

# Математичка гимназија

Матурски рад

из предмета

**физике**

на тему

---

Кретање тела у пољу БТЗ црне рупе

---

*Ученик:*

Страхиња Николић

*Ментор:*

Бранислав Цветковић

Београд, јун 2020

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Основе ОТР</b>	<b>5</b>
2.1	Постулати . . . . .	5
2.2	Метрика . . . . .	6
2.3	Геодезијске једначине . . . . .	7
2.4	Шварцшилдова метрика . . . . .	8
<b>3</b>	<b>ЗД гравитација и БТЗ црна рупа</b>	<b>13</b>
3.1	ЗД гравитација . . . . .	13
3.2	БТЗ црна рупа . . . . .	14
3.3	Резултати . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Закључак</b>	<b>24</b>
	Додатак А	25
	Додатак Б	26
	Литература	27

# Глава 1

## Увод

Вековима након што је Њутн формулисао своју теорију гравитације и три закона динамике, сматрало се да се све појаве у физици могу описати уз помоћ њих. Ипак, средином 19. века почели су да се јављају проблеми, најпре са Максвеловом теоријом електромагнетизма из 1865. године. Његова теорија је предвиђала да светлост пропагира константом брзином без обзира на инерцијални систем у ком се она опажа. Ово је потврђено и експериментом који су извели Мајкелсон и Морли 1887. године.

Научна јавност је била подељена око импликација ове чињенице. Већина је постулирала постојање *етра*, материје која испуњава цео универзум и која служи као медијум за простирање електромагнетних таласа. Међутим теорија етра није могла адекватно да објасни резултате експеримената. Решење проблема долази са Ајнштајновом теоријом специјалне релативности (СТР). Последице ове теорије јесу да живимо у четвородимензионалном простору, где је време четврта координата која се, за разлику од Њутнове теорије, не може одвојити од три спацијалне координате. Одмах након СТР-а, Ајнштајн је покушао да убаци гравитацију у своју теорију. Испоставило се да ово није лак задатак и да захтева далеко већи математички апарат, тако да Ајнштајн објављује општу теорију релативности (ОТР) тек 1916. године.

ОТР је до данас најтачнија теорија гравитације, ни један експеримент није успео да оповргне њене резултате. Шта више, бројна теоријска предвиђања ове теорије су касније потврђена (црне рупе, гравитациони таласи...). Такође је сматрана једном од најлепших теорија у физици иако је од свог настанка наилазила на многе критике. Ипак, као и свака теорија има своје мане, од којих је највећа њена неспојивост са другом актуелном граном физике, квантном механиком. Велики напори су начињени још од 30-их година прошлог века да се ове две теорије уједине, међутим безуспешно и овај задатак је данас један од најтежих и најактуелнијих у физици.

Постоје разни приступи овом проблему, од којих је најинтересантнији за овај рад, модел гравитације у три димензије. То је покушај да се ОТР сагледа у случају мање

димензија, из разлога што је рачун лакши, а могу се повући аналогије са четири димензије. Циљ овог рада јесте да се изучи једно специјално решење Ајнштајнових једначина у три димензије, БТЗ црна рупа, названо тако по ауторима *Banados*, *Teitelboim* и *Zanelli*.

# Глава 2

## Основе ОТР

### 2.1 Постулати

Специјална теорија релативности се изучава у редовној настави Математичке гимназије. Познато је да је последица ове теорије та да се ни једна информација не може преносити брже од светлости, ово би требало да важи за све фундаменталне интеракције. Ако се сад присетимо Њутновог закона гравитације  $F = G \frac{mM}{r^2}$  приметићемо да оваква формулација дозвољава истовремено деловање на даљину без обзира на то колико су два објекта удаљена. Ајнштајну је ово дало мотивацију за формулисање нове теорије гравитације.

Још једно занимљиво питање је било актуелно у физици у то време, а то је еквиваленција инерцијалне и гравитационе масе тела. Наиме за тело у гравитационом пољу важи релација  $G \frac{Mm_g}{r^2} = m_i a$ , где  $m_g$  означава гравитациону масу тела тј. способност тела да реагује на гравитационо поље, а  $m_i$  означава отпорност тела на убрзање. Ова два својства тела звуче потпуно другачије и описују два другачија физичка концепта, па ипак их без обзира на то увек изједначавамо. Ајнштајн је сматрао да ово не може бити само пука случајност. Ако узмемо да су инерцијална и гравитациона маса једнаке, то би значило да свако тело у гравитационом пољу осећа исто убрзање, дакле свако прелази исту трајекторију ако има исту брзину и позицију у почетном тренутку. Из овога следи да је трајекторија тела описана простором у коме се оно налази пре него његовим особинама. Овде уводимо термин *геодезика* који у математици означава најкраћи пут између две тачке у датом простору. За раван дводимезионални простор ово је једноставно права линија, док су за сферу то велики кругови. Први основни принцип ОТР се зове хипотеза геодезика и гласи: *Слободно тело у простор-времени се креће по геодезику*, где је слободно тело оно на које не делују силе. Други основни принцип јесте принцип еквиваленције који каже да је систем у пољу гравитације убрзања  $g$  еквивалентан оном који у празном свемиру убрзава истим убрзањем  $g$ . На даљој импликацији ових принципа се

нећемо задржавати, битни су нам само концепт геодезика и чињеница која каже да је гравитација ништа друго до закривљење простор времена. То што је простор закривљен значи да га не можемо описати Декартовим координатама већ нам требају закривљене координате и нови математички алат који ћемо сада увести.

## 2.2 Метрика

У Еуклидској геометрији растојање између две тачке у  $n$ -димензионалном простору се рачуна по следећој формули:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 \quad (2.1)$$

Ово другачије можемо записати као:

$$ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

Где је  $\delta_{\mu\nu}$  јединична или Кронекер-Делта матрица. Приметимо да једначина 2.2 не садржи суме, то је из разлога што по Ајнштајновој конвенцији, када год имамо индекс у супер- и субскрипту, сума по њему се подразумева. Растојање између две тачке је инваријанта у односу на трансформације координата. Ако се присетимо СТР-а, релативистички интервал је величина која је такође инваријанта на трансформацију координата, тако да можемо рећи да је на неки начин аналогна растојању између две тачке у Еуклидском простору, само што је СТР дефинисана у простору Минковског где је растојање између две тачке дато као:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.3)$$

Матрица  $\eta_{\mu\nu}$  се зове метрички тензор простора Минковског и дефинисана је на следећи начин<sup>1</sup>:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Док за индексе важи  $\mu, \nu \in \{t, x, y, z\}$ . У општем случају, у закривљеном простору са произвољним координатама растојање између две тачке се рачуна као:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>први члан ове матрице би требало да буде  $-c^2$  али радимо у ОТР систему јединица где је за брзину светлости узета вредност  $c = 1$

Где се величина  $g_{\mu\nu}$  зове метрички тензор и описује простор у ком се налазимо, генерално је функција положаја у простору и у  $n$ -димензионалном простору има  $n^2$  компоненти<sup>2</sup>. Питање које се сада намеће јесте како да помоћу дате метрике одредимо путању по којој се креће тело.

