Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

- из математике -

Повезаност графова

Ученик:
Зои Бизетић IVб

Ментор:
др Соња Чукић

Београд, јун 2020.

Садржај

1

Увод

Теорија графова, за разлику од осталих делова математике, није антички дисциплина и стога иза себе нема дугу историју. Њени зачеци датирају из осамнаестог века када је Леонард Ојлер решио проблем седам мостова Кенигсберга.

Иако је повезаност графова само мали део целе теорије, и даље има широке примене у готово свим сферама живота. Неке најзначајније примене повезаности графова су у конструкцији комуникационих мрежа, просторној екологији и конзервацији врста, синхронизацији повезаних нелинеарних осцилатора, итд. Сви ови проблеми захтевају рад са великом количином података, стога се често прибегава употреби компјутерских алгоритама којих данас има прилично много.

Врло је интересантно питање колико је „јако" повезан неки граф, тј. колико чворова или грана можемо уклонити тако да тај граф остане повезан. Често се у животним проблемима сусрећемо са овим питањем. Ако бисмо желели да реконструишемо улице неког града, врло је битно да то одрадимо тако да минимално угрозимо саобраћај, тј. повезаност различитих делова града. Или ако бисмо врсте живих бића посматрали као чворове графа, а њихове везе (било у исхрани или компетицији за неки ресурс) као гране, могли бисмо јасно да видимо да ли изумирање неке врсте може довести до краха екосистема, па самим тим и уложити напоре за њену конзервацију. Ово су само неки примери где повезаност графова даје решење за различите проблеме.

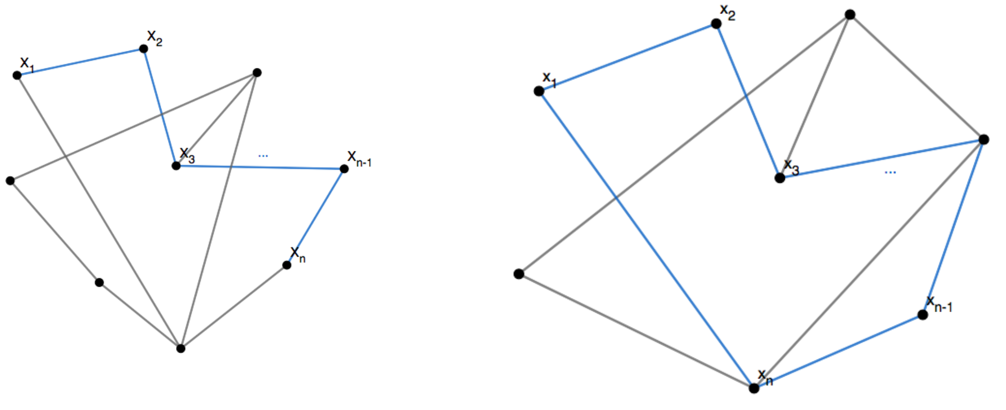
2

Уводни појмови

2.1 Основни појмови графова

За разумевање графова врло је битно да прво уведемо неке основне појмове из теорије графова попут шетње, пута, циклуса, различитих врста основних графова, као и појмова попут степена чвора, најмањег степена графа, итд.

Дефиниција 1. *Граф* је уређен пар скупова (V, E). При чему је V коначан непразан скуп и $E \subseteq \binom{V}{2}$. Елементи скупа V се називају чворови, а елементи скупа E гране.



Слика 2.1.1: Примери графова

Дефиниција 2. Нека су u и v чворови графа G, означимо грану између тих чворова као $e = uv$.

Дефиниција 3. *Шетња* је низ чворова $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ у коме су свака два суседна чвора повезана граном.

Дефиниција 4. *Пут* је шетња $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ у којој се сваки чвор појављује тачно једном. Број n представља *дужину пута.*

Дефиниција 5. *Циклус* је шетња $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1 \in V$ у којој су само први и последњи чвор једнаки. Број n представља *дужину циклуса.*

На слици 2.1.1 видимо два графа. На левом графу је плавом бојом означен пут, а на десном графу је плавом бојом означен циклус.

Дефиниција 6. Граф је *повезан* ако између свака два чвора постоји пут. У супротном је граф *неповезан.*

Дефиниција 7. *Број чворова* ν графа $G = (V, E)$ представља број елемената скупа V.

