Математичка гимназија

Матурски рад
из математике

Математичко очекивање

Ученик
Петар Пешић, IVб

Ментор
мр Војислав Пантић

Београд, 1. јун 2023.

Садржај

1

Увод

Концепт математичког очекивања настао је пре пар стотина година, у проблему поена (*problem of points*) и на њему су радили познати математичари Паскал и Ферма.

Проблем поена: Два играча на почетку улажу једнак износ новца. Они на почетку имају 0 поена, игра се до N, после сваке рунде један играч добија један поен. Оба играча имају једнаке шансе да добију поен. Игра на пример може бити бацање новчића где један играч добија поен кад падне писмо, а други кад падне глава. Игра је прекинута неком „вишом силом” у тренутку када је резултат $X : Y$, где су X,Y мањи од N.

Решење до ког су дошли је да сваки играч добија производ његове вероватноће да победи и укупног износа. Притом се вероватноће за победу не гледају као X/N и Y/N, него се замишља да се игра наставила. Другим речима резултат се враћа на $0 : 0$ и гледају се вероватноће да први играч стигне до $N - X$ поена односно други играч до $N - Y$ поена.

Концепт математичког очекивања који је овде настао је $E = x \cdot p$, где је x вредност улога и p вероватноћа.

Проблем којим су се бавили Паскал, Ферма и Хајгенс зове се коцкарева пропаст (*gambler's ruin*).

Коцкарева пропаст: Имамо два играча са редом N_1 и N_2 новчића (било која валута). После једне рунде губитник предаје један новчић победнику. Обоје имају једнаке шансе да добију рунду. Игра се завршава када један изгуби новац.

Вероватноћа за победу сваког играча је

$$P_k = \frac{N_k}{N_1 + N_2}, k \in \{1, 2\}$$

Лако се може уочити како већу вероватноћу за победу има играч са више новчића на почетку, иако је очекивани добитак за сваку особу по рунди 0.

Стога кладионица има предност, отуда израз коцкарева пропаст.

У модерно време (*gambler's ruin*) говори о томе како ће коцкар који подиже своју опкладу након победе, а не спушта је након победе, евентуално остати без пара иако је очекивање за рунду позитивно.

Пример: Нека је вероватноћа успеха у некој игри $\frac{1}{2}$. Почетни улог је n. У случају неуспеха, све паре су изгубљене, у случају успеха, улог се дуплира.

Након n бацања, његова шанса да постане шворц се приближава јединици, иако је очекивање било позитивно.

Слично, ако је очекивање негативно, коцкар ће евентуално да изгуби паре.

Такође Паскал је утицао на књигу *Port – Royal Logic* која каже како не треба посматрати радњу само по могућем добитку и губитку него и по њиховим вероватноћама, где видимо концепт математичког очекивања.

Модерно математичко очекивање су развијали Пјер-Симон Лаплас и Пафнути Чебишев.

2

Математичко очекивање у дискретној расподели

2.1 Математичко очекивање случајне величине са коначно много вредности

Случајну величину X која има коначно много вредности зваћемо простом случајном величином. Таква случајна величина има следећи закон расподеле вероватноћа

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix}$$

Дефиниција 2.1. Нека случајна величина X узима вредности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ редом са вероватноћама $p_1, p_2, \ldots, p_n$, при чему је $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Математичко очекивање случајне величине X је

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Пример 1. Нека се код бацања нехомогене коцке за игру број $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, појављује са вероватноћом p_k, где је $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$. Колика ће бити очекивана вредност у N бацања коцке?

Решење 1. За мало N рецимо $N = 5$ могуће вредности су на пример (5,2,6,5,4), (5,1,4,2,2), (4,3,4,5,3) чије просечне вредности су редом 4.4, 2.8, 3.8. Овим подацима не можемо предвидети очекивану просечну вредност, међутим ако узмемо велико N, тада ће број добијених бројева k бити N_k где је N_k приближно $p_k \cdot N$. Аритметичка средина ових бацања биће

$$\frac{N_1k_1 + N_2k_2 + N_3k_3 + N_4k_4 + N_5k_5 + N_6k_6}{N} = k_1p_1 + k_2p_2 + k_3p_3 + k_4p_4 + k_5p_5 + k_6p_6$$

Пример 2. Нађимо очекивану вредност која се добија при бацању хомогене коцке за игру.

Решење 2. Дата нам је случајна величина

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Тражено очекивање је

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Као што можемо да видимо добијена вредност математичког очекивања не мора бити једно од могућих вредности случајне величине X.

2.2 Математичко очекивање случајне величине са пребројиво много вредности

Дефиниција 2.2. Математичко очекивање случајне величине X са расподелом

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_n & ... \end{pmatrix}$$

једнако је

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

где је

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Оно постоји ако и само ако је поменути ред апсолутно конвергентан. Под постоји говоримо о томе да је $E(x)$ коначан број, дакле искључујемо случајеве $E(x) = +\infty$ и $E(x) = -\infty$.

Пример 3. Стефан игра игрицу док не изгуби. За сваки ниво k он добија 3^k бодова. Нека је X укупан број бодова који је Стефан добио. Вероватноћа да Стефан пређе ниво је 0.6. Одреди $E(X)$.

