

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Математички билијари, Галперинов алгоритам за одређивање броја π и Понселеова теорема

Ученик
Василије ИВАНОВИЋ,
IVд

Ментор
др Борислав ГАЈИЋ

Београд, 16. јун 2023.

Садржај

1	Увод	1
1.1	Увод у билијаре	1
1.2	Примене у елементарној теорији бројева	3
1.3	Троугаони билијар	5
2	Елиптични билијари	7
2.1	Основе билијара уписаног у елипсу	7
2.2	Понселеова Теорема	9
3	Галперинов алгоритам	22
3.1	Увод	22
3.2	Теорема	23
3.3	Конфигурација и конфигурациони простор	23
3.4	Алгебарски део доказа	27
4	Закључак	28
	Литература	28

1

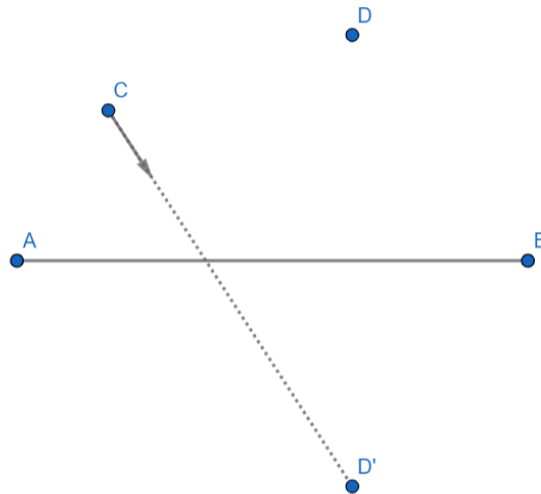
Увод

1.1 Увод у билијаре

Старо и веома познато питање, како треба ударити куглу, тако да се она прво одбије о зид и погоди другу куглу?



Кључна претпоставка у овом питању је да ће угао под којим кугла долази до зида да буде једнак углу под којим ће се она и одбити. Знамо да се овај проблем лако решава. Потребно је куглом из тачке C гађати тачку која се добије када тачку D пресликамо у односу на зид (права AB).



Сада већ можемо да уведемо дефиницију билијара. Битно је напоменути да се билијар може дефинисати и у више димензија, али ћемо се ми бавити само билијарима у равни.

Дефиниција 1.1. Билијар у равни је систем који се састоји од ограђене области са диференцијабилним ивицама, осим у коначно много тачака, и кугле која се креће по следећим законима:

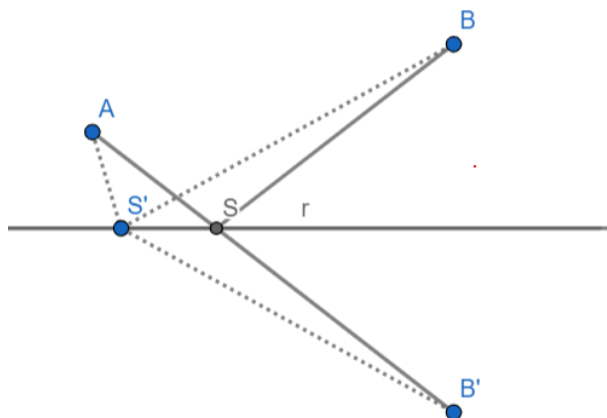
- до наиласка на препреку не мења свој вектор брзине
- приликом одбијања о препреку не долази до промене интензитета брзине
- да упадни угао приликом одбијања о препреку буде једнак одбојном углу

Шта се дешава када препрека на коју тачка наилази није равна линија?

Дефиниција 1.2. Упадни и одбојни угао за криволинијску препреку се дефинишу као углови између путање лоптице пре, односно после одбијања и тангенте на ивицу области у тачки контакта.

Теорема 1.1. Минимална путања између две тачке (A и B) која сече неку праву r , је управо билијарска путања од A до B са једним одбијањем о праву r .

Доказ. Посматрајмо тачке A , B и праву r . Нека је тачка B' рефлексја тачке B у односу на r . Нека је тачка пресека дужи AB' са правом r , тачка S . Узмимо произвољну тачку S' на правој r . Потребно је доказати да је $AS' + S'B < AS + SB$. Знамо да је $BS = B'S$ као и $BS' = B'S'$, па је због неједнакости троугла $AS' + BS' = AS' + B'S' < AB' = AS + SB' = AS + BS$.



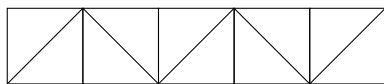
□

1.2 Примене у елементарној теорији бројева

Бројањем одбијања лоптице у одређеном билијару, могуће је одредити НЗД и НЗС два броја. Посматрајмо билијар сачињен од правоугаоника димензија $n \times t$ и лоптице која креће из доњег левог угла. Лоптица креће са брзином \vec{v} усмерене под углом од 45° . Сматрајмо да лоптица завршава своје кретање кад дође до неког темена правоугаоника.

Теорема 1.2. Билијарска путања неће пресећи саму себе ако $t|n$ или $n|m$.

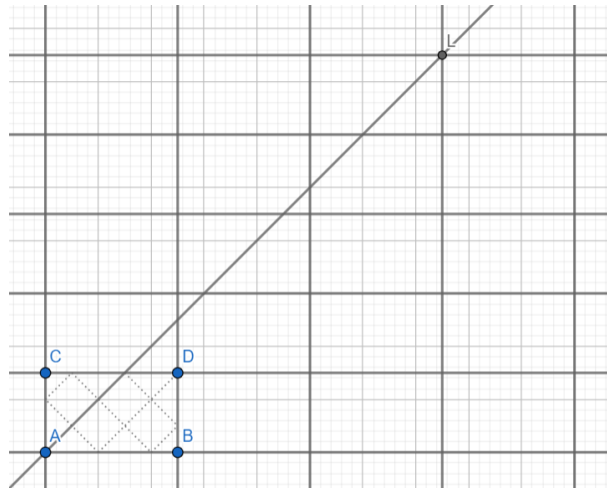
Доказ. Претпоставимо да је $n \leq t$, дакле $t = kn$ и правоугаоник је висине n и ширине t . Тај правоугаоник можемо да поделимо на k квадрата димензија $n \times n$. Билијарска путања ће у сваком квадрату представљати његову дијагоналу. Одатле је јасно да неће бити одбијања о леву ивицу правоугаоника, па неће доћи ни до самопресецања.



□

Теорема 1.3. Нека је l број додира лоптице о леву страну правоугаоника, r број додира о десну, u број додира о горњу и d број додира о доњу ивицу. У ове контакте не рачунамо први и последњи контакт кугле са ивицама.