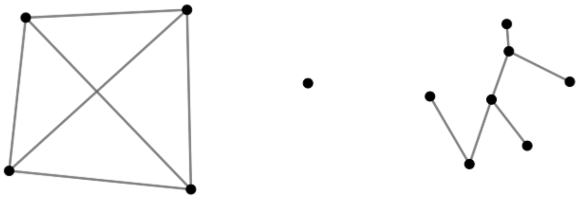
Дефиниција 8. *Степен чвора* v графа G, у ознаци $d(v)$, је број грана које су инцидентне са датим чвором.

Дефиниција 9. *Најмањи степен* δ графа G је степен оног чвора који има најмање грана са којима је инцидентан.

Дефиниција 10. Граф је *потпун* ако између свака два чвора графа постоји грана. Потпун граф са n чворова се означава са K_n.
Број грана у потпуном графу је $\binom{\nu}{2}$.

Дефиниција 11. Граф је *тривијалан* ако садржи један чвор и ниједну грану. У супротном је граф *нетривијалан.*

Дефиниција 12. *Стабло* је повезан граф који не садржи циклусе.



Слика 2.1.2: Са лева на десно: потпун граф K_4, тривијалан граф, стабло

Дефиниција 13. Нека је $G = (V, E)$, за грану $e \in E$, са $G - e$ означавамо граф $G'(V, E')$, где је $E' = E \setminus \{e\}$.

Дефиниција 14. Нека је $G = (V, E)$, за чвор $v \in V$, са $G - v$ означавамо граф $G' = (V', E')$ тако да је $V' = V \setminus \{v\}$ и $E' = E \setminus E_v$, при чему је E_v скуп свих грана инцидентних са v.

2.2 Основни појмови повезаности графова

Када смо дефинисали неке базичне појмове теорије графова, неопходни су нам и неки појмови уско везани за повезаност графова као што су повезана компонента, мост, артикулациони чвор, итд.

Дефиниција 15. Два чвора u и v су *повезана* ако између њих постоји пут, додатно сваки чвор је *повезан* са самим собом.

Лема 1. Релација повезаности је релација еквиваленције.

Доказ: Рефлексивност: Сваки чвор је, по дефиницији 15, повезан са самим собом.
Симетричност: Ако су чворови u и v повезани путем $u, x_1, \ldots, x_n, v$, онда су чворови v и u повезани путем $v, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, u$.
Транзитивност: Нека су чворови u и v повезани путем $u, x_1, x_2, \ldots, x_n, v$, чворови v и w повезани путем $v, y_1, y_2, \ldots, y_m, w$. Посматрајмо низ чворова $u, x_1, x_2, \ldots, x_n, v, y_1, y_2, \ldots, y_m, w$, када из њега уклонимо све поднизове облика $z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}, z_i$ добили смо пут који повезује чворове u и w. □

Дефиниција 16. Граф је *повезан* ако су свака два његова чвора повезана. У супротном је граф *неповезан*.

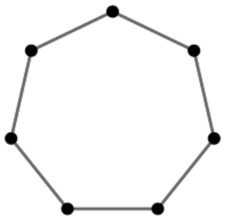
Дефиниција 17. *Разапињући подграф* повезаног графа $G = (V, E)$ је повезан граф облика (V, E'), где је $E' \subseteq E$. *Разапињуће стабло* је разапињући подграф који је стабло.

Циклус граф је пример повезаног графа:

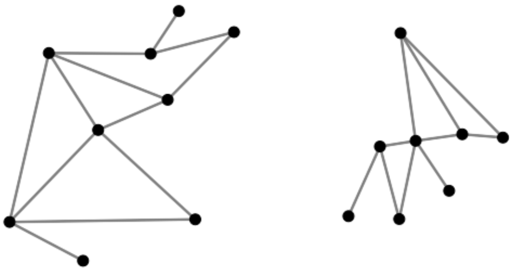
Дефиниција 18. *Циклус граф дужине* n је повезан граф који садржи n чворова и само један циклус. Означава се са C_n.

Дефиниција 19. *Повезана компонента* графа G представља класу еквиваленције релације повезаности.

На слици 2.2.2 приказан је граф који садржи две повезане компоненте.



Слика 2.2.1: Циклус граф дужине седам C_7



Слика 2.2.2

2.2.1 Повезаност преко чворова

Дефиниција 20. *Чворни сепаратор* графа G је скуп V', притом је $V' \subset V$, такав да граф $G = (V \setminus V', E)$ није повезан. Ако скуп V' има k елемената онда се назива *k-точлани чворни сепаратор* графа G.