## 2.3 Геодезијске једначине

Пре него што одговоримо на ово питање, потребно је уопштити концепт сопственог времена са којим смо се упознали у СТР. Сопствено време ћемо рачунати по формули  $\tau = \int_{\sigma} \sqrt{-ds^2}$  (минус из разлога што је  $ds \leq 0$  за све узрочно-последичне догађаје), где  $\sigma$  представља параметар криве по којој меримо сопствено време. Сада можемо формализовати концепт геодезика споменут раније. Наиме може се показати [1] да је геодезик крива која максимизује сопствено време. У класичној механици проблем екстремизовања интеграла облика  $S = \int_{t_a}^{t_b} L(x^\alpha, (\dot{x}^\alpha)) dt$ , решава се коришћењем Ојлер-Лагранжових једначина:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \quad (2.5)$$

Ако упоредимо ово са нашим проблемом можемо идентификовати  $S$  са  $\tau$ ,  $t$  са  $\sigma$  и ако напишемо  $\sqrt{-ds^2}$  као  $\sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma$  можемо га упоредити са  $L(x^\alpha, (\dot{x}^\alpha))$ , па важи  $L = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ .

Почећемо са расписивањем леве стране једначине 2.5 (приметимо да  $g_{\mu\nu}$  не зависи од  $\dot{x}^\alpha$ ):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \left[ g_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta_\alpha^\nu \right] \quad (2.6)$$

У последњем кораку је искоришћен идентитет  $\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \mu \\ 1, & \alpha = \mu \end{cases} = \delta_\alpha^\mu$ . Приметимо да

израз можемо поједноставити зато што је корен у имениоцу разломка једнак  $L$ . Једна од последица Ајнштајнове нотације јесте да важи  $g_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu = g_{\alpha\nu}$ , својство које се зове спуштање индекса. Примењујући ово на једначину 2.6 добијамо:

$$-\frac{1}{2L} \left[ g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu + g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \right] = -\frac{1}{L} g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \quad (2.7)$$

Где је у последњем кораку искоришћено то да су  $\mu$  и  $\nu$  независни индекси па се могу преименовати ( $\nu \rightarrow \mu$ ). Потребно је још расписати десну страну 2.5:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = -\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>заправо метрички тензор је симетричан  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  па има  $\frac{n(n+1)}{2}$  независних компоненти

Ако убацимо 2.7 и 2.8 у 2.5 добијамо:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( g_{\alpha\mu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \quad (2.9)$$

Једначина 2.9 је један облик **геодезијске једначине** и једна је од важнијих, како за овај рад, тако и за ОТР уопште. Параметар  $\sigma$  је скаларни параметар карактеристичан за одређену криву, тако да он може бити и само сопствено време  $\tau$  тако да важи еквивалента једначина:

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{\alpha\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.10)$$

## 2.4 Шварцшилдова метрика

Сада кад смо извели геодезијску једначину, потребно нам је да увидимо како се она користи при одређивању једначина кретања тела. Као што је већ речено раније, за једначине кретања тела потребна нам је метрика простора. Питање налажења метрике је озбиљан и тежак задатак, тако да нећемо залазити у детаље, овде ћемо само навести пример једне такве метрике. Историјски, прва метрика која је откривена јесте Шварцшилдова. Открио ју је Карл Шварцшилд 1916. године и представља решење Ајнштајнових једначина у вакууму у близини сфрено-симетричног масивног тела. Метрика је дата на следећи начин:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.11)$$

Или је еквивалентно можемо записати у облику матрице:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Видимо да Шварцшилдова метрика има само 4 независне компоненте и да је дијагонална, као и да не зависи од временске координате, својства која ће бити битна касније. Пре него што наставимо даље вреди прокоментарисати особине ове метрике. Уочимо прво да метрика јако подсећа на метрику равнoг простора у сферним координатама:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$



Због тога кажемо да је Шварцшилдова метрика сферно-симетрична. Видимо такође да како  $r \rightarrow \infty$  метрика тежи оној која одговара равном простору. Дакле интуитивно видимо да је ова метрика добар кандидат за описивање простора изван сферно-симетричног тела. Члан  $r_s$  у 2.11 се зове Шварцшилдов радијус и има вредност  $r_s = 2GM$  и значајан је из разлога што када је  $r < r_s$  знакови испред координата  $t$  и  $r$  замене места, другим речима, просторна координата постаје временска и обрнуто. Како знамо да у обичном равном простору, тело не може да мирује у времену, тако се испоставља да тело не може да мирује у простору унутар Шварцшилдовога радијуса. Шварцшилдов радијус се још зове и хоризонт догађаја из разлога што свако тело које пређе ту границу, неминовно заврши у тачки  $r = 0$ , баш зато што не може да мирује у простору. Дакле хоризонт догађаја представља границу из које ни једно тело не може да побегне. Ако сада срачунамо вредности Шварцшилдовога радијуса за познате звезде и планете видећемо да је много мањи од њиховог пречника (за Сунце  $1.48km \ll R_s = 700000km$ , за Земљу  $4.55mm \ll R_z = 6380km$ ) што значи да не би требало да опажамо хоризонт догађаја код њих, пошто Шварцшилдова метрика описује простор-време изван објекта а не унутар њега и заиста га не опажамо. Ипак, постоје тела код којих је хоризонт догађаја изван њиховог пречника и та тела зовемо *црне рупе*. Она су нам значајна пошто представљају огромно одступање класичне теорије гравитације (која их уопште не предвиђа) од ОТР. На њихове особине ћемо се вратити у следећем поглављу.

Сада смо спремни да одредимо једначине кретања тела уз помоћ једначина 2.10 и 2.11. Заменимо у једначину 2.10  $\mu \rightarrow t$ :

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{t\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \partial_t g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Приметимо да је други сабирак једнак нули зато што, како је већ напоменуто, метрика не зависи од временске координате.

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{t\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \implies g_{t\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} = const.$$

Како је метрика дијагонална једини ненулти сабирак у горњој једначини јесте  $g_{tt}$  па ће важити:

$$\left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = const. = e \quad (2.12)$$

Слично, ако заменимо  $\mu \rightarrow \phi$ :

$$g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = r^2 \sin^2\theta \frac{d\phi}{d\tau} = const. = l$$

Једноставним аргументом<sup>3</sup> који следи из симетрије простора можемо закључити да је

<sup>3</sup>Посматрајмо тело са почетном брзином чији вектор лежи у некој равни. Како је простор сферно симетричан не постоји разлог за слободно тело да преферира једну или другу страну полупростора ограниченог од стране равни у којој се креће, дакле заувек ће остати у почетној равни.

