}]
ListPlot[sdata]
```

Други код:

```
f[y_] := (1/2)*
  Sum[((-4)^(-k))*Binomial[2 k, k], {k, 0, Floor[y/2] - 1}];
Plot[f[y], {y, 0, 100}]
```

Литература

[1] E. Akhmedova, M. Skopenkov, A. Ustinov, R. Valieva, A. Voropaev, Feynman checkerboard: An intro to algorithmic quantum field theory

[2] Feynman, Richard (2006). QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press. ISBN 0-691-12575-9.

[3] Gersch, H.A., Feynman's relativistic chessboard as an Ising model, Int J Theor Phys 20:7 (1981), 491–501.

[4] T Jacobson and L S Schulman, Quantum stochastics: the passage from a relativistic to a non-relativistic path integral, J Physics A 17:2 (1984), 375–383.

[5] Ju, H.-K.; Lee, H. & Seo, S. Integral polynomial sequences related with Krawtchouk matrices and associated Riordan arrays Honam Math. J. 34 (2012), 297–310.

[6] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii (1984). Electrodynamics of Continuous Media. Vol. 8 (2nd ed.). Butterworth-Heinemann.

[7] G.N. Ord, Classical particles and the Dirac equation with an electromagnetic field, Chaos, Solitons & Fractals 8:5 (1997), 727-741.

[8] G. N. Ord and J. A. Gualtieri, The Feynman Propagator from a Single Path, Phys. Rev. Lett. 89, 250403 (2002).

[9] https://sh.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_equation

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function