Дефиниција 21. Чвор чијим уклањањем из графа повећавамо број повезаних компоненти у графу назива се *артикулациони чвор*.

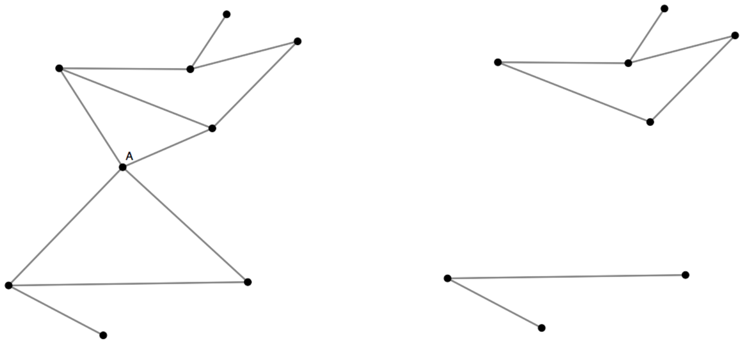
Посматрајмо леви граф са слике 2.2.3 Чвор A је артикулациони чвор и његовим уклањањем добијамо десни граф који је неповезан.

Посматрајмо неке примере:

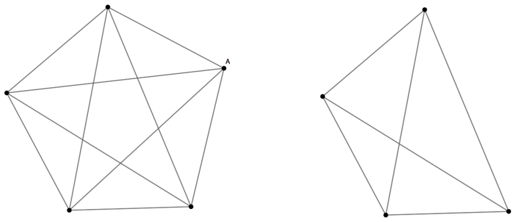
Лема 1. Уклањањем било ког чвора из потпуног графа K_n добија се граф K_{n-1}.

Доказ: Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ представљају чворове графа K_n. Посматрајмо граф $K_n - x_1$: он садржи $n-1$ чвор, и између свака два чвора постоји грана. Па то онда представља граф K_{n-1}. □

На слици 2.2.4 се може видети да уклањањем чвора A из графа K_5 добијамо граф K_4.



Слика 2.2.3: Пример артикулационог чвора



Слика 2.2.4: Пример уз лему 1

Пример 1. Потпун граф не садржи чворни сепаратор.

Решење: Претпоставимо супротно да је V' чворни сепаратор графа K_n и нека је $|V'| = m$. Применимо лему 1 на граф K_n m пута. Добили смо граф K_{n-m} који је потпун граф па самим тим и повезан. Контрадикција.

Примедба: Штавише, интересантна чињеница је да графови који садрже потпуне графове као разапињуће подграфе немају чворни сепаратор.

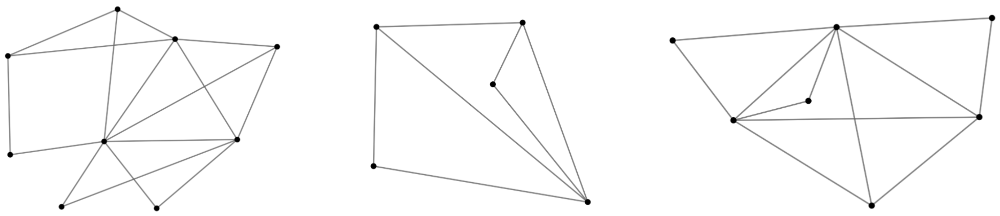
Дефиниција 22. Ако граф G садржи бар један пар различитих несуседних чворова, онда дефинишемо $k(G)$ као најмањи природан број k за који постоји k-точлани чворни сепаратор. Ако граф G не садржи ни један пар различитих несуседних чворова онда је $k(G) = \nu - 1$.

Дефиниција 23. Граф G је k-*повезан* ако $k(G) \geqslant k$.

На слици 2.2.5 видимо примере два-повезаних графова.

2.2.2 Повезаност преко грана

Аналогно чворном сепаратору, сада ћемо дефинисати повезаност преко грана као и нека њена основна својства.

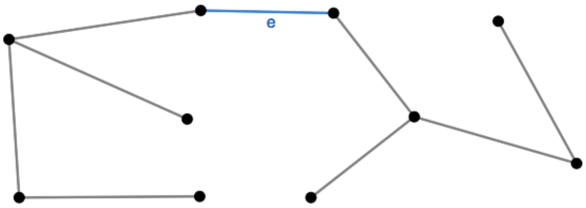


Слика 2.2.5: Примери два-повезаних графова

Дефиниција 24. *Грански сепаратор* графа G је скуп грана $E' \subset E$ тако да граф $G = (V, E \setminus E')$ није повезан. Ако скуп E' има k елемената онда се то назива *k-точлани грански сепаратор* графа G.