свеједно коју вредност узмемо за угаону координату  $\theta$  па ћемо узети ону која нам највише поједностављује рачун а то је  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Тако да горња једначина постаје:

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = l \quad (2.13)$$

Можемо заменити и  $\mu \rightarrow r$  слично као што смо урадили и са  $t$  и  $\phi$  међутим рачун би био компликован, зато што све компоненте метрике зависе од  $r$ , поготово код компликованијих метрика које ћемо видети касније. Уместо тога искористићемо индетитет:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1, u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.14)$$

где је  $\mathbf{u}$  четворовектор брзине тела, концепт који се у одређеном облику обрађује и на редовној настави<sup>4</sup>. Примењујући 2.14 на нашу метрику добијамо:

$$-1 = g_{tt} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + g_{rr} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + g_{\theta\theta} \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + g_{\phi\phi} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (2.15)$$

На основу претходних аргумената имамо да је  $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$  па је цео трећи члан једнак нули. Користећи 2.12 и 2.13 и после сређивања добијамо:

$$\frac{1}{2}(e^2 - 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3} = \bar{E} \quad (2.16)$$

Овај облик једначине је погодан зато што га можемо упоредити са истом једначином само у класичној механици:

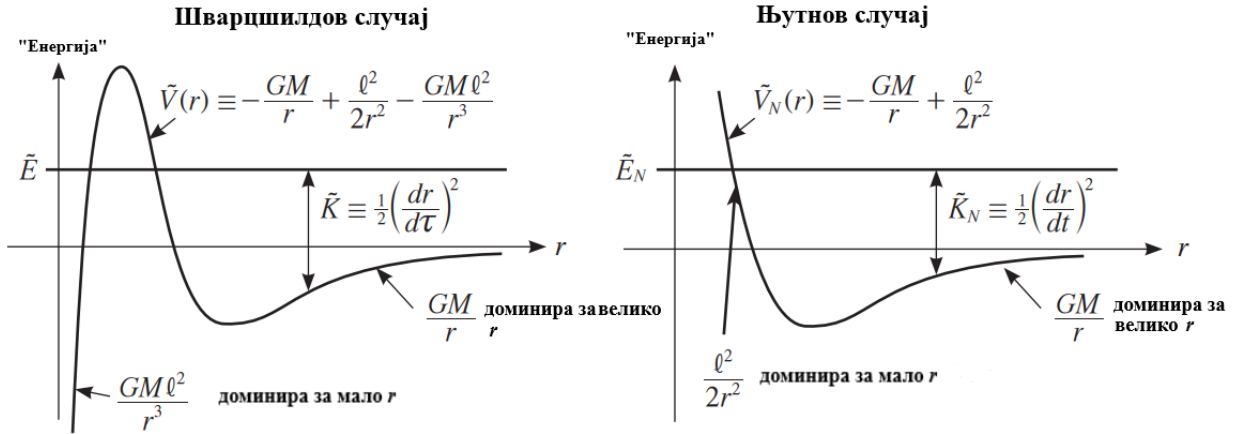
$$\bar{E}_N = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} \quad (2.17)$$

Видимо да члан  $\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2$  из једначине 2.16 можемо поистоветити са чланом  $\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2$  из једначине 2.17, где он представља кинетичку енергију по јединици масе. Такође, остатак једначине 2.17 личи на остатак 2.16 са изузетком једног члана  $-\frac{GMl^2}{r^3}$ . Како у Њутновој физици ти чланови играју улогу потенцијала, тако ћемо и остатак једначине 2.16 назвати ефективним потенцијалом. Треба напоменути да су ове аналогije чисто математичке и да их не треба проширивати изван тог оквира. Једначину 2.16 сада можемо преписати у облику:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{K} + \bar{V}_{eff} \\ \bar{K} &= \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ \bar{V}_{eff} &= -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3} \end{aligned} \quad (2.18)$$

<sup>4</sup>више о четворовектору брзине у додатку А

Ако сада погледамо слику 2.1 где су упоређени Њутнов и Шварцшилдов потенцијал видимо да се слично понашају при великим вредностима  $r$ , зато не опажамо велика одступања Њутнове теорије од експерименталних података на нивоу Сунчевог система. Међутим последњи члан у  $\bar{V}_{eff}$  прави огромну разлику како  $r \rightarrow 0$ , тако да уместо да потенцијал тежи позитивној он тежи негативној бесконачности.



Слика 2.1: Поређење Шварцшилдовог и Њутновог потенцијала

Са ових графика можемо закључити више ствари:

- За  $\bar{E} > 0$  имамо невезане орбите (у Њутновом случају то су хиперболе)
- За  $\bar{E} < 0$  имамо везане орбите (у Њутновом случају то су елипсе)
- Када је  $\frac{d\bar{V}}{dr} = 0$  могуће су кружне орбите

Међутим у Шварцшилдовом случају имамо још додатних могућности:

- Као што је већ речено за  $r \rightarrow 0$ ,  $\bar{V}_{eff}$  тежи бесконачности
- За довољно велико  $\bar{E}$  постоје орбите које завршавају у  $r = 0$  и
- Постоји и стабилна и нестабилна кружна орбита

Једначина 2.16 заједно са 2.12 и 2.13 представља једначину кретања тела коју сада можемо решити. Међутим не постоји једниствен начин за решавање једначина кретања тако да се нећемо фокусирати на решавање 2.16 јер нам неће помоћи у даљем раду.

Решење једначине 2.16 је објаснило аномалију коју су астрономи уочили у 19. веку а то је прецесија перихела Меркура. Наиме по Њутновој теорији планете би требало да се крећу по стабилним орбитама, ипак за орбиту Меркура је уочено да ротира. Све до појаве овог решења сматрало се да између Сунца и Меркура постоји још једна планета

и то што је Ајнштајн показао да се експериментални подаци савршено поклапају са његовом теоријом, представљало је једну од првих великих потврда ОТО-а.

Сада ћемо стати са даљом дискусијом о ОТО у четири димензије и у следећем поглављу ћемо се позабавити са њеним основама у 3Д. Осврнимо се још једном на оно што је урађено у овом поглављу, јер ће нам бити значајно касније. Извели смо геодезијску једначину из дефиниције геодезика, затим смо у исту ту једначину убацили Шварцшилдову метрику и користећи индетитет  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$  добили једначину кретања тела. Помоћу графика закључили смо нешто о орбитама тела и видели да метод за решавање једначина кретања није јединствен.

# Глава 3

## 3Д гравитација и БТЗ црна рупа

### 3.1 3Д гравитација

У уводу смо се дотакли приче о неспојивости квантне механике са ОТП-ом, а сада ћемо и навести разлоге. Можда и прва ставка која се намеће јесте различит поглед ове две теорије на концепт времена. Наиме, у ОТП време учествује активно у динамици тела и у обликовању простора (то и јесте једна од главних одлика ове теорије и СТР-а), док се време у квантној механици понаша као позадински параметар, слично времену у класичној физици.