Решење 3. Вероватноћа да Стефан изгуби у k-том нивоу једнака је производу вероватноће да изгуби и производу $(k-1)$ вероватноћа да победи, где је вероватноћа да изгуби $p = 0.4$ и вероватноћа да победи $q = 0.6$. Имамо следећу расподелу случајне величине X

$$X : \begin{pmatrix} 3^1 & 3^2 & ... & 3^k & ... \\ p & p \cdot q & ... & p \cdot q^{k-1} & ... \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot 3^k \cdot q^{k-1}$$

$$E(X) = 3 \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (3 \cdot q)^{k-1}$$

Како је $3 \cdot q$ веће од 1, сваки члан је већи од претходног, па је овај ред дивергентан, тако да математичко очекивање не постоји.

У случају да је $p = 0.7$ и $q = 0.3$,

$$E(X) = 18.9$$

Дакле, очекивање ће бити коначно.

3

Математичко очекивање у непрекидној расподели

Теорема 3.1. За сваку непрекидну случајну величину X, дефинисану на простору вероватноћа (Ω, A, P) постоји низ $\left\{X_n\right\}$ дискретних случајних величина, такав да за свако $\omega \in \Omega$ је

$$X\left(\omega\right) = \lim_{n\to\infty} X_n\left(\omega\right)$$

Доказ 3.1. (Илустрација) За произвољан природан број n и цео број k дефинишемо догађај

$$A_{n,k} = \left\{\omega : \frac{k}{n} \leq X\left(\omega\right) < \frac{k+1}{n}\right\}$$

и низ дискретних случајних величина

$$X_n : \begin{pmatrix} \cdots & -\frac{1}{n} & \frac{0}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{k}{n} & \cdots \\ \cdots & p_{n,-1} & p_{n,0} & p_{n,1} & \cdots & p_{n,k} & \cdots \end{pmatrix}$$

где је

$$p_{n,k} = P\left(A_{n,k}\right) = F_X\left(\frac{k+1}{n}\right) - F_X\left(\frac{k}{n}\right)$$

и $p_{n,k} \to 0$ када $n \to \infty$. За свако ω је

$$\left|X_n\left(\omega\right) - X\left(\omega\right)\right| = X\left(\omega\right) - X_n\left(\omega\right) < \frac{1}{n}$$

па $X_n\left(\omega\right)$ тежи $X\left(\omega\right)$ када $n \to \infty$.

Дефиниција 3.1. Нека је X непрекидна слуцајна величина дефинисана на простору вероватноћа (Ω, A, P) и нека је $\{X_n\}$ низ дискретних случајних величина такав да за свако $\omega \in \Omega$ је $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$. Тада је математичко очекивање случајне величине X одређено са

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)$$

ако та гранична вредност постоји.

Пример 4. Дужина X случајно изабраног штапа је непрекидна случајна величина. Колико је њено математичко очекивање?

Решење 4. Ако дужину меримо са тачношћу $\pm 5cm$ онда случајну величину X замењујемо са дискретном случајном величином X_1 са скупом вредности, на пример, $X_1 : \begin{pmatrix} 50 & 60 & \dots & 150 \end{pmatrix}$. Ако меримо са тачношћу $\pm 5mm$ онда је X_2 дискретна случајна величина са скупом вредности $X_2 : \begin{pmatrix} 50 & 51 & \dots & 150 \end{pmatrix}$. $E(X_2)$ је очигледно „ближа" $E(X)$ од $E(X_1)$. Дакле, што је разлика суседних чланова у случајној величини X_k мања, то се $E(X_k)$ све више приближава $E(X)$. Очекивање случајне величине X_n, код које разлике теже нули, тежи очекивању случајне величине X.

Дефиниција 3.2. Нека је X непрекидна случајна променљива са густином расподеле $f(x)$. Математичко очекивање за X је

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

под условом да интеграл апсолуно конвергира, у супротном очекивање не постоји.

Пример 5. На кружници полупречника r се на случајан начин бирају 2 тачке са равномерним расподелама. Наћи расподелу и математичко очекивање њиховог растојања.

Решење 5. Означимо са Z растојање између тачака X и Y. Тада је $\sin\alpha = \frac{Z}{2r}$ при чему је α случајна променљива са $U(0, \frac{\pi}{2})$ расподелом. Функција расподеле

$$\begin{aligned} G(z) &= P\{Z < z\} = P\{2 \cdot r \cdot \sin\alpha < z\} = P\left\{\sin\alpha < \frac{z}{2r}\right\} \\ &= P\left\{\alpha < \arcsin\frac{z}{2r}\right\} = F\left(\arcsin\frac{z}{2r}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot \arcsin\frac{z}{2r} \end{aligned}$$

јер је функција расподеле од α у интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$

$$F(x) = \frac{x - 0}{\pi/2 - 0} = \frac{2 \cdot x}{\pi}$$

Густина расподеле за Z је

$$g\left(z\right) = \frac{1}{\pi \cdot r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{4 \cdot r^2}}}$$

$$E\left(Z\right) = \int_0^{2 \cdot r} z \cdot g\left(z\right) \cdot dz$$

$$E\left(Z\right) = \frac{1}{\pi \cdot r} \cdot \int_0^{2 \cdot r} \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{4 \cdot r^2}}} dz$$