Дефиниција 25. Грана која сама чини грански сепаратор назива се *мост*.

На слици 2.2.6 грана e је мост стабла G.



Слика 2.2.6: Пример моста на графу

Дефиниција 26. За нетривијалан граф G, $k'(G)$ дефинишемо као најмањи природан број k за које постоји k-точлани грански сепаратор. За тривијалан граф G, $k'(G) = 0$.

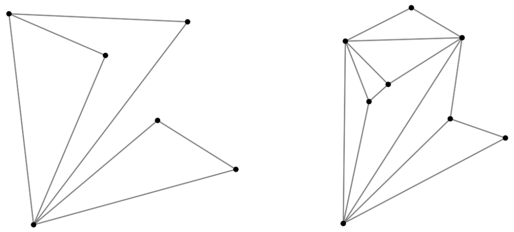
Примедба: Ако за граф G важи $k'(G) = 0$, онда је G или тривијалан или неповезан. Такође ако је $k'(G) = 1$, онда граф G има мост.

Дефиниција 27. Граф G је *k-грански-повезан* ако $k'(G) \geqslant k$.

Сви нетривијални графови су један-повезани и један-грански-повезани.

2.3 Неке уводне теореме

Теорема 2.3.1. За произвољан граф G важи $k(G) \leqslant k'(G) \leqslant \delta$.



Слика 2.2.7: Примери два-грански-повезаних графова

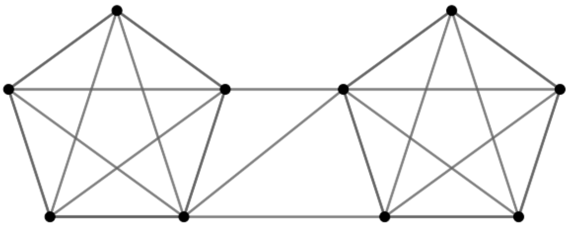
Доказ: Поделимо проблем на два дисјунктна случаја: граф G је тривијалан и граф G је нетривијалан.

1. Посматрајмо случај када је граф G тривијалан. Према дефиницијама 22 и 26 $k(G) = k'(G) = 0$, што је сигурно мање или једнако од $\delta \geqslant 0$.

2. Посматрајмо случај када је граф G нетривијалан. Докажимо леву страну неједнакости помоћу индукције по $k'(G)$.
   Индукцијска хипотеза: $k(G) \leqslant k'(G)$, за $k'(G) \geqslant 0$
   База индукције: За $k'(G) = 0$ граф је или тривијалан, што је доказано је у првом делу задатка, или неповезан, што је онда очигледно тачно.
   Корак индукције: Претпоставимо да за неки природан број k, $k(G) \leqslant k'(G)$ за сваки граф коме је $k'(G) < k$.
   Нека је граф $G = (V, E)$ такав да $k'(G) = k > 0$ и нека је $e \in E$ грана која припада k-точланом гранском сепаратору графа G. За граф $H = G - e$ важи $k'(H) = k - 1$, па по индукцијској хипотези $k(H) \leqslant k'(H) = k - 1$.
   Ако граф H садржи потпун граф као разапињући подграф, онда и граф G садржи потпун граф као разапињући подграф па је $k(G) = k(H) \leqslant k - 1$.
   У супротном, нека је S, чворни сепаратор графа H. По дефиницији, $H - S$ је неповезан. $G - S$ је или неповезан или повезан. Ако је граф $G - S$ неповезан онда је $k(G) \leqslant k(H) \leqslant k - 1$. Ако је $G - S$ повезан грана e представља мост. Ово значи да је $\nu(G - S) = 2$ или $G - S$ има артикулациони чвор v. У првом случају $k(G) \leqslant \nu(G) - 1 = k(H) + 1 \leqslant k$. У сваком од случајева имамо $k(G) \leqslant k = k'(G)$. Па по принципу математичке индукције теорема важи и у овом случају.

Посматрајмо чвор степена δ и све гране тог чвора. Јасно је да те гране чине гранскi сепаратор, стога важи и десни део неједнакости тј. $k'(G) \leqslant \delta$. □

У већини случајева знаци неједнакости у теореми 2.3.1 су строги. На пример, ако бисмо посматрали граф приказан на слици 2.3.1, за њега важи $k = 2$, $k' = 3$ и $\delta = 4$.