Тада важи $(l + r + 1)t = (u + d + 1)n = \text{НЗС}(t, n)$



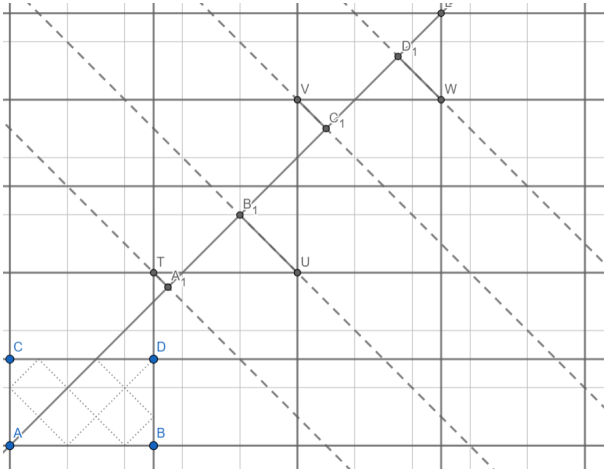
Слика 1.1. Пример за $m = 5, n = 3$

доказ. Посматрајмо правоугаону мрежу у равни чија је основна јединица наш правоугаоник димензија $n \times m$. Напоменимо да свакој билијарској путањи у правоугаонику, одговара јединствена полуправа у равни. Да би нека права одговарала билијарској путањи, неопходно је да права садржи тачку из које креће лоптица. Ако је билијарска путања b_1 , онда нек права која јој одговара буде $f(b_1)$. Посматрајмо број удара наше лоптице о зидове правоугаоника у билијарској путањи b_1 . Тај број једнак је броју линија мреже коју права $f(b_1)$ пресеке. Јасно је да сваки пресек са хоризонталним линијама мреже одговара неком од одбијања о хоризонталну ивицу, аналогно сваком пресеку $f(b_1)$ и вертикалне линије мреже одговара тачно један ударац лоптице у билијарској путањи о вертикалну ивицу. Долазак лоптице до неког од ћошкова правоугаоника у билијарској путањи, одговара пресецању праве $f(b_1)$ и неке од тачака пресека хоризонталних и вертикалних линија у нашој мрежи. Нек је S скуп тачака које се налазе на пресеку праве $f(b_1)$ и неке од хоризонталних линија мреже. Одаберимо за тачку $L \in S$ да буде најближа координатном почетку. С обзиром да L је на некој од хоризонталних линија мреже, њена x координата може да се изрази као $k_1 n$, аналогно јер L припада некој од вертикалних линија мреже, њена y координата може да се изрази као $k_2 m$. Надаље је јасно да су x и y координате тачке L међусобно једнаке НЗС у од m и n . Ми заправо знамо да је k_1 такође једнак и броју пресека $f(b_1)$ са хоризонталним линијама мреже плус један. С обзиром да је број пресека дужи AL и хоризонталних линија заправо број одбијања о хоризонталне ивице у билијарској путањи, то је $k_1 = u + d + 1$. Аналогно се докаже и друга једнакост.

□

Теорема 1.1. Дужина дужи, од почетка билијарске путање до првог самопресецања, или одбијања о ивицу, је једнака $\sqrt{2}$ НЗС(m, n).

Доказ. Нек је тачка P прва тачка одбијања о ивицу у нашој билијарској путањи. Сваком пресеку дужи AP и билијарске путање одговара један пресек $f(b_1)$ и праве која садржи неко теме мреже правоугаоника која има коефицијент правца -1 . Посматрајмо неки од правоугаоника мреже кроз који пролази полуправа $f(b_1)$. Обележимо горње лево теме тог правоугоника мреже са $(x_1, y_1) = (k_1m, k_2n)$. Онда је дужина од те тачке до пресека са $f(b_1)$ само раздаљина те тачке до праве $y = x$, што се лако рачуна као $\sqrt{2}|k_1m - k_2n|$ и знамо да је по опште познатој теорему НЗД(m, n) само најмањи број таквог облика по апсолутној вредности, па је доказ завршен. \square



1.3 Троугаони билијар

Задатак 1. Дат је отворен угао и тачка K у његовој унутрашњости. Нађи тачке M и N на различитим крацима угла такве да троугао $\triangle KMN$ има најмањи обим.

Решење 1. Пресликавањем тачке K симетрично у односу на краке угла, добијамо тачке K' и K'_1 . Тврдимо да су M и N тачке на пресеку крака угла и дужи K'_1K' . Докажимо то.

Узмимо било које тачке на крацима, нпр. F и G . Обим троугла $\triangle KFG$ је $KF + FG + GK = K'_1F + FG + K'G < K'_1K'$ што је заправо само обим $\triangle KMN$. Коришћена неједнакост је само неједнакост четвороугла.

2

Елиптични билијари

2.1 Основе билијара уписаног у елипсу

Познато је из физике да су жижге у оптици значајне по много чему, што је додатан подстицај да се анализира шта се дешава кад билијарска путања пролази кроз жижгу.

Теорема 2.1. Билијарска путања која пролази кроз жижгу у елиптичном билијару, након једног одбијања мора проћи кроз другу жижгу.

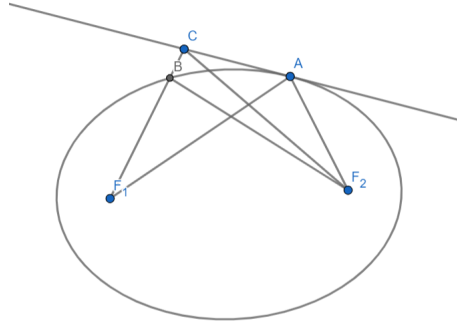
Доказ. Нека је A тачка где се кугла одбија о елипсу. Хоћемо да докажемо да је F_1A и F_2A заправо билијарска путања у овој елипси. Да би то било тачно, потребно је да је упадни угао једнак излазном углу. Зато што нам је област билијара елипса, упадни угао дефинишемо као угао између путање непосредно пре одбијања о елипсу у тачки A и тангенте у тачки A , а одбојни угао дефинишемо као угао између путање непосредно након одбијања у тачки A и тангенте у A . Сад је јасно да је потребно доказати да је путања F_1, A, F_2 заправо билијарска путања која се одбија о тангенту на елипсу у тачки A . Да би то важило, довољно је доказати да је за сваку тачку C на тангенти кроз A на елипсу, збир

$$CF_1 + CF_2 < F_1A + F_2A$$

Докажимо то. Узмимо тачку C на тангенти кроз A , Нека је B тачка пресека CF_1 и елипсе. Приметимо да због неједнакости троугла важи $BF_2 < BC + CF_2$. Због геометријског својства елипсе знамо да је

$$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 < BF_1 + BC + CF_2 = CF_1 + CF_2$$

□



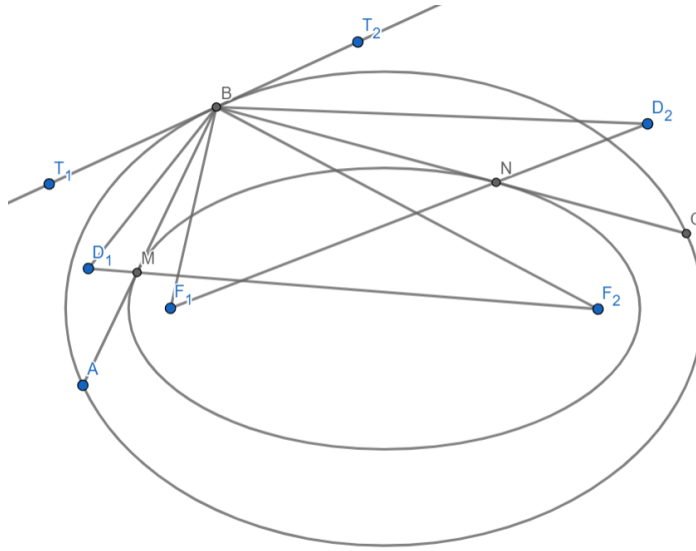
Следеће занимљиво тврђење је да ако једна дуж билијарске путање у ε тангира неку мању елипсу чије се жиже поклапају са елипсом ε у коју је упизана билијарска путања, тада свака дуж изломљене билијарске путање тангира ε .

Теорема 2.2. Нек је AB тетива елипсе ε_1 чије су жиже F_1 и F_2 , а BC је друга тетива таква да је изломљена линија ABC билијарска путања. Тад, ако је AB тангира елипсу ε_2 која има жиже у F_1 и F_2 , тад и BC тангира ту исту елипсу.