Користимо смену $t = \frac{z}{2r}$

$$E\left(Z\right) = \frac{1}{\pi \cdot r} \cdot \int_0^{1} \frac{2 \cdot r \cdot t}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot 2 \cdot r \cdot dt$$

$$E\left(Z\right) = \frac{4 \cdot r}{\pi} \cdot \int_0^{1} \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

користимо смену $y = 1 - t^2$

$$E\left(Z\right) = \frac{2 \cdot r}{\pi} \cdot \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

$$E\left(Z\right) = \frac{4 \cdot r}{\pi} \cdot y^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1$$

$$E\left(Z\right) = \frac{4 \cdot r}{\pi}$$

што је приближно $1,27 \cdot r$.

4

Особине математичког очекивања

Навешћемо неке особине математичког очекивања:

(1) За константу C, математичко очекивање је $E(C) = C$

(2) Ако је a константа и X случајна величина тада је $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$

$$E(a \cdot X) = \sum_{i=1}^{k} (a \cdot x_i) \cdot p_i = a \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i = a \cdot E(X)$$

(3) Ако су X и Y случајне величине са коначним математичким очекивањима $E(X)$ и $E(Y)$ тада је $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{n} (x_i + y_m) \cdot p_{im} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{n} x_i \cdot p_{im} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot p_{im} \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{m=1}^{n} p_{im} + \sum_{m=1}^{n} y_m \sum_{i=1}^{k} p_{im} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i + \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot p_m \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

(4) За свако $\omega \in \Omega$, ако је $X(\omega) \geq 0$ онда је $E(X) \geq 0$

(5) За свако $\omega \in \Omega$, ако је $X(\omega) \geq Y(\omega)$ онда је $E(X) \geq E(Y)$

Како је $X(\omega) - Y(\omega) \geq 0$ на основу претходне особине имамо, $E(X-Y) \geq 0$, на основу особине 3 даље следи $E(X) + E(-Y) \geq 0$, и коначно из особине 2 имамо $E(X) - E(Y) \geq 0$, односно $E(X) \geq E(Y)$

(6) $|E(X)| \leq E(|X|)$ што је последица теореме $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$

(7) $E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$ Ово ћемо доказати помоћу математичке индукције. База је $E(X) = E(X)$,

$$E(X_1 + X_2 + ... + (X_n + X_{n+1})) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n + X_{n+1})$$

Коришћењем особине 3 добијамо

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n + X_{n+1}) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) + E(X_{n+1})$$

чиме је тврђење доказано.

(8) Ако су X и Y независне случајне величине са коначним математичким очекивањима $E(X)$ и $E(Y)$ тада је $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{n} (x_i \cdot y_m) \cdot p_{im} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{n} x_i \cdot y_m \cdot p_i \cdot p_m \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i \cdot \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot p_m = E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

међутим, обрнуто не важи.

(9) За независне случајне величине $X_1, X_2, ...X_n$, са коначним очекивањима важи $E(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot ... \cdot E(X_n)$, што се доказује индукцијом аналогно као за особину 7.

(10) За свако $\omega \in \Omega$, ако је $\alpha \leq X(\omega) \leq \beta$, онда је $\alpha \leq E(X) \leq \beta$.

Из $X(\omega) \leq \beta$ следи

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_{max} \cdot p_i = x_{max} \cdot \sum_{i=1}^{k} p_i = x_{max} \leq \beta$$

Слично се доказује и друга неједнакост.

(11) Нека је X дискретна случајна величина са датом расподелом

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix}$$

и Y случајна величина таква да је $Y = h(X)$,$y = h(x)$,$x \in R$ тада је

$$E\,(Y) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot p_i$$

(12) Нека је X непрекидна случајна величина са густином расподеле g_x,$x \in R$ и Y случајна величина таква да је $Y = h(X)$ и $h(x)$ непрекидна. Тада је

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)g(x)dx$$

(13) Нека је (X, Y) дводимензионална дискретна случајна величина са расподелом $p(x_i, y_j)$,$x, y \in R$ где је $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$ и нека је Z таква случајна величина да важи $Z = g(X, Y)$ где је $z = g(x, y)$. Тада је

$$E(Z) = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{m} g(x_i, y_j) \cdot p(x_i, y_j)$$

(14) Нека је (X, Y) дводимензионална непрекидна случајна величина са густином расподеле $g(x, y)$,$x, y \in R$. Нека је Z случајна величина таква да је $Z = h(X, Y)$ и $h(x, y)$ непрекидна. Тада је

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)g(x, y)dxdy$$

5

Математичко очекивање неких расподела

(1) Математичко очекивање Бернулијеве случајне величине, односно индикатора догађаја. Њена расподела је

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$E\left(X\right) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

(2) Математичко очекивање биномне случајне величине са параметрима n и p. Њена расподела дата је са

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & n \\ \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n & \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} & ... & \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^0 \end{pmatrix}$$

Биномна случајна величина $S_n \in B(n,p)$ се може представити као $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ где су $I_1, I_2, ..., I_n$ независни индикатори успеха у n независних експеримената са вероватноћом успеха p у сваком експерименту.