Друга, мање очигледна разлика, јесте инваријантност ОТП-а на трансформације координата, насупрот квантној механици која захтева статичку позадину и нема ту особину инваријантности.

Трећа и једна од најважнијих разлика јесте неренормализабилност ОТП-а. Ренормализабилност, укратко, представља низ техника да се "среде" бесконачности у теорији (за детаље [2]) и користи се стално у квантној механици. Међутим показано је да ОТП није подложна ренормализацији те је неподобна за проучавање квантних ефеката.

Са овим на уму, видимо да квантовање гравитације није лак задатак и да захтева нову теорију. Природно је потражити поједностављења ОТП-а и покушати спајање са квантном механиком у том, чисто теоријском, облику. Тема овог рада јесте једно такво поједностављење тј. разматрање ОТП-а у 3 димензије, две просторне и једној временској.

Испоставило се да је овакав приступ јако погодан и да уноси многа поједностављења, о којима не можемо сада причати јер захтевају увођење нових, напредних појмова. Ипак, вреди истаћи неке од особина ове теорије: рачун се знатно поједностављује; у вакууму простор је раван (за разлику од 4Д случаја када у вакууму можемо имати гравитационе таласе и сл.); у вакууму не постоји динамика; теорија нема добар Њутнов лимес; теорија постаје ренормализована. Последња од ових особина је јако значајна када долази до спајање ове теорије са квантном механиком. Међутим, све укупно, чини се да теорија

има више негативних страна него позитивних, чини се да је тривијална и чињеница да нема Њутном лимес је обесхрабрујућа зато што то значи да ћемо добијати различита решења од оних у 4Д случају. Можда из ових разлога је прошло 30 година од првог разматрања 3Д гравитације 1963. године, до озбиљнијих разматрања исте.

## 3.2 БТЗ црна рупа

Прекретница настаје 1992. када су тројица аутора, Банадос (*Banados*), Тејтелбојм (*Teitelboim*) и Занели (*Zanelli*) нашли решење за црну рупу, које је названо БТЗ по њима [3]. Ово решење је одмах постало предмет опширних истраживања и до данас је ово једина решена квантна црна рупа. На даље ћемо видети какве особине она дели са реалном 4Д црном рупом, које су јако битне у будућим настојањима да се кватнује гравитација. Због значајности овог решења, корисно је испитати његову структуру геодезика, тј. путања слободних тела, као што је рађено за Шварцшилдову црну рупу, што ћемо сада и урадити.

Као што смо видели у другом поглављу, да би решили геодезијске једначине потребна нам је метрика простора. Метрика БТЗ црне рупе је дата са [4]<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2 \\ N^2 &= -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \\ N^\phi &= -\frac{J}{2r^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Где константе  $M$  и  $J$  представљају масу и ангуларни момент црне рупе, редом, а величина  $l$  је дефинисана као  $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ .

Оно што нам одмах постаје јасно, јесте то да функција  $N$  нестаје за две вредности координате  $r$  која су решење квадратне једначине:

$$r_{\pm} = lM^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2}}{2} \right] \quad (3.2)$$

Примећујемо овде сличност са Шварцшилдовом црном рупом код које такође постоји одређена вредност координате  $r$  при којој функција уз координате  $r$  и  $t$  постаје једнака нули. Ово нас уверава да дато решење заиста представља црну рупу. Сада пратимо

<sup>1</sup>као и код Шварцшилдове метрике, нећемо улазити у детаље њеног налажења

<sup>2</sup> $\Lambda$  је константа позната као космолошка константа и има везе са начином на који се наш универзум шири. 4Д гравитацију је могуће дефинисати без ње, док су сва решења у 3Д гравитацији тривијална ако ставимо  $\Lambda = 0$ . Више о космолошкој константи и начину на који утиче на космологију може се наћи у [1]

поступак јако сличан оном у 4Д случају за долажење до једначина кретања. Компоненте метричког тензора су (он сада има 9 компоненти јер радимо у 3 димензије):

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} M - \frac{r^2}{l^2} & 0 & -\frac{J}{2} \\ 0 & \frac{1}{N^2} & 0 \\ -\frac{J}{2} & 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Када у 2.9 заменимо  $\alpha \rightarrow t$  добијамо:

$$g_{t\mu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} = const.$$

У горњој једначини имамо два ненулта сабирка  $g_{tt}$  и  $g_{t\phi}$  па је можемо расписати као:

$$\left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right) \left(\frac{dt}{d\sigma}\right) + \frac{J}{2} \left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right) = E \quad (3.4)$$

Где је  $E$  само ознака за константу и у овом случају нема везе са енергијом тела. Даље, ако заменимо  $\alpha \rightarrow \phi$ :

$$g_{\phi\mu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} = const.$$

И слично као за  $t$  имамо две ненулте компоненте:

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right) - \frac{J}{2} \left(\frac{dt}{d\sigma}\right) = L \quad (3.5)$$

Ради лакшег рачуна уводимо следећа рескалирања:

$$\hat{r} = \frac{r}{l\sqrt{M}} \quad \hat{\phi} = \phi\sqrt{M} \quad \hat{t} = \frac{\sqrt{M}}{l}t \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma}{l} \quad \hat{E} = \frac{E}{\sqrt{M}} \quad \hat{L} = \frac{L}{l\sqrt{l}} \quad \hat{J} = \frac{J}{lM}$$

Користећи једначине 3.4 и 3.5 лако долазимо до следећих израза за  $\hat{t}$  и  $\hat{\phi}^3$  (капице изнад величина нећемо писати, на даље се подразумевају):

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{Er^2 - \frac{1}{2}JL}{r^2N^2} \\ \hat{\phi} &= \frac{L(r^2 - 1) + \frac{1}{2}JE}{r^2N^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Следећи корак јесте да одредимо  $\dot{r}$ , међутим, као и у 4Д случају, превише компоненти метричког тензора зависи од  $r$  да би користили једначину 2.9, па ћемо уместо тога искористи 2.15 али у општијем облику  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -m^2$  где је  $m = 1$  за масивна, а  $m = 0$  за безмасена тела. Након сређивања добијамо:

$$r^2\dot{r}^2 = -m^2r^4 + r^2(m^2 + E^2 - L^2) + L^2 - JEL - \frac{m^2J^2}{4} \quad (3.7)$$

---

<sup>3</sup>тачка изнад величина означава извод по параметру  $\sigma$

Једначину 3.7 можемо лако решити раздвајањем променљивих и интеграцијом на следећи начин:

$$\int d\sigma = \int \frac{dr}{\sqrt{-m^2 r^2 + \alpha + \frac{\beta}{r^2}}} \quad (3.8)$$

$$\alpha = E^2 + L^2 + m^2$$

$$\beta = L^2 - JEL - \frac{m^2 J^2}{4}$$

У зависности од параметара  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $m$  добијамо различита решења:

1. Безмасене честице  $m = 0$

$$r^2(\sigma) = \begin{cases} \alpha(\sigma - \sigma_0) - \frac{\beta}{\alpha}, & \text{ако } \alpha \neq 0 \text{ и } \beta \neq 0 \\ 2\sqrt{\beta}(\sigma - \sigma_0), & \text{ако } \alpha = 0 \text{ и } \beta \neq 0 \\ const., & \text{ако } \alpha = 0 \text{ и } \beta = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

2. Масивне  $m = 1$

$$r^2(\sigma) = \frac{1}{2}[\alpha + \gamma \sin(2(\sigma - \sigma_0))] \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta} \quad (3.10)$$

Из једначина 3.9 можемо уочити пар занимљивих резултата: безмасена тела могу у сва три случаја да побегну из црне рупе ( $r$  није ограничено одозго) и још занимљивије видимо да када је  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$  постоје кружне орбите за произвољан полупречник путање. Ово се дешава када важи  $E^2 = L^2$  и  $|J| = 1$ , случај који се зове *екстремна црна рупа*.

У случају тела са ненултом масом, видимо доста другачије понашање. Наиме радијус на које тело може да се одаљи од црне рупе је увек ограничен одозго, дакле, масивна тела не могу побећи из црне рупе. Међутим ако је  $\alpha > |\gamma|$  постоји и доња граница за радијус која је већа од нуле, тј. тело не завршава у центру црне рупе. Претходни услов се своди на  $\alpha > 0$  и  $\beta < 0$ , а како је за  $\beta < 0$  потребно да  $|J| \neq 0$ , то значи да у статичкој рупи сва масивна тела завршавају у центру црне рупе.

Још један начин да испитамо кретање тела јесте да погледамо понашање ефективног потенцијала. Уочимо да је 3.7 квадратна једначина по  $E$  тако да је можемо преписати у следећем облику:

$$\dot{r}^2 = (E - V_{eff}^-)(E - V_{eff}^+) \quad (3.11)$$

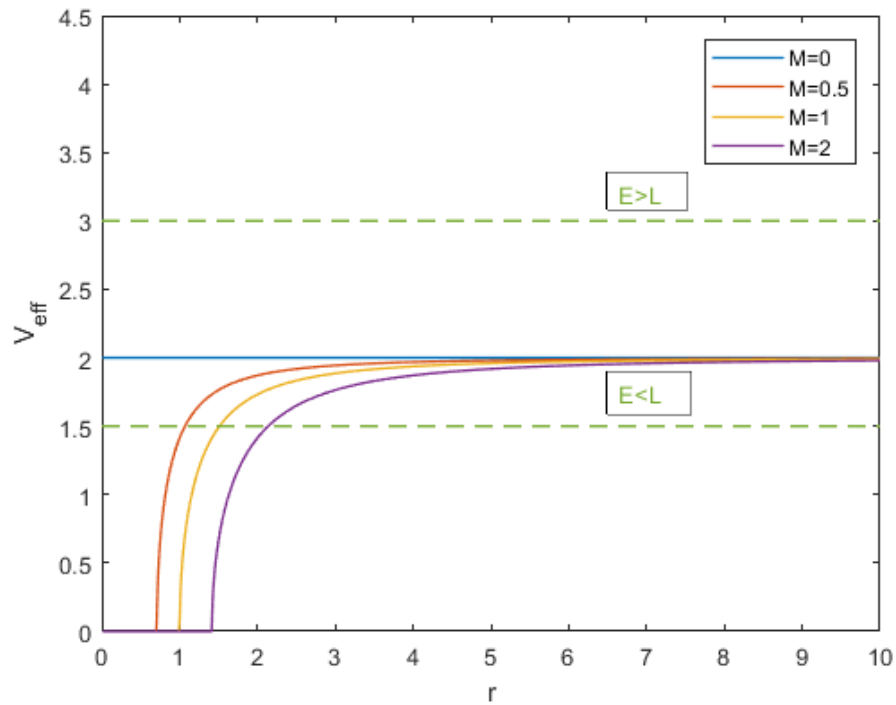
Где је:

$$V_{eff}^{\pm} = \frac{JL}{2r^2} \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{(r^2 - r_-^2)(r^2 - r_+^2)(L^2 + m^2 r^2)} \quad (3.12)$$

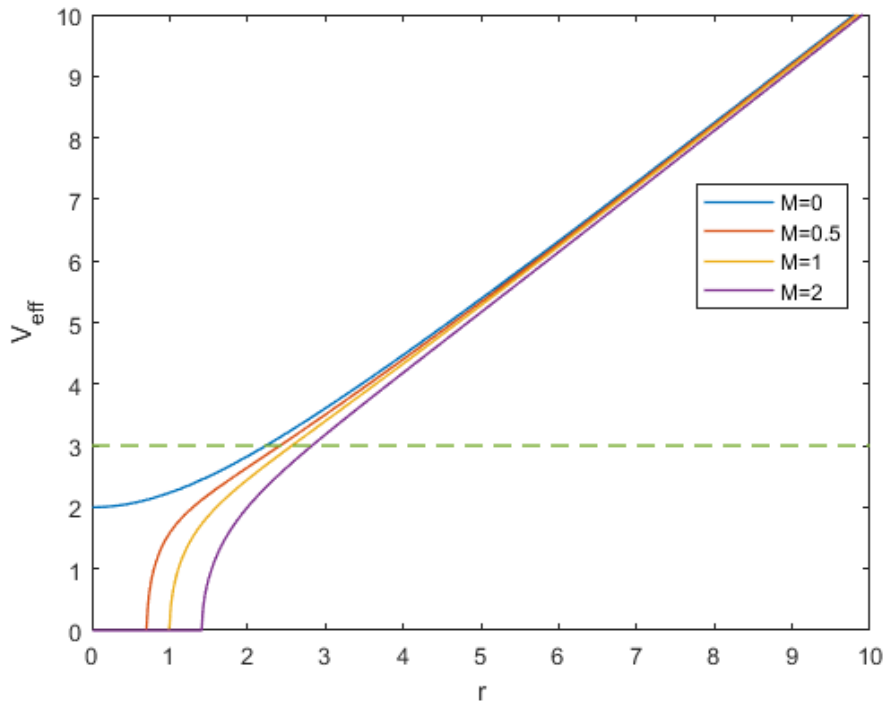


### 3.3 Резултати

Графици ефективног потенцијала за безмасена и масивна тела и  $J = 0$  дати су на сликама 3.1 и 3.2. За безмасена тела имамо да могу остати заробљена у црној рупи ако важи  $E < L$ , а у супротном могу да побегну из њеног поља. Кружне орбите не постоје осим у случају  $M = 0$  када, како је раније напоменуто, постоје и то произвољног полупречника.