Слика 2.3.1: Пример за теорему 2.3.1.

Теорема 2.3.2. Грана e графа G је мост ако и само ако e не припада ни једном циклусу графа G.

Доказ: Претпоставимо супротно: Нека мост e графа G припада циклусу C. Из дефиниције моста следи $\omega(G-e) > \omega(G)$, где $\omega(G)$ представља број повезаних компоненти графа G, онда постоје два чвора u и v који су повезани у G, а нису повезани у $G-e$. Самим тим постоји неки пут P између тих чворова који мора да садржи грану e. Претпоставимо да су чворови x и y на крајевима гране e и нека је, без губљења оштости, x пре y у P. У $G-e$ чворови u и x су повезани преко једног дела P, аналогно важи и за чворове y и v. Пошто је e у циклусу C, x и y су у графу $G-e$ повезани преко пута $C-e$. Па су и u и v повезани у $G-e$. Контрадикција.

Нека грана e не припада ниједном циклусу графа G и нека су x и y чворови на крајевима гране e. Претпоставимо супротно: Грана e није мост графа G па је и граф $G-e$ повезан. Нека је P пут између чворова x и y у графу $G-e$. Онда e припада циклусу $P+e$. Контрадикција. $\square$

Теорема 2.3.3. Повезани граф је стабло ако и само ако је свака грана мост.

Доказ: Нека је G стабло и e грана тог стабла. По дефиницији 12 G нема циклусе, па e не може припадати ниједном циклусу. Применом теореме 2.3.2 следи да је e мост.

Претпоставимо да је G повезан, али није стабло. Онда G садржи неки циклус C. Па по теореми 2.3.2 ниједна грана циклуса C не може бити мост. $\square$

Теорема 2.3.4. Повезани граф са n чворова има бар $n-1$ грану.

Доказ: Нека је m број грана у таквом графу. Докажимо тврђење теореме употребом индукције по m:
Индукцијска хипотеза: За претходно дефинисано m важи $m \geqslant n-1$, за произвољан граф G.
База индукције: Нека је $m=0$. За $n>1$ граф није повезан, стога је очигледно

да је $n = 1$. Па је и $m \geqslant n - 1$.
Корак индукције: Нека је индукцијска хипотеза тачна за свако $m = 0, 1, 2, \ldots, k$. Докажимо да важи за $m = k + 1$. Нека је G граф са $k + 1$ граном и нека је e произвољна грана из G. Подграф $G - e$ има k грана и n чворова. Поделимо проблем на два случаја:

1. Када је $G - e$ повезан. По индукцијској хипотези $k \geqslant n - 1$ па је и $k + 1 \geqslant n > n - 1$.

2. Када $G - e$ није повезан, онда мора имати тачно две компоненте. Нека оне редом имају k_1 и k_2 грана и n_1 и n_2 чворова. По хипотези $k_1 \geqslant n_1 - 1$ и $k_2 \geqslant n_2 - 1$. Сабирањем ове две неједначине добијамо $k_1 + k_2 \geqslant n_1 + n_2 - 2$, а како важи $k_1 + k_2 = k$ и $n_1 + n_2 = n$, добија се $k + 1 \geqslant n - 1$.

Овим је доказано да је индукцијска хипотеза тачна за $m = k + 1$, па је по принципу математичке индукције теорема доказана. $\square$

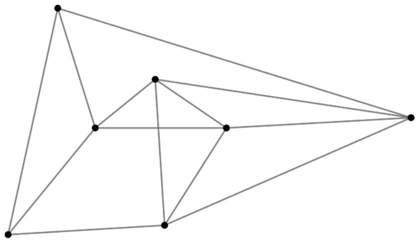
3

Блокови

3.1 Увод у блокове

Дефиниција 28. *Блок* је повезан граф који нема артикулационе чворове.

Сваки блок има бар 3 чвора и бар је два-повезан. Граф са слике 3.1 је блок, притом има седам чворова и три-повезан је.



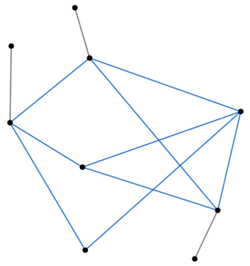
Слика 3.1.1: Пример блока

Дефиниција 29. *Блок графа* G је подграф графа G који је блок и има највећи број грана.