Доказ. Нек су тачке T_1 и T_2 такви да су углови $\angle F_1BT_1$ и $\angle F_2BT_2$ оштри. Приметимо да се AB налази унутар угла $\angle F_1BT_1$ и аналогно се BC налази унутар угла $\angle F_2BT_2$. Нек су D_1 и D_2 тачке осно симетричне од F_1 , односно F_2 у односу на AB и BC респективно.

Доказаћемо да је $\triangle F_1BD_2 \cong \triangle F_2BD_1$. Прво $D_1B \cong F_1B$ и $D_2B \cong F_2B$ због симетрије. Знамо из претходне теореме да је F_1BF_2 билијарска путања, одакле следи да је угао $\angle F_1BA = \angle F_2BC$. Одатле, као и из чињенице да је ABC билијарска путања, нам следи да је $\angle ABF_1 = \angle CBF_2$. Знамо да је $\angle F_1BD_2 = \angle F_1BF_2 + 2\angle F_2BC = \angle F_1BF_2 + 2\angle F_1BA = \angle F_1BF_2 + \angle D_1BF_1 = \angle D_1BF_2$ чиме смо доказали подударност троуглова $\triangle F_1BD_2 \cong \triangle F_2BD_1$ па нам је $F_1D_2 = F_2D_1$.

Нек је M тачка пресека AB и D_1F_2 . По конструкцији је јасно да изломљена линија F_2MF_1 задовољава правила билијара. Дакле $\angle AMF_1 = \angle BMF_1$, па с обзиром да дуж AB тангира елипсу ε_2 онда је M тачка додира. Дакле $F_1M + F_2M = D_1F_2 = D_2F_1$. Нек је N тачка пресека CB и F_1D_2 . Јасно је $F_2N = ND_2$ због симетрије, па је $F_1N + F_2N = F_1N + ND_2 = F_1D_2 = F_1M + F_2M$ па N припада ε_2 . При чему је $\angle BNF_1 = \angle CNF_2$ па BC заиста тангира ε_2 . \square



2.2 Понселеова Теорема

Све слике из овог поглавља су узете из првог рада који је референциран у литератури.

Теорема 2.3. Узмимо било које две конике ε_1 и ε_2 такве да постоји затворен полигон дужине n такав да је уписан у ε_1 , и свака страница му је тангентна на ε_2 . Узмимо произвољан затворен полигон дужине n уписан у ε_1 , такав да $n - 1$ његова страница додирује ε_2 . Тада свих n страница тог полигона додирују другу конику.

Да бисмо ово доказали, неопходно нам је неколико лема. Прва ствар коју ћемо да користимо као опште познате јесу теореме из пројективне геометрије које важе и на коникама.

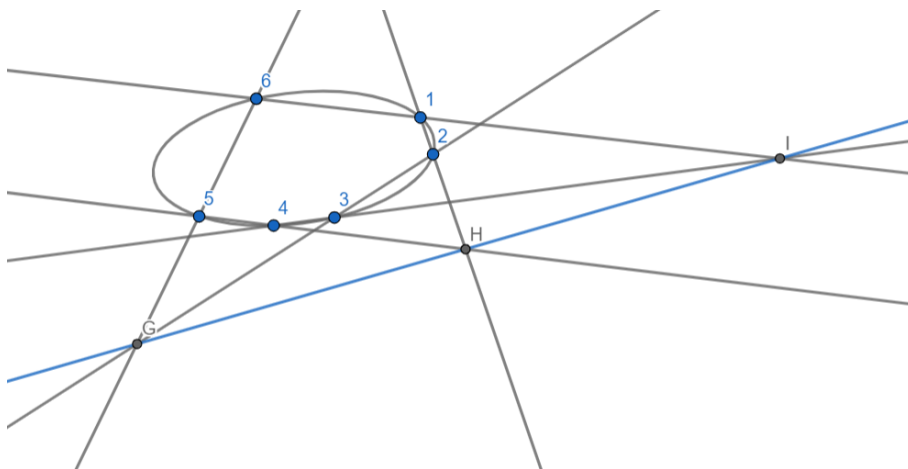
У даљој нотацији ћемо користити ознаке $a-b$ за праву која пролази кроз тачке a и b , као и $l_1 \wedge l_2$ за пресек правих l_1 и l_2 , такође кад су три тачке колинеарне то ћемо означавати са $a - b - c$. Такође ћемо заокруженим вројевима означавати дужи.

Теорема 2.1 (Паскалова теорема). Тачке 1, 2, 3, 4, 5, 6 леже на коници ако и само ако су колинеарне следеће тачке.

$$(1 - 2) \wedge (4 - 5)$$

$$(2 - 3) \wedge (5 - 6)$$

$$(3 - 4) \wedge (6 - 1)$$



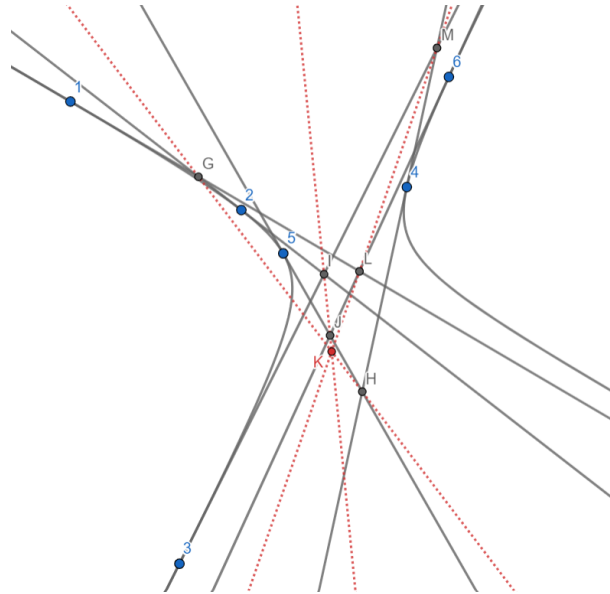
Слика 2.1. Паскалова теорема

Теорема 2.2 (Брианшонова теорема). Линије $(1), (2), (3), (4), (5), (6)$ су тангентне на конику (у тачкама 1, 2, 3, 4, 5, 6 редом) ако и само ако су конкурентне праве.

$$(1) \wedge (2) = (4) \wedge (5)$$

$$(2) \wedge (3) = (5) \wedge (6)$$

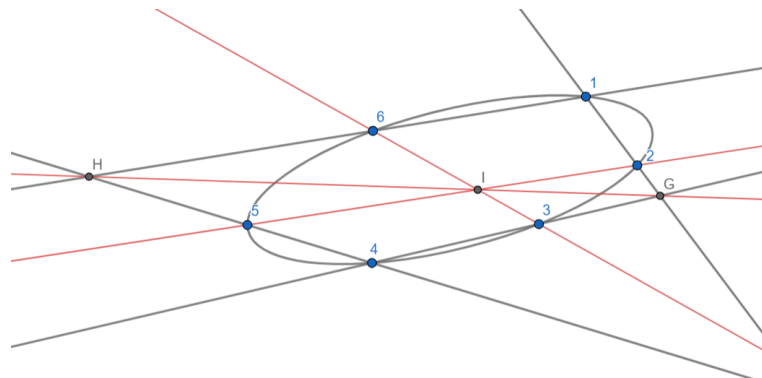
$$(3) \wedge (4) = (6) \wedge (1)$$



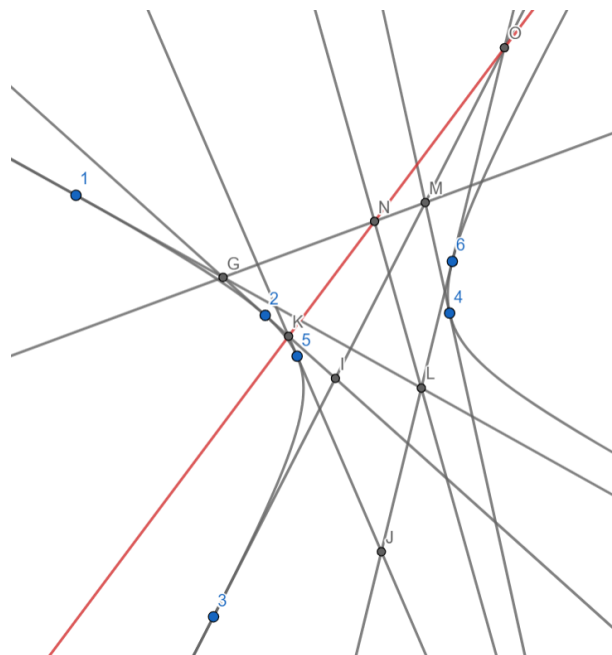
Слика 2.2. Бринашонова теорема

Теорема 2.3 (Карноова теорема). Шесет тачака припадају коници ако и само ако су конкурентне.