$$E\left(X\right) = E\left(S_n\right) = E\left(I_1 + I_2 + ... + I_n\right) = E\left(I_1\right) + E\left(I_2\right) + ... + E\left(I_n\right) = n \cdot p$$

(3) Математичко очекивање геометријске расподеле са параметром p. Њена расподела је

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n & ...\\ p & (1-p)\cdot p & ... & (1-p)^{n-1}\cdot p & ...\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}E\left(X\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p + \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}\cdot p\\ &= (1-p)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot(1-p)^{n-2}\cdot p + \frac{p}{1-(1-p)} = (1-p)\cdot E(X)+1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E\left(X\right) = \frac{1}{p}$$

(4) Математичко очекивање негативне биномне расподеле са параметрима r и p. Њена расподела је

$$X:\begin{pmatrix}r & r+1 & ... & k & ...\\ p^r & r\cdot(1-p)\cdot p^r & ... & \binom{k-1}{r-1}\cdot(1-p)^{k-r}\cdot p^r & ...\end{pmatrix}$$

Негативну биномну расподелу можемо посматрати као низ r геометријских расподела. Након $r-1-$ог успеха у низу почиње $r-$ти низ и завршава се закључно са $r-$тим успехом. Сваки геометријски низ има параметар p за вероватноћу успеха у експерименту па из претходног знамо да ће очекивање бити

$$E\left(X\right) = r\cdot\frac{1}{p}$$

(5) Математичко очекивање равномерне расподеле на интервалу $[a,b]$. Густина расподеле $f(x)=\frac{1}{b-a}$ па је

$$E\left(X\right) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\cdot dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

(6) Математичко очекивање нормалне расподеле са параметрима $m\in R$ и σ^2. Густина расподеле $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}}\cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ па је

$$E\left(X\right) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dx$$

Уводимо смену $t = \frac{(x-m)}{\sigma}$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma\cdot t + m)\cdot e^{\frac{-t^2}{2}} \cdot dt$$

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot e^{\frac{-t^2}{2}} \cdot dt + \frac{m}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \cdot dt = 0 + m = m$$

(7) Математичко очекивање експоненцијалне расподеле са параметром $\lambda > 0$. Густина расподеле је

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot dx = \frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^{\infty} t\cdot e^{-t}\cdot dt$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\cdot(-t\cdot e^{-t}\Big|_a^b + \int_0^{\infty} e^{-t}\cdot dt) = \frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot dt$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

(8) Математичко очекивање Пуасонове расподеле са параметром $\lambda > 0$. Њена расподела дата је са

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & k & ... \\ e^{-\lambda} & \lambda\cdot e^{-\lambda} & ... & \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} & ... \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \sum_0^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} = \sum_1^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_1^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$E(X) = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda$$

6

Примене математичког очекивања

6.1 Примене у вероватноћи

Наводимо неке појмове из вероватноће које користе очекивање.

(1) **Дисперзија** је просечно квадратно одступање случајне величине X од њеног математичког очекивања

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

(2) **Стандардно одступање** је одступање случајне величине X од њеног математичког очекивања

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

(3) **Коваријација и коефицијент корелације** су мере зависности случајних величина.

$$cov(X,Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$$
$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$$

(4) **Момент и централни момент** описују карактеристике расподеле вероватноће случајне величине.

$$m_k = E(X^k)$$

$$\mu_k = E(X - E(X))^k$$

$m_1 = E(X)$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$, виши моменти на пример асиметрија и куртозис користе се за проучавање облика расподеле.

(5) **Чебишебљева неједнакост** представља вероватноћу да случајна величина одступа од очекивања за неко ϵ.

$$P\left\{|X| \geq \epsilon\right\} \leq \frac{E(X^2)}{\epsilon^2}$$

$$P\left\{|X - E(X)| \geq \epsilon\right\} \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

(6) **Чебишевљев закон великих бројева** нам говори како се релативна вероватноћа случајног догађаја приближава вероватноћи овог догађаја када се случајни експеримент понавља велики број пута. Релативна вероватноћа је k/n, где је k број успеха неког исхода, а n укупан број опита. Вероватноћа p је вероватноћа успеха тог исхода.

$$P\left\{|\tfrac{(X_1+X_2+...+X_n)}{n} - E\tfrac{(X_1+X_2+...+X_n)}{n}| \geq \epsilon\right\} \leq \frac{C}{n \cdot \epsilon^2}$$

где је $C \geq D(X)$.

(7) **Муавр-Лапласова теорема (Интегрална)** је апроксимација за биномну случајну величину када је n велико. За сваки реалан број x важи

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\tfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \leq x\right\} = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

(8) **Централна гранична теорема** је "уопштење" Муавр-Лапласове теореме где је $E(X_k) = m$, $D(X_k) = \sigma^2$, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. За сваки реалан број x важи

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\tfrac{S_n - n\cdot m}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \leq x\right\} = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

(9) **Јенсенова неједнакост**. Нека је $f : R \to R$ конвексна функција и X случајна са коначним очекивањем.

$$f(E(X)) \leq E(f(X)$$

(10) **Хелдерова неједнакост**. Ако су p и q већи од 1 и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ тада је

$$E(XY) \leq (E(X)^p)^{\frac{1}{p}} + (E(Y)^q)^{\frac{1}{q}}$$

(11) **Неједнакост Минковског**. За p веће од 1 и случајне величине X,Y са коначним очекивањима важи

$$(E(X+Y)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (E(X)^p)^{\frac{1}{p}} + (E(Y)^p)^{\frac{1}{p}}$$

6.2 Примене у статистици

Наводимо неке појмове из статистике које користе очекивање.