Дефиниција 30. Два пута P_1 и P_2 из G су *дисјунктни у унутрашњости* ако немају ниједан заједнички чвор, изузев првог и последњег.

Лема 2. Свака грана графа G припада највише једном блоку.

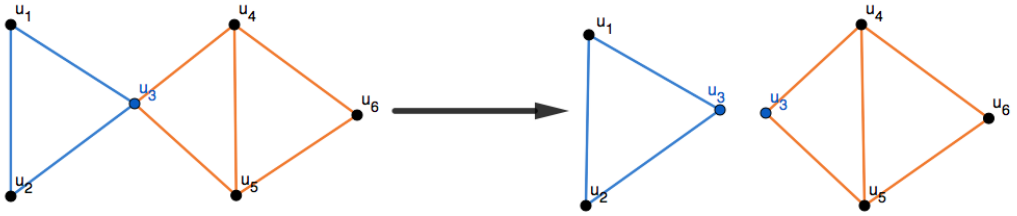
Доказ: Претпоставимо супротно: Нека се грана $e = xy$ налази у више од једног блока произвољног графа G. Због услова максималности из дефиниције



Слика 3.1.2: Плавом бојом је означен блок графа

29, два блока графа G могу имати највише један заједнички чвор. Да би грана e припадала блоку неопходно је да и чвор x и чвор y припадају блоку. Контрадикција јер два блока не могу имати два заједничка чвора. Стога свака грана припада највише једном блоку. □

Приметимо на слици 3.1.3 да лема 2 не важи за чворове.



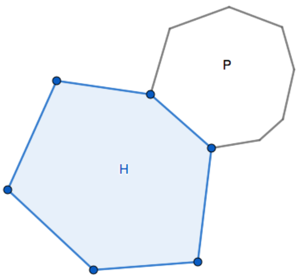
Слика 3.1.3: Чвор u_3 је артикулациони чвор, лево је граф, а десно његови блокови

3.2 Два-повезани блокови

Као што је већ речено, сваки блок је бар два-повезан, а циклус је најједноставнији два-повезан граф.

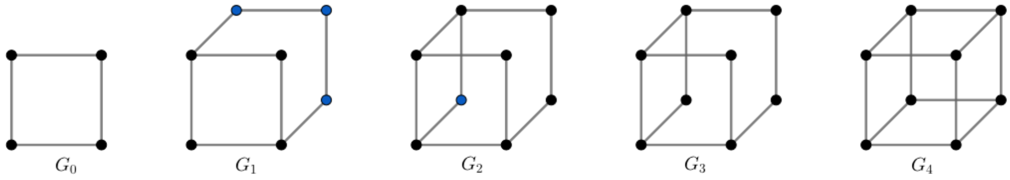
Дефиниција 31. За дати граф H, пут P називамо H-пут ако је P нетривијалан и његови крајеви су у H док је остатак пута P дисјунктан са H. Ако крајеви H-пута представљају исти чвор онда се $H \cup P$ назива *додавање циклуса*, у супротном се назива *додавање пута*.

Дефиниција 32. ***Whitney - Robbins* синтеза** графа G из графа H је низ графова $G_0, G_1, \ldots, G_l$ где је $G_0 = H$, $G_l = G$, и G_i је резултат додавања



Слика 3.2.1: Пример *H-пута* графа

циклуса или пута на G_{i-1}, за свако $i = 1, 2, \ldots, l$. Ако је свако G_i резултат додавања пута онда се назива ***Whitney* синтеза**.



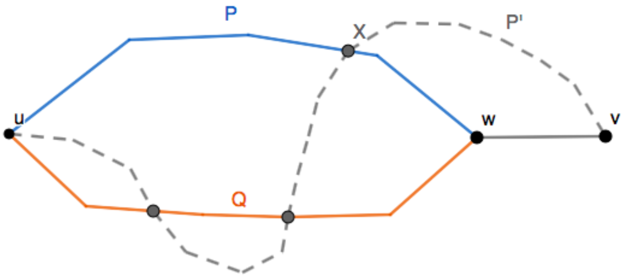
Слика 3.2.2: Пример конструкције графа помоћу *Whitney* синтезе

Теорема 3.2.1. Нека је граф G са $\nu \geqslant 3$ два-повезан ако и само ако су свака два чвора повезана са бар два пута која су дисјунктна у унутрашњости.

Доказ: Ако су било која два чвора G повезана са бар два пута која су дисјунктна у унутрашњости, онда је очигледно G повезан и нема артикулациони чвор. Стога је G два-повезан.