$$\begin{aligned}
 & [(1 - 2) \wedge (3 - 4)] - [(4 - 5) \wedge (6 - 1)] \\
 & (2 - 5) \\
 & (3 - 6)
 \end{aligned}$$



Слика 2.3. Карноова теорема за тачке



Слика 2.4. Карноова теорема за праве

Теорема 2.4 (Карноова). Шест правих су тангентне на конику ако и само ако су колинеарне тачке

$$[(\textcircled{1} \wedge \textcircled{2}) - (\textcircled{3} \wedge \textcircled{4})] \wedge [(\textcircled{4} \wedge \textcircled{5}) - (\textcircled{6} \wedge \textcircled{1})]$$

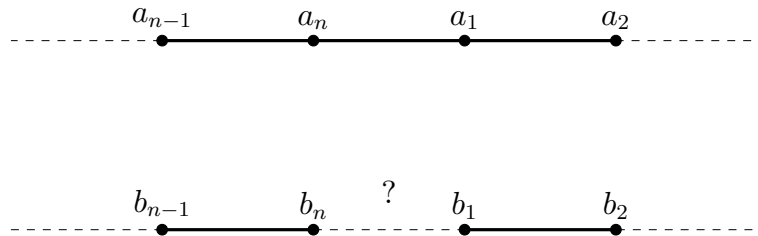
$$(\textcircled{2} \wedge \textcircled{5})$$

$$(\textcircled{3} \wedge \textcircled{6})$$

Нека су нам тачке a_1, a_2, \dots, a_n , тачке првог полигона, а b_1, b_2, \dots, b_n тачке другог полигона. Знамо да нам је n дужи $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_n - a_1$ тангентно на ε_2 , као и да нам је $n - 1$ дуж $b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_{n-1} - b_n$ тангентно на ε_2 . Сад јошсамо треба да докажемо да ће $b_n - b_1$ да буде тангентно да ε_2 .

Нека су нам тачке a_1, a_2, \dots, a_n , тачке првог полигона, а b_1, b_2, \dots, b_n тачке другог полигона. Знамо да нам је n дужи $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_n - a_1$ тангентно на ε_2 , као и да нам је $n - 1$ дуж $b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_{n-1} - b_n$ тангентно на ε_2 . Сад јошсамо треба да докажемо да ће $b_n - b_1$ да буде тангентно да ε_2 .

У наредном делу, већину тврђења ће бити скоро немогуће приказати на правој слици а да читалац нешто разуме, тако да ћемо увести специфичну графичку симболизацију. Тачке које припадају истим полигонима уписаним у ε_1 ће бити на истим правама. Све тачке из истог полигона a_n ће бити на горњој правој, док ће све тачке из полигона b_n бити на доњој правој. Ако на некој од две главне праве будемо имали две суседне тачке a_i и a_{i+1} и подебљану $a_i - a_{i+1}$ која их спаја, то ће нам представљати да права $a_i - a_{i+1}$ тангира конику ε_2 . Права између две тачке $a_{i_1} - a_{j_1}$ где a_{i_1} и a_{j_1} нису суседне тачке на истој правој на графичком приказу, ће бити представљена као нека линија (права или искривљена) која спаја те две тачке. Тачка пресека две линије x и y ће бити тачка на линији (правој или кривој) цији један крај припада линији x , а другу линији y .



Пре него што наставимо, уведимо следећу нотацију.

$$I_p := (a_p - a_{p+1}) \wedge (b_p - b_{p+1})$$

$$I_{q-1} := (a_{q-1} - a_q) \wedge (b_{q-1} - b_q)$$

$$X_{p,q} := (a_p - b_q) \wedge (b_p - a_q)$$

Лема 2.1. Три тачке дефинисане на следећи начин су колинеарне

$$I_1 := (a_1 - a_2) \wedge (b_1 - b_2)$$

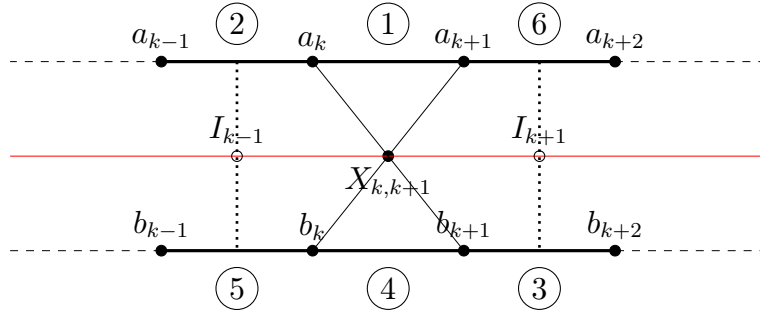
$$X_{2,n-1} := (a_2 - b_{n-1}) \wedge (b_2 - a_{n-1})$$

$$I'_{n-1} := (a_{n-1} - a_n) \wedge (b_{n-1} - b_n)$$

Идеја доказа је да узмемо неки број k око $\frac{n}{2}$ и докажемо колинеарност између $I_i, X_{i,j}, I_j$ где су прво i и j отприлике једнаки k , па да у сваком кораку i смањимо за један, а j повећамо за један. Да бисмо то показали потребна нам је неколико лема.

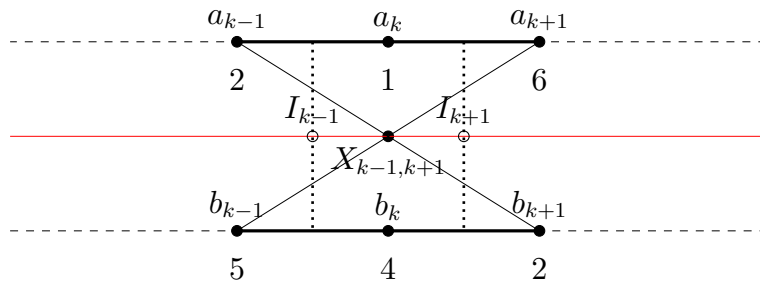
Имамо два случаја за први корак, кад је n парно и кад је непарно.