(1) **Узорачка средина**. Користи се за оцену непознатог математичког очекивања.

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k$$

(2) **Узорачка дисперзија**. Користи се као оцена непознате дисперзије

$$\overline{S_n}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_n)^2$$

(3) **Узорачко стандардно одступање**

$$\overline{S_n} = \sqrt{\overline{S_n}^2}$$

(4) **Непристрасност оцене**. Нека је $F_\theta(x)$ функција расподеле обележја X која зависи од параметра θ. Нека је $(X_1, X_2, ..., X_n)$ узорак обима н из расподеле F_θ. Случајна величина(статистика) $T_n = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ је непристрасна оцена параметра Θ ако је

$$E(T_n) = \theta$$

Статистика T_n је асимптомски непристрасна оцена параметра θ ако важи

$$\lim_{n\to\infty} E(T_n) = \theta$$

(5) **Постојаност оцене**. Нека је $F_\theta(x)$ функција расподеле обележја X која зависи од параметра θ. Нека је $(X_1, X_2, ..., X_n)$ узорак обима н из расподеле F_θ Случајна величина (статистика) $T_n = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ је постојана оцена параметра Θ ако за свако $\epsilon > 0$ важи

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|T_n - \theta| \geq \epsilon\right\} = 0$$

(6) **Ефикасност оцене**. Гледамо која статистика је боља, односно чија дисперзија је мања. Нека је дат прост случајан узорак $(X_1, X_2, ..., X_n)$ из расподеле $F_\theta(x)$ која зависи од параметра θ и нека су $T_n = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $U_n = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ две статистике. Статистика T_n није гора оцена параметра θ од U_n ако је

$$E(T_n - \theta)^2 \leq E(U_n - \theta)^2$$

6.3 Још неке примене

(1) **Економија**: Осигуравајуће компаније, разне инвестиције

(2) **Игре на срећу**: Играч који барата основним знањем из теорије вероватноће може да оствари позитивно математичко очекивање (блекџек)

(3) **Физика**: Очекиване путање честица у квантној механици

(4) **Биологија**: У математичком моделовању ћелија и тестирању лекова

(5) **Астрономија**: Очекивана путања небеских тела

(6) **Одлучивање**: Паскалова опклада (*Pascal's wager*) је познат пример коришћења очекивања при одлучивању, она каже како колико год да је мала вероватноћа да Бог постоји веровањем у њега не губимо ништа, међутим вредност вечног спасења је бесконачна, па је очекивање позитивно, па се веровање у Бога исплати.

7

Задаци

Задатак 1. Дато је n куглица које су нумерисане бројевима $1, 2, ..., n$. Претпоставимо да су те куглице на случајан начин поређане у низ. Означимо са X број куглица које су нумерисане бројем који је једнак редном броју места на коме се куглица налази. Одредити математичко очекивање случајне величине X.

Решење 1. Нека је I_k индикатор догађаја да се на $k-$том месту налази куглица нумерисана са k

$$I_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$E(I_k) = \frac{1}{n}$$

$$E(X) = E(I_1 + I_2 + ... + I_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Очекивани резултат је да *samo* једна куглица има исти број којим је нумерисана и редни број места.

Задатак 2. Коцка се баца док се не појави свих шест страна коцке. Наћи очекивање.

Решење 2. Посматрајмо $k-$ти број који добијамо по први пут из скупа $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, пре њега је пало $(k-1)$ различитих бројева из тог скупа. Вероватноћа да падне $k-$ти број је $1-\frac{k-1}{6}$. Случајна величина X_k има геометријску расподелу са параметром $p_k = 1 - \frac{k-1}{6}$ где је k из горе поменутог скупа.

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + ... + X_6) = \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14.7$$

Очекује се да се све стране коцке појаве после отприлике 15 бацања.

Задатак 3. Изводи се низ независних експеримената са 2 могућа исхода: успех са вероватноћом p и неуспех са вероватноћом $1-p$. Нека је X највећи број узастопних експеримената почињући од првог који су завршени истим исходом. Наћи расподелу и математичко очекивање случајне величине X.

Решење 3.

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n & ... \\ 2 \cdot p \cdot (1-p) & p \cdot (1-p) & ... & p \cdot (1-p) \cdot (p^{n-1} + (1-p)^{n-1}) & ... \end{pmatrix}$$

$$E(X) = p \cdot (1-p) \cdot \sum_{1}^{\infty} n \cdot (p^{n-1} + (1-p)^{n-1})$$

$$E(X) = p \cdot (1-p) \cdot (\sum_{1}^{\infty} n \cdot p^{n-1} + \sum_{1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1})$$

Знамо да је очекивање геометријске расподеле

$$E(X) = \sum_{1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} \cdot p = \frac{1}{p}$$

па је

$$\sum_{1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} = \frac{1}{p^2}$$

Сада је

$$E(X) = p \cdot (1-p) \cdot (\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2})$$

$$E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 2$$

Најмање очекивање биће за $p = \frac{1}{2}$. Уколико је вероватноћа већа, имаћемо, очекује се да низ успеха овог експеримента буде већи. Уколико је вероватноћа мања, очекује се да низ неуспеха овог експеримента буде већи.