Обратно, нека је G два-повезан граф. Докажимо, помоћу индукције по дужини пута $d(u, v)$ између u и v, да су свака два чвора u и v повезана са бар два пута која су дисјунктна у унутрашњости.
Индукцијска хипотеза: Нека је $d(u, v) = k - 1$, за $k > 1$, онда постоје два пута између u и v која су дисјунктна у унутрашњости.
База индукције: Нека је $d(u, v) = 1$. Пошто је G два-повезан, по теореми 2.3.1 такође је бар два-грански-повезан, па грана uv није мост, а по теореми 2.3.2, грана uv припада циклусу. Чиме је доказано да постоје два пута између u и v која су дисјунктна у унутрашњости.
Корак индукције: Нека су u и v такви да је $d(u, v) = k \geqslant 2$ и нека је w чвор који претходи чвору v на том путу дужине k. Стога је $d(u, w) = k - 1$, па према индукцијској хипотези постоје два пута између u и w која су дисјунктна у

унутрашњости, нека су то P и Q. Пошто је G два-повезан, $G - w$ је повезан, па постоји пут P' између u и v. Нека је x последњи чвор P' који је такође у $P \cup Q$. Такво x постоји јер је $u \in P \cup Q$ (постоји могућност и да је $x = v$). Без губљења општости нека је $x \in P$. Онда G има два пута која су дисјунктна у унутрашњости: један је састављен од дела пута P између u и x и дела пута P' између x и v, и други од пута Q и пута између w и v. □

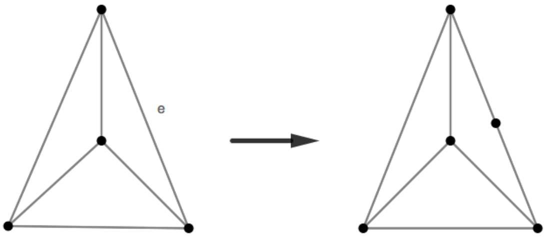


Слика 3.2.3: Слика уз доказ теореме 3.2.1

Последица 1. Ако је G два-повезан граф, онда свака два чвора из G припадају неком заједничком циклусу.

Доказ: По теореми 3.2.1 свака два чвора леже на два пута која су дисјунктна у унутрашњости који самим тим чине циклус. Аналогно се доказује и за супротан смер. □

Дефиниција 33. Деоба гране e је процес када је заменимо путем дужине два, том приликом додајући ново теме.



Слика 3.2.4: Пример деобе гране e

Последица 2. G је блок ако и само ако сваке две гране G леже на заједничком циклусу.

Доказ: Нека је G блок и нека су e_1 и e_2 гране графа G. Формирајмо граф G' деобом грана e_1 и e_2, и нека су новонастали чворови v_1 и v_2. Очигледно је G' блок са бар пет чворова, чиме је бар два-повезан. По последици 1 чворови v_1 и v_2 леже на заједничком циклусу, па и гране e_1 и e_2 леже на заједничком циклусу.

Ако сваке две гране леже на заједничком циклусу онда и свака два чвора исто леже на заједничком циклусу. Самим тим између њих постоје два пута која су дисјунктна у унутрашњости па је граф G бар два-повезан, па је и блок. ☐

Лема 3. Нека је граф H два-повезан и нека је граф G резултат *Whitney* синтезе на графу H. Онда је граф G исто два-повезан.

Доказ: Јасно је да за граф G важи да сваке две гране леже на циклусу. Стога је по последици 2 граф G блок, а сваки блок је два-повезан. ☐

Теорема 3.2.2. [Теорема *Whitney* синтеза] Граф G је два-повезан ако и само ако је циклус или циклус на коме је одрађена *Whitney* синтеза.

Доказ: Очигледно је да је сваки граф кострyисан на овај начин два-повезан.

Нека је граф G два-повезан, G сигурно садржи циклус, нека је то C. Нека је H подграф графа G тако да има максималан број грана и да је конструисан *Whitney* синтезом на C. Било која грана xy тако да је $xy \in E(G) \setminus E(H)$ а чворови $x, y \in H$, би била H-пут, а H је максималан па то није могуће. Ако је $H \neq G$, а пошто је G повезан, постоји грана vw тако да је $v \in G - H$ и $w \in H$. Пошто је G два-повезан, $G - w$ садржи пут између v и H, нека је то P. Онда је wvP би био H-пут у G. Јасно се види да $H \cup wvP$ граф конструисан *Whitney* синтезом, а притом је већи од H. Што је у контрадикцији са избором H. ☐

Лема 4. Сваки циклус графа G је циклус неког његовог блока.