У случају да је парно, имамо да је, где је $k = \frac{n}{2}$



И по Карноовој теореме имамо да су колинеарне $I + k - 1 - X_{k, k + 1} - I_{k+1}$

У случају да је n непарно имамо да је $k = \frac{n+1}{2}$ и



У овом случају знамо по Паскаловој теореме да је $I_{k-1} - X_{k-1,k+1} - I_k$

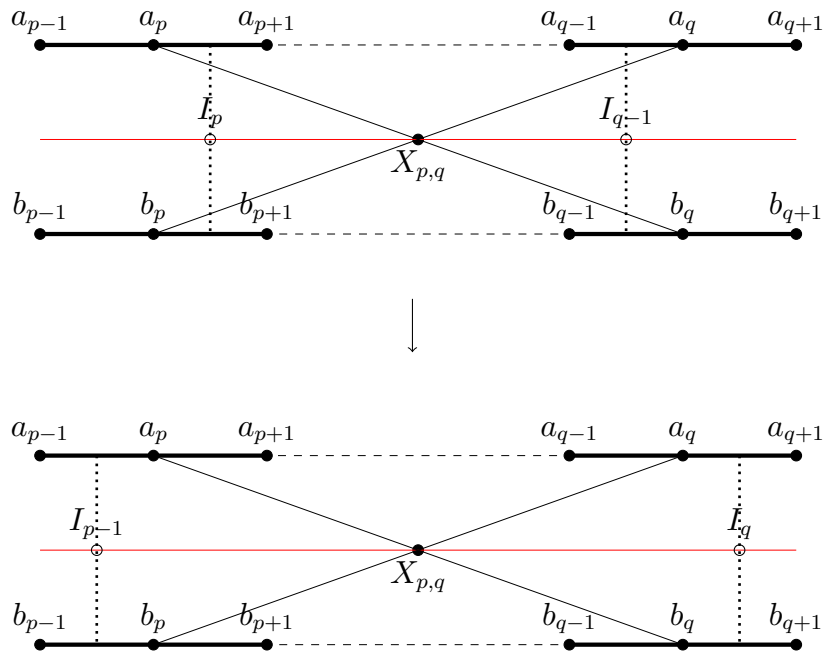
Лема 2.2. Дефинишимо тачке

$$I_p := (a_p - a_{p+1}) \wedge (b_p - b_{p+1})$$

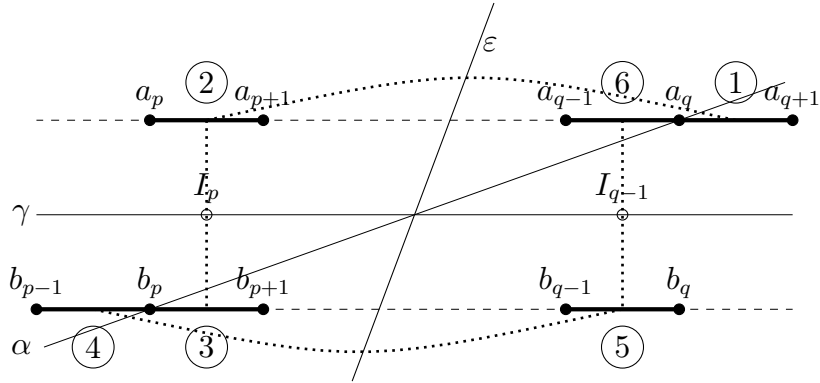
$$I_{q-1} := (a_{q-1} - a_q) \wedge (b_{q-1} - b_q)$$

$$X_{p,q} := (a_p - b_q) \wedge (b_p - a_q)$$

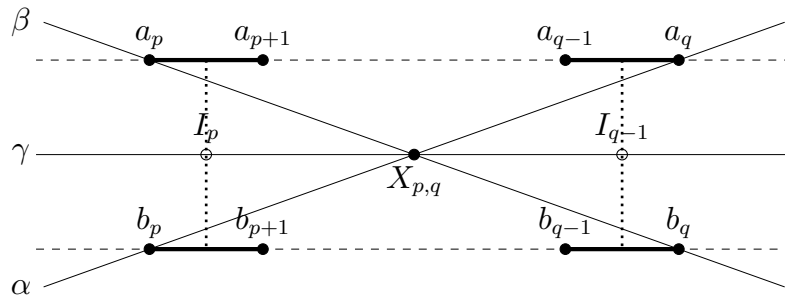
Тада ако нам је $I_p - X_{p,q} - I_{q-1}$ онда ће да важи и $I_{p-1} - X_{p,q} - I_q$.
Приметимо да за ову лему X зависи од p и q , па само применом леме 2 не можемо да докажемо лему 1.



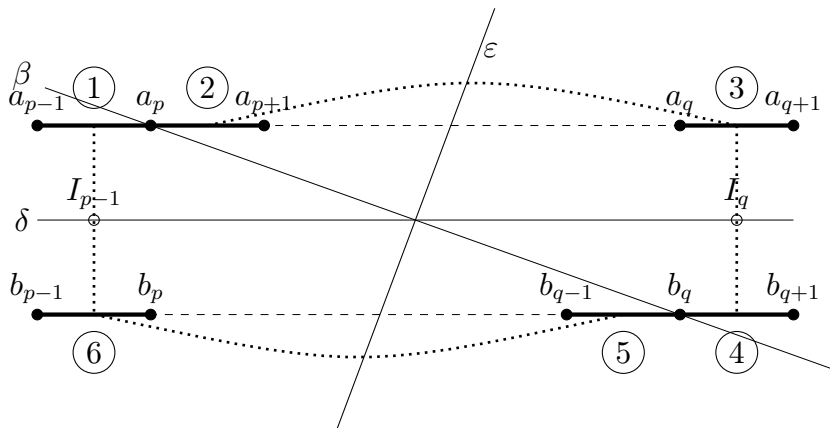
Доказ. Нек је $\gamma = I_p \wedge I_q$, $\alpha = b_p \wedge a_q$ и, $\varepsilon = (b_p - b_{p-1}) \wedge (b_q - b_{q-1})$, $\beta = a_p \wedge b_q$ тад су $\alpha, \gamma, \varepsilon$ конкурентне, по Брианшоновој теореме



Аналогно су по Брианшоновој теореме праве $\beta, \gamma, \varepsilon$ конгруентне



Одакле следи да су α, β, γ конкурентне у X . Нек је $\delta = I_{p-1} - I_{q+1}$, тад су по Брианшоновој конкурентне праве $\delta, \beta, \varepsilon$.