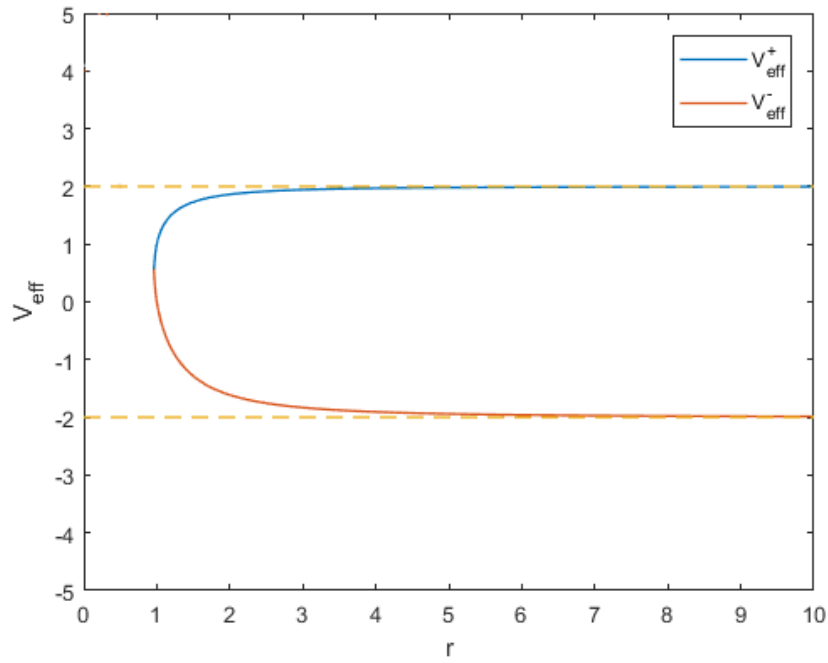
Слика 3.1: Вредност  $V_{\text{eff}}^+$  за различите вредности  $r$  и  $M$



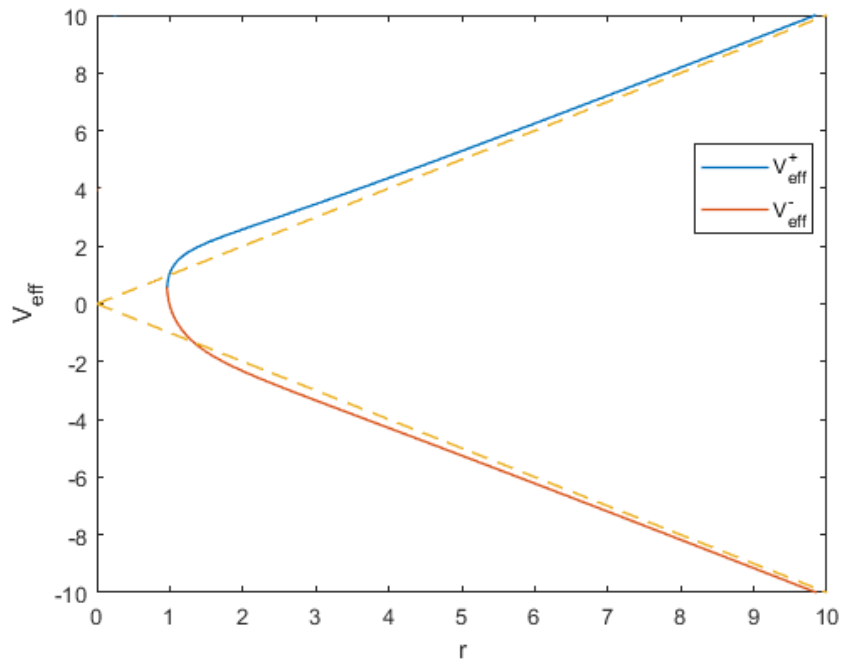
Слика 3.2: Вредност  $V_{eff}^+$  за различите вредности  $r$  и  $M$

Код масивних тела имамо другачију ситуацију, видимо да за било коју вредност енергије тела, она завршавају у центру црне рупе. Разлог за то јесте коса асимптота  $y = r$  и непостојање локалног минимума. Код безмасених тела смо имали хоризонталну асимптоту  $y = L$  па су тела са енергијом већом од  $L$  могла да побегну.

Ротирајући случај се не разликује пуно по особинама путања од статичког. Са графика 3.3 и 3.4 видимо да опет у безмасеном случају имамо хоризонталну асимптоту, као и да у ротационом имамо косу. Ово значи да опет само безмасена тела могу побећи из поља црне рупе.

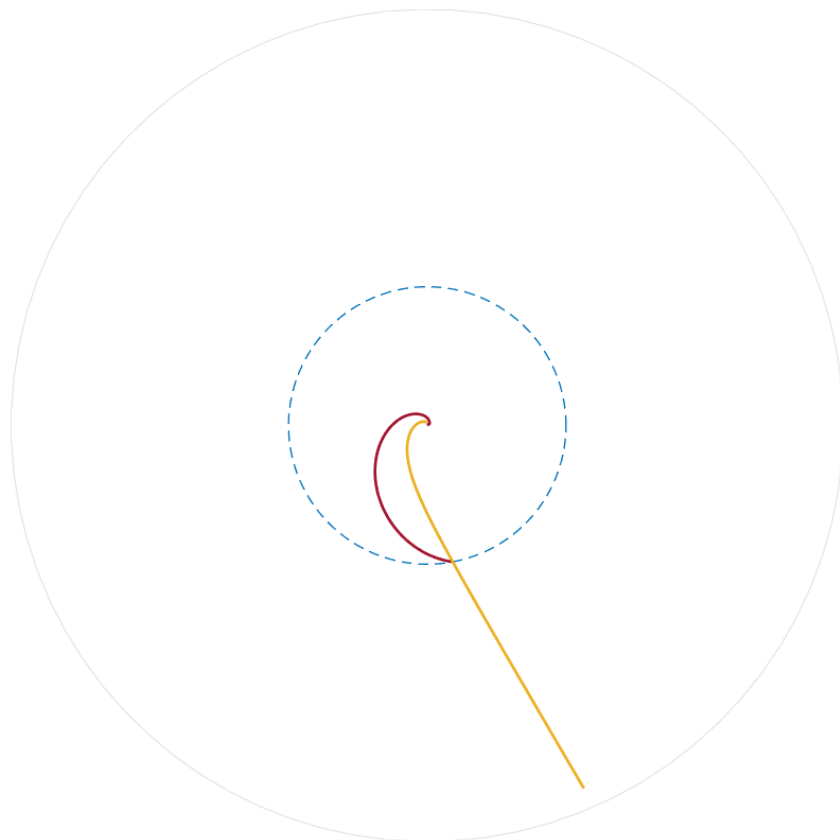


Слика 3.3: Вредност  $V_{eff}$  за различите вредности  $r$  и  $M$  у ротирајућем случају (испрекидане линије представљају асимптоте)