Задатак 4. Мета је начињена од три концентрична круга полупречника $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1 и $\sqrt{3}$ метара. Погодак у унутрашњи круг доноси 4 поена, следећи прстен 3 поена, у спољашњи прстен 2 поена, а погодак ван мете 0 поена. Ако растојање поготка од центра мете има густину

$$f(x) : \begin{cases} \frac{2}{\pi \cdot (1+x^2)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

наћи очекивани број поена у 5 бацања.

Решење 4. Нека је X растојање поготка од центра мете а Y број добијених поена у бацању

$$P\left\{Z=0\right\}=P\left\{X>\sqrt{3}\right\}=\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{2}{\pi\cdot(1+x^2)}\cdot dx=\lim_{b\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\arctan x\bigg|_{\sqrt{3}}^{b}=\frac{2}{\pi}\cdot(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})$$

$$P\left\{Z=0\right\}=\frac{1}{3}$$

Слично је

$$P\left\{Z=2\right\}=P\left\{1<X<\sqrt{3}\right\}=\frac{1}{6}$$

$$P\left\{Z=3\right\}=P\left\{\tfrac{1}{\sqrt{3}}<X<1\right\}=\frac{1}{6}$$

$$P\left\{Z=4\right\}=P\left\{0<X<\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}=\frac{1}{3}$$

$$E(Z)=0\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{6}$$

Тражено очекивање је $E(Z_1)+E(Z_2)+E(Z_3)+E(Z_4)+E(Z_5)=5\cdot E(Z)=\frac{65}{6}$

Задатак 5. Два лица су се договорила да се нађу на одређеном месту између 18 и 19 часова. Свако од њих долази на место сусрета независно од другог у сваком моменту назначеног интервала. Може се сматрати да моменти доласка имају равномерну расподелу. Ко стигне први, чека другог. Наћи математичко очекивање времена чекања.

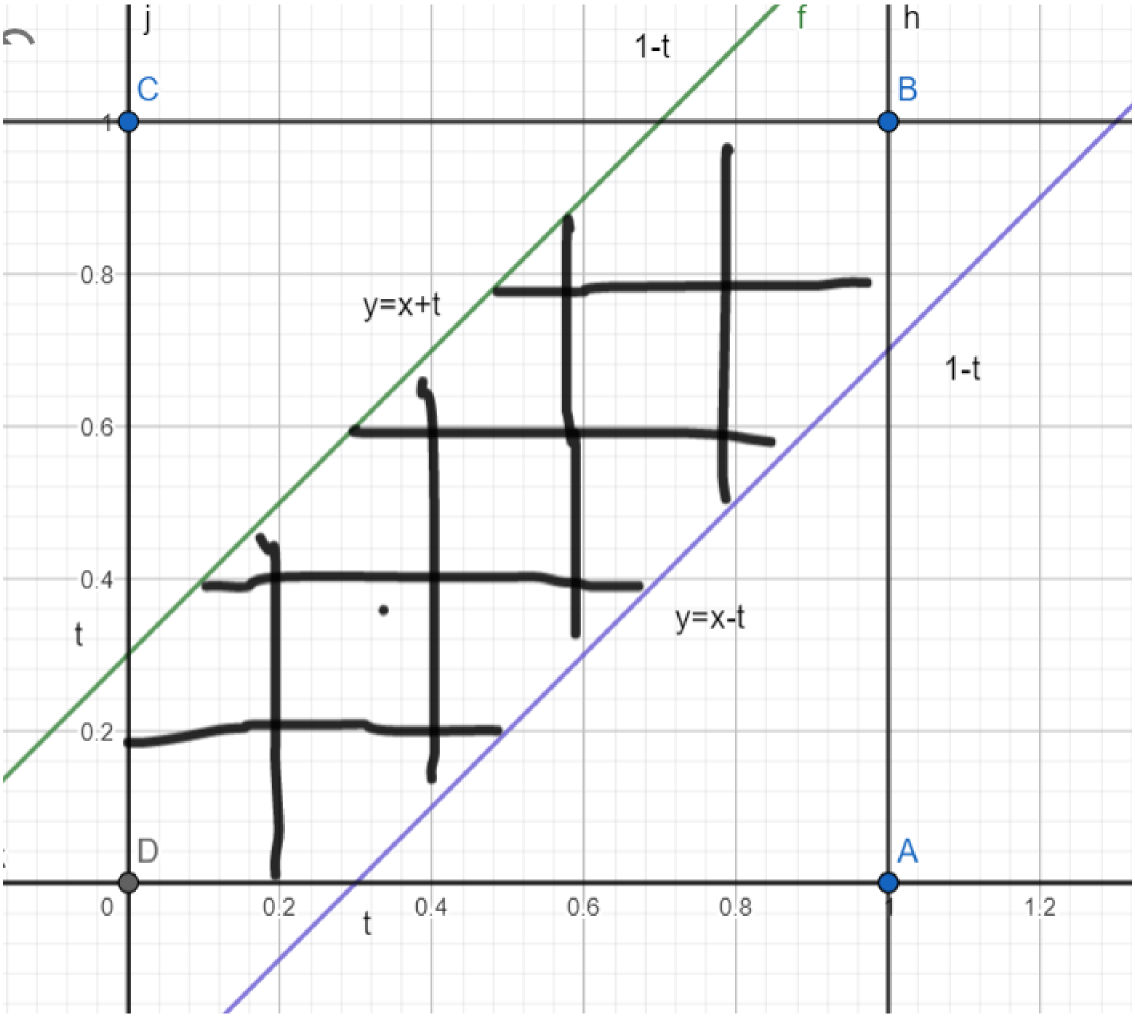
Решење 5. Нека су X и Y моменте доласка та 2 лица, па је $X,Y:U(18,19)$. Време чекања је $T=|X-Y|$ и његова расподела је:

$$G(t)=PT<t=P|X-Y|<t=\begin{cases}0 & ,t\leq 0\\ 1-(1-t)^2 & ,0<t\leq 1\\ 1 & ,t>1\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}2-2\cdot t & ,0<t<<1\\ 0 & ,t\notin(0,1)\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^1 t\cdot(2-2t)\cdot dt=t^2\bigg|_0^1-\frac{2}{3}t^3\bigg|_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Дакле, очекивано време чекања је 20 минута.



Слика 7.1

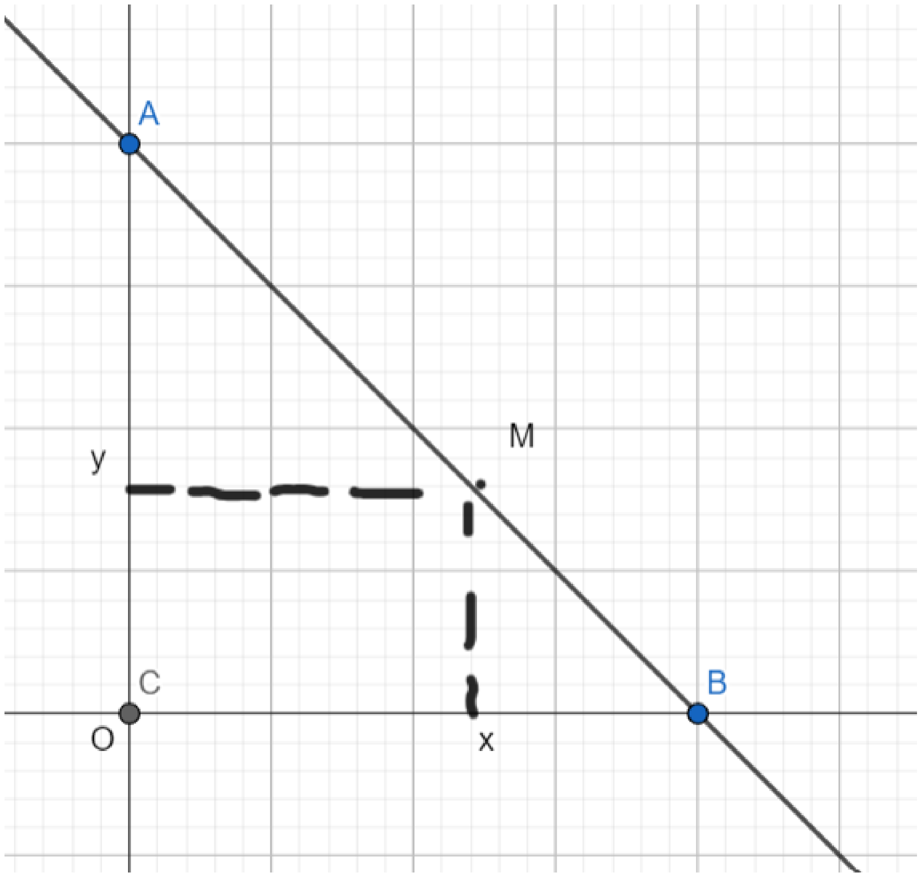
Задатак 6. Тачка $M(X,Y)$ се бира на случајан начин из првог квадранта равни xOy према расподели одређеној густином:

$$f(x,y) = e^{-x-y}$$

Кроз тачку M се повлачи права која на позитивним деловима координатних оса одсеца одсечке OA и OB једнаке дужине. Одреди очекивану дужину одсечка AB и упоредити је са дужином одсечка који чини права провучена кроз очекивани положај M.

Решење 6. Најпре, важи

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-x-y} \cdot dy = \int_0^\infty e^{-x} \cdot e^{-y} \cdot dy = e^{-x} \cdot e^{-y} \Big|_0^\infty = e^{-x}$$



Слика 7.2

Као и

$$f(y) = \int_0^\infty e^{-x-y} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot e^{-y} \cdot dx = e^{-x} \cdot e^{-y} \Big|_0^\infty = e^{-y}$$

Случајне величине X, Y имају расподелу $\epsilon(1)$. Очекивање експоненцијалне расподеле је $\frac{1}{\lambda}$ па је $E(X) = E(Y) = 1$. Очекивани положај тачке M је $(E(X), E(Y))$ што је тачка $(1,1)$. Дужина дужи са траженом особином која садржи тачку M је $2 \cdot \sqrt{2}$.