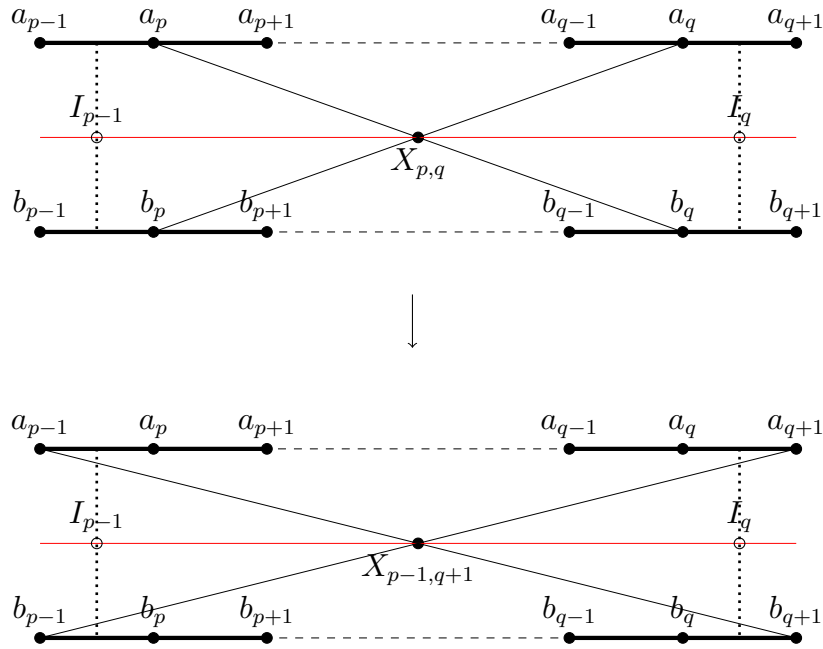
□

Лема 2.3. Ако важи

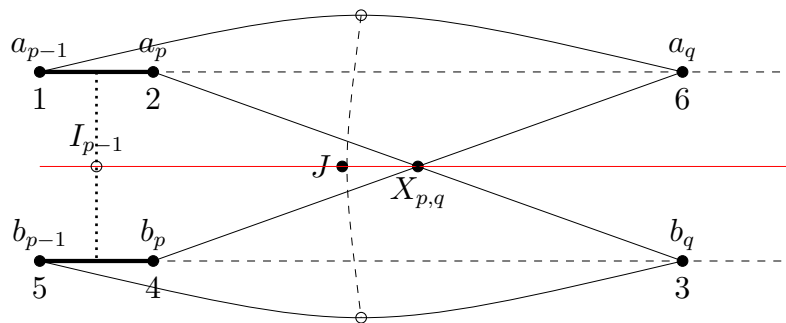
$$I_{p-1} - X_{p,q} - I_q$$

онда ће и да важи

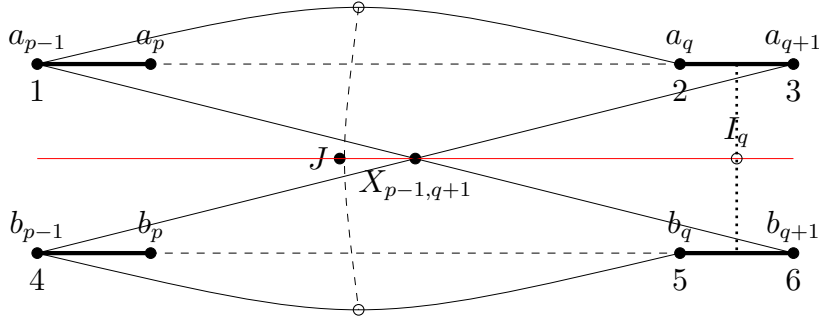
$$I_{p-1} - X_{p-1,q+1} - I_q$$



Доказ. Обележимо тачке a_{p-1} као 1, a_p као 2, b_q као 3, b_{p-1} као 4, b_p као 5, a_q као 6.



Тада по Паскаловој теореме важи да је $I_{p-1} - J - X_{p,q}$. Одатле и из првобитне претпоставке из леме добијамо да су $I_{p-1} - J - I_{q+1}$. Надаље, обележимо тачке $a_{p-1}(1), a_q(2), a_{q+1}(3), b_{p-1}(4), b_q(5), b_{q+1}(6)$



Тад по Паскаловој теореме добијамо $J - X_{p-1, q+1} - I_{q+1}$ па из тога и да је $I_{p-1} - J - I_{q+1}$ добијамо да је $I_{p-1} - X_{p-1, q+1} - I_{q+1}$ чиме смо доказали лему 3. \square

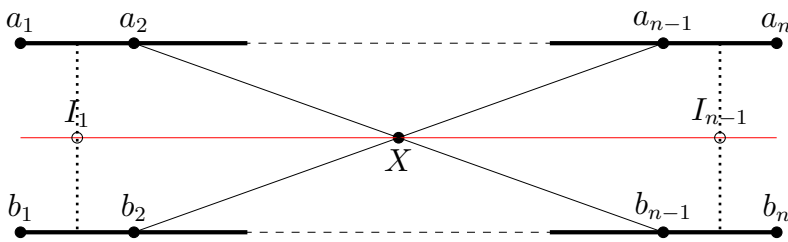
Надаље, наизменичном применом леме 2 и леме 3 добијамо лему 1 која каже да су тачке

$$I_1 := (a_1 - a_2) \wedge (b_1 - b_2)$$

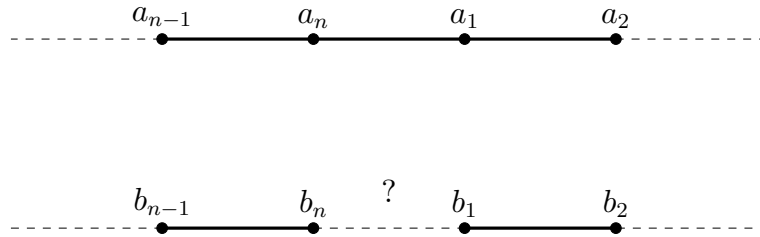
$$X := (a_2 - b_{n-1}) \wedge (b_2 - a_{n-1})$$

$$I_{n-1} := (a_{n-1} - a_n) \wedge (b_{n-1} - b_n)$$

колинеарне.



Доказ Понселеове теореме. Узмимо две конике ε_1 и ε_2 . Претпоставимо да постоји затворен полигон дужине n , нпр a_1, a_2, \dots, a_n , уписан у ε_1 такав да му је свака од страница $a_i a_{i+1}$ тангентна на ε_2 , као и да је то n најмањи број за који постоји овакав полигон. Узмимо неки отворен полигон b_1, b_2, \dots, b_n уписан у ε_1 такав да је свака од страница $b_1 b_2, b_2 b_3, \dots, b_{n-1} b_n$ тангира ε_2 . Тад треба да докажемо да ће и $b_n b_1$ тангира ε_2 .

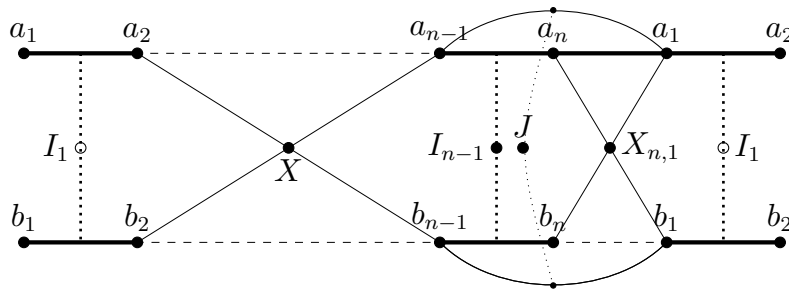


Дефинишимо тачке I_1, X, I_{n-1} као и раније, само што чемо да дефинишемо још и

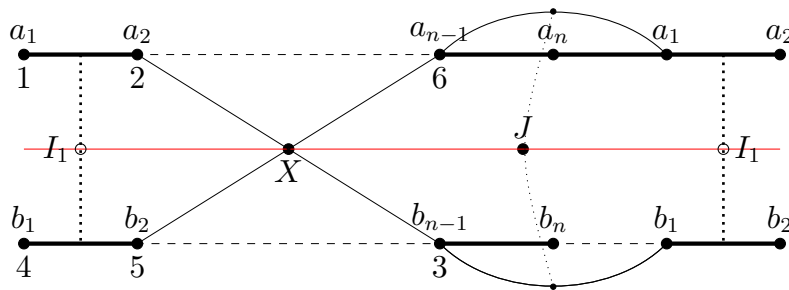
$$J := (a_{n-1} - a_1) \wedge (b_{n-1} - b_1)$$

$$X_{n,1} := (a_n - b_1) \wedge (b_n - a_1)$$

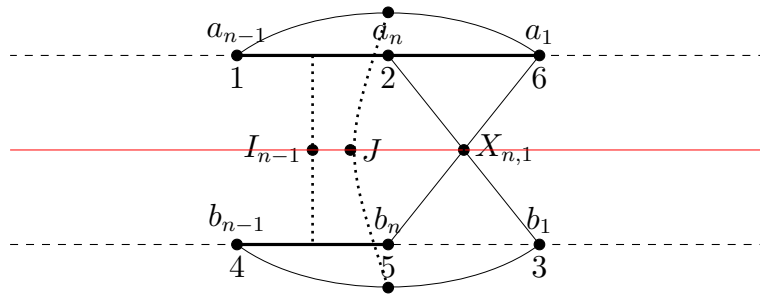
Знамо да су $I_1 - X - I_{n-1}$ колинеарне из леме 1. Скица тад изгледа овако:



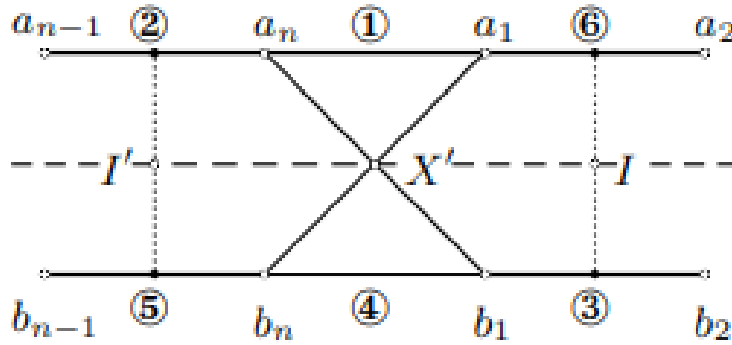
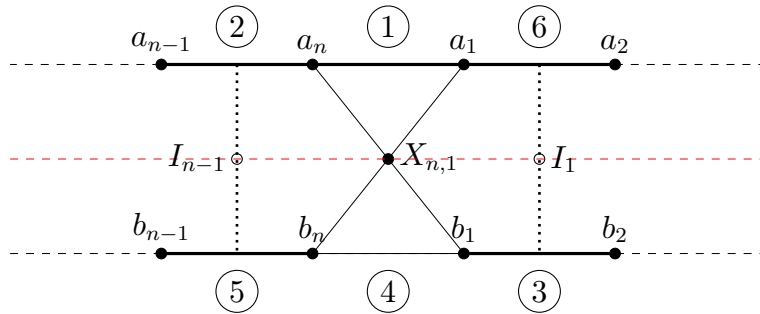
Надаље по Паскаловој теореме за тачке означене на слици испод имамо да су $X - J - I_1$ колинеарне:



Слично, по Паскаловој теореме имамо да су $I_{n-1} - J - X_{n,1}$ колинеарне:



Из претходних колинеарности извлачимо да нам је $I_{n-1} - X' - I'$ колинеарно. На крају применом Карноове теореме добијамо да



Добијамо да су све дужи

$$a_{n-1}a_n, a_na_1, a_1a_2$$

$$b_{n-1}b_n, b_nb_1, b_1b_2$$

додирују конику, а како је коника одређена са пет тангенти, тако су нам све ове дужи, укључујући и b_nb_1 тангентне на ε_2

□

Последица 1. Ако имамо елиптични билијар и унутар њега елипсу које имају исте жижке, ε_1 и ε_2 , такве да кад пустимо куглу из неке тачке на ε_1 путањом која је тангентна на ε_2 тад ће на при сваком одбијању кугла да додирује ε_2 , штавише, ако је путања периодична са основним периодом n , тад са сваке тачке на елипси ε_1 ако пустимо куглу тако да је њена путања тангентна на ε_2 тад је она и периодична са основним периодом n .

3

Галперинов алгоритам за рачунање цифара броја π

3.1 Увод

Из физике нам је познато да се разни сложени динамички системи могу представити једном тачком у конфигурационом простору. Испоставља да закони физике попут закона одржања енергије и закона одржања импулса се испољавају као закони билијара за тачку у конфигурационом простору.

Веома фасцинантна примена тога се може увидети у примеру Галпериновог алгоритма, који нам омогућава да временом, одредимо све цифре броја π .

Поставка алгоритма:

1. Узмимо две лопте са масама m и M , при чему је

$$\frac{M}{m} = 100^N, N \in \mathbb{N}$$

2. Стаavimo малу лопту на x осу између велике лопте и зида
3. Гурнимо велику лопту неком брзином V
4. Пратимо све ударце у систему, укључујући ударце две лопте и ударце лопте и зида. претпоставимо да су сви удари апсолутно еластични
5. Запишимо број свих удараца на папир, у ознаци $\Pi(N)$

3.2 Теорема

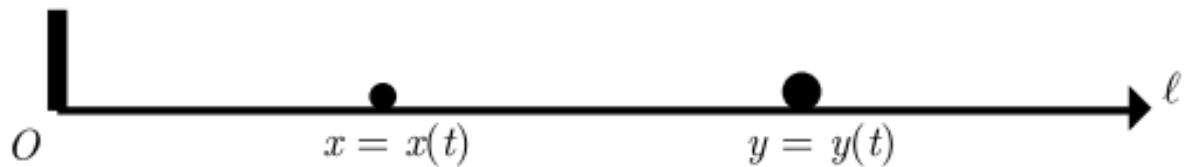
Иако ћемо је тек касније доказати, теорема на којој се заснива рад алгоритма је следећа:

Теорема 3.1. Број $\Pi(N)$ је број са $N + 1$ цифром од којих првих N цифара чине цифре броја π , са вероватноћом од 1.

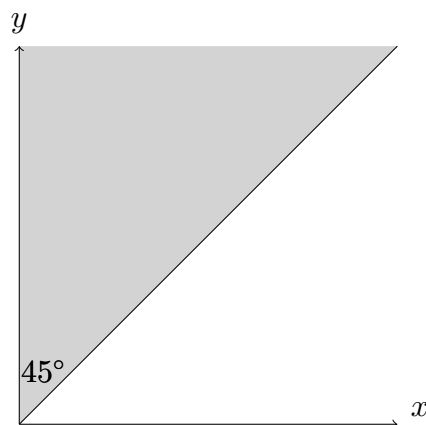
3.3 Конфигурација и конфигурациони простор

Дефинишимо раван γ_1 као конфигурациони простор нашег система, где x оса представља растојање мале лопте од зида, а y оса одстојање велике лопте од зида. Јасно је да су x и y координате функције од времена.

У наставку текста под судар ћемо сматрати догађај кад се две лопте сударе, а одбијање ћемо сматрати догађај кад само мања лопта удари зид и одбије се истом брзином само у супротном смеру.



Посматрајмо шта ће онда чинити наш конфигурациони простор. Испоставља се да је једини услов за могућа стања у равни $y > x$



Тачка која представља посматрани систем ће се кретати праволинејској путањи до судара. То је јасно зато што су dx и dy константе до судара. Уведимо сад трансформацију координатног система којом добијамо равни γ_2

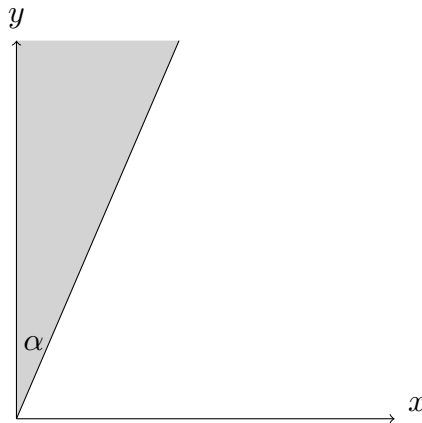
$$T : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$$

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & \sqrt{M} \end{bmatrix}$$

T нам скалира сваку дужину по x оси за \sqrt{m} и по y оси за \sqrt{M} . Дакле ако нам тачка A има координате (x, y) у γ_1 онда ће тачка A' имати координате $(X, Y) = (\sqrt{m}x, \sqrt{M}y)$ у γ_2

Нек је α угао унутар ког може да буде наш систем у равни γ_2 тад је

$$\tan \alpha' = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{m}x}{\sqrt{M}y} = \sqrt{\frac{m}{M}}$$



Теорема 3.2. Понашање тачке која одговара систему у γ_2 поштује правила билијара.