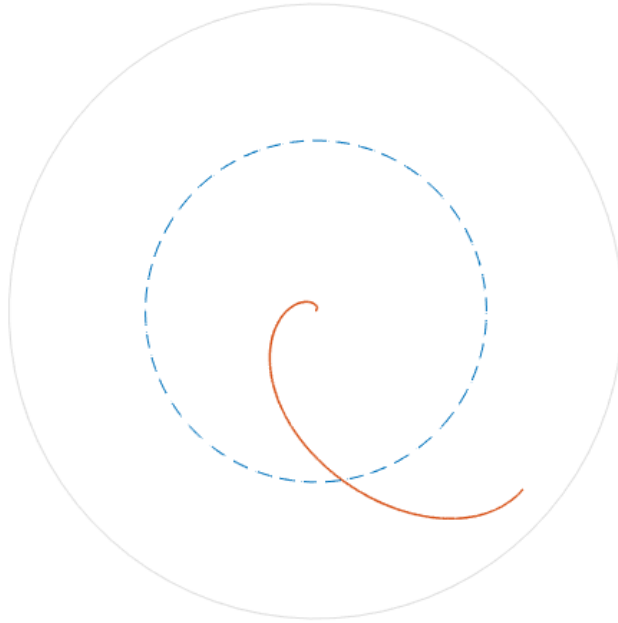


Слика 3.4: Вредност  $V_{eff}$  за различите вредности  $r$  и  $M$  у ротирајућем случају (испрекидане линије представљају асимптоте)

За потпунију анализу трајекторија потребна су нам егзактна решења једначина 3.6, која се за разлику од 3.7, не могу решити толико једноставно (њихово решавање се опет своди на интеграцију, међутим доста комплексније функције). Због тога су само дата решења у Додатку Б, а овде ћемо представити неке од карактеристичних путања тела.

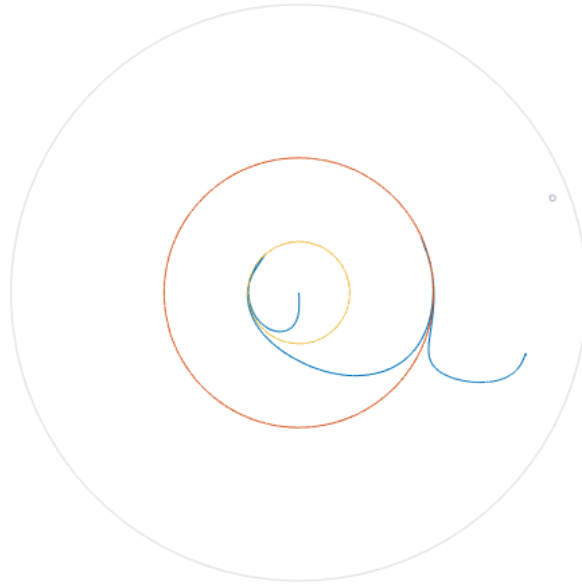


Слика 3.5: Трајекторија безмасеног тела у статичком случају (црвена линија  $L > E$ ; жута  $L < E$ ; испрекидана плава је круг полупречника  $r_+$ )

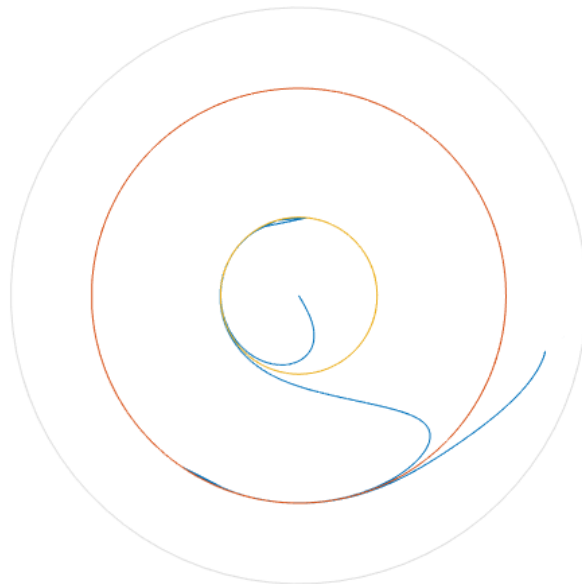


Слика 3.6: Трајекторија масивног тела у статичком случају (испрекидана плава крива је круг полупречника  $r_+$ )

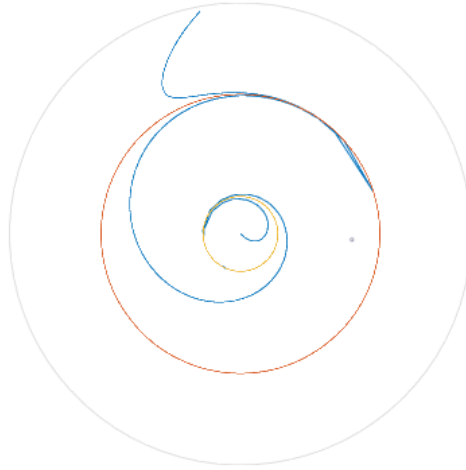
Са слике 3.5 се види да при већој вредности параметра  $E$  путања тела је "исправљенија" него у случају када је  $L > E$ . Такође можемо приметити да не постоји нагла промена у путањи при прелазу хоризонта  $r_+$  за оба тела (полупречник  $r_-$  није уцртан на графику зато што је једнак нули у статичкој црној рупи).



Слика 3.7: Трајекторија масивног тела у ротирајућој црној рупи ( $J = -0.5$ ; црвена и жута линија су редом  $r_+$  и  $r_-$ )



Слика 3.8: Трајекторија масивног тела у ротирајућој црној рупи ( $J = +0.5$ ; црвена и жута линија су редом  $r_+$  и  $r_-$ )



Слика 3.9: Трајекторија безмасеног тела у ротирајућој црној рупи ( $J = -0.5$ ; црвена и жута линија су редом  $r_+$  и  $r_-$ )

Решења за ротирајућу црну рупу су нешто занимљивија због појаве два хоризонта на  $r_+$  и  $r_-$ . За масивна тела су дате две трајекторије  $J = 0.5$  и  $J = -0.5$ , док је за безмасено тело представљена путања за  $J = -0.5$ . Видимо да све три путање дивергирају на хоризонтима (то се може видети и на основу једначина у Додатку Б), за разлику од статичке црне рупе, такође се види да тела мењају смер кретања при проласку кроз хоризонт. Са слика 3.7 и 3.9 видимо приметну сличност у кретању масивних и безмасених тела.