Са друге стране $AB = (X+Y) \cdot \sqrt{2}$ па је $E(AB) = (E(X)+E(Y))\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

Очекивана дужина дужи једнака је дужини дужи која пролази кроз очекивани положај тачке M.

Задатак 7. Случајна величина (X, Y) има густину

$$f(x,y) = 3 \cdot min\left\{x,y\right\}, 0 < y < x < 1$$

Нека је $Z = max\left\{x,y\right\}$

Наћи $E(Z)$.

Решење 7.

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z(x,y)\cdot f(x,y)\cdot dx\cdot dy = 3\cdot\int_0^1\int_0^1 max\left\{x,y\right\}\cdot min\left\{x,y\right\}\cdot dx\cdot dy$$

$$E(Z) = 3\cdot\int_0^1\int_0^1 x\cdot y\cdot dx\cdot dy = 3\cdot\int_0^1 x\cdot dx\cdot\int_0^1 y\cdot dy = \frac{3}{4}$$

Задатак 8. Хомогена нумерисана коцка се баца два пута. У случају да оба пута падне паран број, коцка се баца још једном. Ако је X број појављивања двојке, а Y број појављивања шестице у свим бацањима, наћи расподелу за (X,Y) и $E(Y/X=1)$.

Решење 8. Нека је N догађај да је пао непаран број, и $P(A,B,C)$, вероватноћа догађаја да се на првом, другом и трећем месту редом појаве бројеви A,B,C.

$$P\left\{X=0,Y=0\right\} = P(N,N)+P(N,4)+P(4,N)+P(4,4,N)+P(4,4,4)$$

$$P\left\{X=0,Y=0\right\} = \frac{94}{216}$$

$$P\left\{X=0,Y=1\right\} = P(N,6)+P(6,N)+P(6,4,N)+P(6,4,4)+P(4,6,N)+P(4,6,4)+P(4,4,6)$$

$$P\left\{X=0,Y=1\right\} = P\left\{X=1,Y=0\right\} = \frac{45}{216}$$

$$\begin{aligned}P\left\{X=1,Y=1\right\} &= P(2,6,N)+P(6,2,N)+P(2,4,6)+P(2,6,4)\\&+P(4,2,6)+P(4,6,2)+P(6,2,4)+P(6,4,2)\end{aligned}$$

$$P\left\{X=1,Y=1\right\} = \frac{12}{216}$$

$$P\left\{X=2,Y=0\right\} = P(2,2,N)+P(2,2,4)+P(2,4,2)+P(4,2,2)$$

$$P\left\{X=2,Y=0\right\} = P\left\{X=0,Y=2\right\} = \frac{6}{216}$$

$$P\left\{X=2, Y=1\right\} = P(2,2,6) + P(2,6,2) + P(6,2,2)$$

$$P\left\{X=2, Y=1\right\} = P\left\{X=1, Y=2\right\} = \frac{3}{216}$$

$$P\left\{X=3, Y=0\right\} = P(2,2,2)$$

$$P\left\{X=3, Y=0\right\} = P\left\{X=0, Y=3\right\} = \frac{1}{216}$$

Y/X	0	1	2	3
0	94/216	45/216	6/216	1/216
1	45/216	12/216	3/216	0
2	6/216	3/216	0	0
3	1/216	0	0	0

За X једнако 1 имамо следећу расподелу

$$Y/X = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{45}{60} & \frac{12}{60} & \frac{3}{60} \end{pmatrix}$$

$$E(Y/X = 1) = \frac{3}{10}$$

Литература

[1] др Павле Младеновић, *Вероватноћа и статистика за 4 разред Математичке гимназије, Круг*, Београд, 2017.

[2] др Павле Младеновић, *Елементаран увод у вероватноћу и статистику*, Друштво математичара Србије, Београд, 1998.

[3] др Јован Малишић, *Вероватноћа и математичка статистика*, Круг, Београд, 1999.

[4] Зоран Глишић, Предраг Перуничић, *Збирка решених задатака из вероватноће и математичке статистике*, Научна књига, Београд, 1982.

[5] Зоран А.Ивковић, *Теорија вероватноћа са математичком статистиком*, Грађевинска књига, Београд, 1976.

[6] др Зоран Ивковић, др Драган Бањевић, *Вероватноћа и математичка статистика*, Научна књига, Београд, 1981.

[7] др Владимир Вранић, *Вјероватност и статистика*, Техничка књига, Загреб, 1958.

[8] др Зоран Ивковић, *Теорија вероватноћа са математичком статистиком*, Универзитет у Београду, Београд, 1986.

[9] др Весна Јевремовић, *Вероватноћа и статистика*, Математички факултет, Београд, 2014.

[10] `https://encyclopediaofmath.org/wiki/Pascal,Blaise`

[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/Gambler%27s_ruin`

[12] `https://en.wikipedia.org/wiki/Expected_value`

[13] https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/mathematical-expectation

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Pafnuty_Chebyshev