Доказ. Нек је брзина $u(t)$ брзина кретања мале лопте, а брзина $v(t)$ брзина кретања велике лопте. Тада пре и после судара две лоптице важи:

$$mu(t) + Mv(t) = c_1$$

$$mu(t)^2 + Mv(t)^2 = c_2$$

При чему друга једначина важи током целог експеримента, док прва једначина не важи пре и после ударца мале лоптице о сам зид. Нек је брзина $\vec{V}(t)$ брзина тачке у γ_2 . Тад је $V(t) = \sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{m}dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{M}dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{mu^2 + Mv^2} = \sqrt{2c_1}$ па је брзина кретања тачке у γ_2 увек константна.

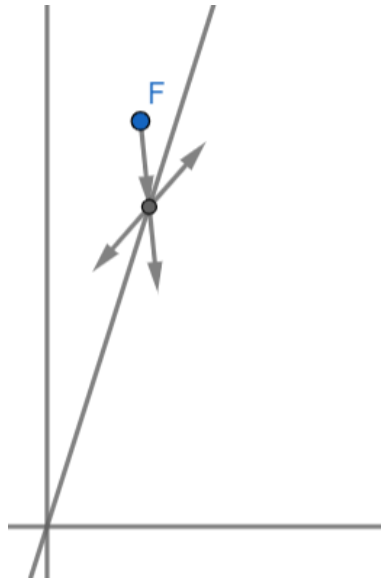
Посматрајмо сад шта нам значи друга једначина.

$$\begin{bmatrix} m & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = c_1$$

Али другу једначину можемо посматрати као и $\sqrt{m}(\sqrt{m}u) + \sqrt{M}(\sqrt{M}v)$ што се у матричној репрезентацији представља као

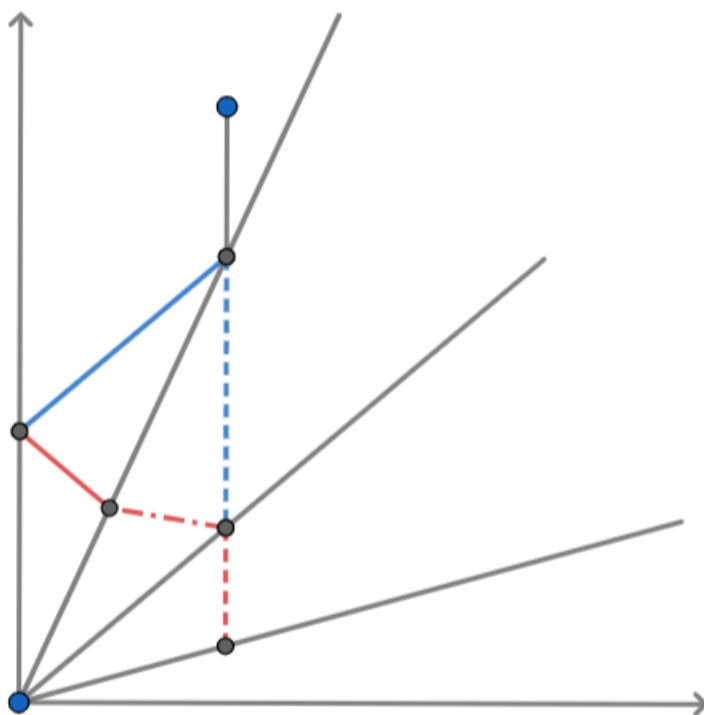
$$\begin{bmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{m} \frac{dx}{dt} \\ \sqrt{M} \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{bmatrix}$$

Решимо прво случај кад се мала лопта одбија о зид. По дефиницији да је судар еластичан, то значи да ће само мала лопта да промени смер брзине, па је јасно зашто у конфигурационој равни γ важи да приликом одбијања о y осу тачка поштује законе билијара. У осталим случајевима једначина одржања импулса представља скаларни производ вектора $(\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt})$ и вектора (\sqrt{m}, \sqrt{M}) , од којих се други вектор не мења при судару две лопте. Приметимо да је у сваком тренутку знамо да је интензитет оба вектора константан, па је онда косинус угла између та два вектора константан. Надаље, због домена у ком може бити наша честица, увиђамо да она може једино добити брзину којој одговара случај да се одбила билијарски.



□

Посматрајмо шта се дешава кад имамо билијар у отвореном углу α , при чему лоптица креће са почетном брзином која је паралелна y оси. Знамо да билијарски судари о праву могу лепо да се презентују ако посматрамо слику носиметрично пресликано о ту саму праву.



Можемо видети да нашој билијарској путањи унутар самог угла (на слици је та путања означена пуним линијама) одговара једна права (Назовимо је a) у равни γ . Сваком делу билијарске путање између два одбијања (нпр. између i -тог и $i+1$ -тог) о ивице угла у γ одговара пресек праве и i -тог намотаног угла α . Нама је сад задатак тражења броја $\Pi(N)$ односно броја судара, еквивалентан тражењу броја колико ће пута зрак светлости који је паралелан са y осом да пресече угао чији је $\tan \alpha = \sqrt{\frac{m}{M}}$ који намотамо око координатног почетка. Врло лако се добије да нам тад тај број заправо представља минималан цео број K такав да је

$$(K + 1)\alpha > 180^\circ$$

односно

$$\Pi(N) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan 10^{-N}} \right\rceil - 1$$

али како $\arctg \frac{\pi}{k}$ где је k цео број, никад није рационалан (доказ за то је у референци од другог референцираног рада), то је

$$\Pi(N) = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan 10^{-N}} \right\rceil$$

3.4 Алгебарски део доказа

Сад је само неопходно показати да ће за произвољан природан број N

$$\left[\frac{\pi}{\arctan 10^{-N}} \right]$$

да буде скоро $\pi 10^N$.

Оно што ћемо доказати јесте да ће број $\left[\frac{\pi}{\arctan 10^{-N}} \right]$ да буде једнак или $\left[\pi 10^N \right]$ или $\left[\pi 10^N \right] + 1$.

То ћемо доказати помоћу следећих лема

Лема 3.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

Доказ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \right)}{x \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} \dots}{1 - \frac{x^2}{3} \dots} = 0$$

□

Лема 3.2.

$$\left(\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \right) < x, \forall x > 0$$

Доказ. Посматрајмо функцију $f(x) = (1 + x^2) \arctan(x) - x$. Како $f'(x) = 2x \arctan(x) > 0$ за $x > 0$ и $f(0) = 0$, закључујемо да $f(x) > 0$ за све $x > 0$. □

Из леме 3.2. је јасно тврђење да је $\Pi(N) = \left[\frac{\pi}{\arctan 10^{-N}} \right] \vee \left[\frac{\pi}{\arctan 10^{-N}} \right] + 1$.

Сад је јасно да ће број $\Pi(N)$ имати $N + 1$ цифру и да ће скоро увек првих N цифара заиста сигурно бити цифре броја π осим кад се последњих k од n цифара броја π завршава деветком. Али како знамо да је број π ирационалан, знамо да не постоји бесконачан низ деветку међу цифрама броја π па како можемо да изаберемо N произвољно велико, то ћемо временом сигурно добити све цифре броја π

4

Закључак

Применом билијара смо успели да пронађемо заиста фасцинантан, и по мом мишљењу најлепши алгоритам за проналажење цифара броја π , Који је уједино и неприменљивији јер идеални услови у којима важе закони одржања не постоје.

Литература

[Mat] *A Simple Proof of Poncelet's Theorem (on the occasion of its bicentennial)*, Lorenz Halbeisen and Norbert Hungerbühler, American Mathematical Monthly 121:1 September 1, 2014

[Mat] *Понселеове њоризме, квадрике и билијари*, Владимир Драговић, Милена Радановић, Београд 2013