За крај ћемо се осврнути на сличности овог решења са 4Д гравитацијом, како овде изведених тако и оних којих излазе из оквира овог рада. Прво, ефективни потенцијали имају сличне одлике као у Шварцшилдовом случају, што се може видети на сликама 2.1, 3.1, 3.5. Показано је да БТЗ црна рупа представља финално стање колапсирања материје [5], и то на сличан начин као што сте се ради у Шварцшилдовом случају. Аналогије постоје и у оквирима термодинамике, где је показано [6] да ентропија БТЗ црне рупе зависи од њеног обима, што се слаже са формулом за ентропију у 4Д случају, где она зависи од површине црне рупе. Такође, ова црна рупа се повинује *no – hair* теореме, која тврди да се црна рупа може у потпуности описати са три параметра: њеном масом, ангуларним моментом и наелектрисањем. Једна од сличности изведених у овом раду јесте постојање два хоризонта за ротирајућу црну рупу, што се поклапа са Кервовом црном рупом<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Керова (*Kerr*) црна рупа је генерализација Шварцшилдове црне рупе, тј. ротирајућа црна рупа у 4Д. Простор између два хоризонта назива се ергосфера, који је такође присутан код БТЗ црне рупе.

## Глава 4

### Закључак

У овом раду бавили смо се модерним теоријама гравитације, општом теоријом релативности и њеном формулацијом у 3 димензије. Како градиво ОТП-а превазилази школско градиво, на почетку рада дате су основе ове теорије као и поступак извођења једначина кретања тела полазећи од метрике простора. Глава 3 се бави уводом у 3Д гравитацију, њеним основним особинама као и предностима и манама те теорије. На самом крају представљено је једно решење у оквиру 3Д гравитације, БТЗ црна рупа. Готово истим поступком као и у 4Д случају, дошли смо до једначина кретања тела, које су касније анализиране методом ефективног потенцијала. Дата су и егзактна решења за трајекторије тела, и нека од њих су представљена графички. Прокоментарисана је и значајност овог решења у модерним теоријама кватне гравитације, као и његова сличност са 4Д гравитацијом. Из свега овога закључујемо да је 3Д гравитација област коју итекако треба истражити и у њој потражити модел за квантовање гравитације, које је тренутно једно од најбитнијих питања у теоријској физици.

Што се тиче самог БТЗ решења постоји пар предлога за његово даље испитивање. Један је разматрање наелектрисане црне рупе, пошто је познато да се у 4Д гравитацији наелектрисане црне рупе понашају другачије од ненаелектрисаних. Такође би било занимљиво испитати да ли тела у пољу 3Д црних рупа прецесирају као што је то случај са њиховим 4Д аналозима.



# Додатак А

У редовној настави брзина у СТР се дефинише исто као и у класичној механици. Ипак испоставља се да је брзину боље дефинисати преко сопственог времена  $u = \frac{dx}{d\tau}$  из разлога које ћемо сада видети. Класична трансформација брзина из једног у други инерцијални систем који се креће брзином  $\beta^1$  дуж  $x$ -осе:

$$v'_x = \frac{v_x - \beta}{1 - v_x\beta} \quad v'_y = \frac{v_y\gamma}{1 - v_x\beta} \quad v'_z = \frac{v_z\gamma}{1 - v_x\beta}$$

Као што видимо трансформације дате горњом једначином су нелинеарне. Са друге стране, за четворовектор брзине дефинисан са:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^t \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{bmatrix}$$

Трансформација је дата са:

$$\mathbf{u}' = \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{bmatrix} = \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^t \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{bmatrix}$$

Видимо да је трансформација линеарна и једноставна, дата Лоренцовом матрицом.

---

<sup>1</sup> $\beta$  је дефинисано као  $\frac{V}{c}$  где је  $V$  брзина инерцијалног система, али пошто смо ставили да је  $c = 1$ ,  $V$  постаје само  $\beta$ . Такође  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

## Додатак Б

Овде ћемо представити решења једначина 3.6 подељених у три случаја  $J = 0$ ,  $|J| < 1$  и  $J = 1$ . Ради лакшег записа уводимо следеће функције:

$$f(x; B; C) = \log \left| \frac{x}{2C\sqrt{-m^2x^2 + Bx + C^2} + 2C^2 + Bx} \right|$$

$$R(x; B; C) = \sqrt{-m^2x^2 + Bx + C^2}$$

Решења су сада дата са:

1.  $J = 0$

$$\phi = \pm \frac{1}{2} f(r^2; E^2 - L^2 + m^2; L) + \phi_0$$

$$t = \pm \frac{1}{2} f(r^2 - 1; E^2 - L^2 - m^2; E) + t_0$$

2.  $|J| < 1$

$$\phi = \pm \frac{J}{4\sqrt{1-J^2}} \left[ \frac{1}{r_+} f(r^2 - r_+^2; B_+; C_+) - \frac{1}{r_-} f(r^2 - r_-^2; B_-; C_-) \right] + \phi_0^2$$

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{1-J^2}} \left[ r_+ f(r^2 - r_+^2; B_+; C_+) - r_- f(r^2 - r_-^2; B_-; C_-) \right] + t_0$$

3.  $J = 1$

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{1}{8}} J \left[ f(x; B; C) + \frac{R(x; B; C)}{Cx} \right] + \phi_0$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{1}{8}} J \left[ f(x; B; C) - \frac{R(x; B; C)}{Cx} \right] + t_0^3$$

---

<sup>2</sup> $B_{\pm} = E^2 - L^2 + m^2(1 - 2r_{\pm}^2)$  и  $C_{\pm} = r_{\pm} \left( E - \frac{JL}{2r_{\pm}^2} \right)$

<sup>3</sup> $B = E^2 - L^2$  и  $C = \sqrt{\frac{1}{2}}(E - L \operatorname{sgn} J)$

# Литература

- [1] Thomas A. Moore *A General Relativity Workbook*. Pomona College 2010.
- [2] *Renormalization* <https://en.wikipedia.org/wiki/Renormalization>, приступљено мај 2020.
- [3] Máximo Bañados, Claudio Teitelboim, Jorge Zanelli,  
*The Black Hole in Three Dimensional Space Time*, arXiv [hep-th/9204099] 1992.
- [4] Norman Cruz, Cristian Martinez, Leda Pena,  
*Geodesic structure of the 2 + 1 black hole*, arXiv [gr-qc/9401025] 1994.
- [5] S.F. Ross, R.B. Mann  
*Gravitationally Collapsing Dust in (2+1) Dimensions*, arXiv [hep-th/9208036] 1992.
- [6] Vivek Iyer, Robert M. Wald  
*A comparison of Noether charge and Euclidean methods for Computing the Entropy of Stationary Black Holes*, arXiv [gr-qc/9503052] 1995.
- [7] Марија Томашевић  
*Кретање честица у пољу ОТТ црне рупе*, Физички факултет 2017.
- [8] Бранислав Цветковић  
*Асимптотска структура тродимензионе гравитације са торзијом*, Физички факултет 2007.