Доказ: Сваки циклус графа G је два-повезан подграф, стога он припада неком максималном два-повезаном подграфу, што је по дефиницији блок графа. ☐

Дефиниција 34. *Веза* графа G је грански сепаратор који нема ниједан грански сепаратор као прави подскуп.

Лема 5. Следећи искази су еквивалентни:

1. Гране e, f припадају заједничком блоку графа G.
2. Гране e, f припадају заједничком циклусу графа G.
3. Гране e, f припадају заједничкој вези графа G.

Доказ: (1 $\Rightarrow$ 2) Нека гране $e = u_1v_1$ и $f = u_2v_2$ припадају заједничком блоку. По теореми 3.2.1 постоје бар два пута између v_1 и v_2, и u_1 и u_2, која су дисјунктна у унутрашњости, нека су то редом P_1 и P_2, и R_1 и R_2. Ако су нека од та четири пута иста, онда је тај циклус $P_1 \to e \to P_2 \to f \to P_1$. У супротном је циклус $P_1 \to e \to R_2 \to f \to P_1$.

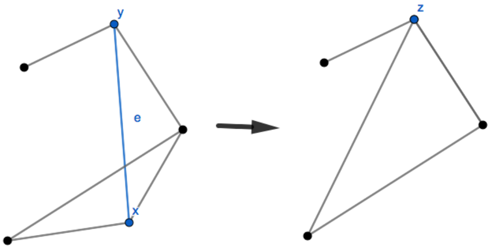
(2 $\Rightarrow$ 3) Нека су e и f гране циклуса C и нека је x чвор гране e и y чвор гране f. Претпоставимо супротно: Гране које припадају циклусу се не могу наћи у истој вези. Посматрајмо везу B која раздваја чворове x и y. Без губљења општости нека је $e \in B$. По претпоставци онда ниједна друга грана из C не може бити у B. Па ће чворови x и y увек бити повезани преко дела пута $C - e$. Што је контрадикција са дефиницијом везе.

(2 $\Rightarrow$ 3) Директно следи из леме 4. □

3.3 Три-повезани блокови

Исто као што смо у теореми 3.2.2 задали начин конструкције два-повезаног графа. Тако ћемо сваки три-повезан граф конструисати сукцесивним додавањем грана на граф K_4.
Од сваког три-повезаног графа G се може добити мањи граф G_1 који ће бити исто три-повезан ако се конструише на следећи начин.

Дефиниција 35. *Контракција гране* $e = xy$ представља спајање чвора x и чвора y у чвор z тако да све гране које су инцидентне са x су инцидентне и са z, и аналогно за y. Контракција гране e на графу G се означава $G \setminus e$.

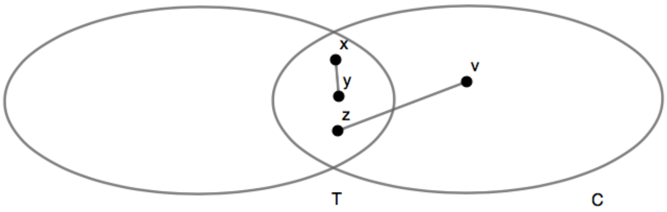


Слика 3.3.1: Извршена је контракција на грани e

Лема 6. Нека је G три-повезан граф и нека је $\nu > 4$, онда G садржи грану e тако да је $G \setminus e$ исто три-повезан.

Доказ: Претпоставимо супротно: Таква грана e не постоји. Онда за сваку грану $xy \in G$, граф $G \setminus xy$ постоји скуп чворова S тако да је $G \setminus xy - S$

неповезан. Пошто граф $G \setminus xy$ није три-повезан S мора да има највише два елемента. Пошто је $k(G) \geqslant 3$ и контракована грана v_{xy} из $G \setminus xy$ је елемент S, онда S има два елемента (ако би имао само елемент v_{xy} онда би граф $G - x - y$ био неповезан, што је контрадикција). Нека је $S = \{z, v_{xy}\}$, пошто S раздваја нека два чвора графа $G \setminus xy$, онда скуп $T = \{x, y, z\}$ чини граф G неповезаним. Сваки чвор из T има инцидентни чвор у свакој компоненти графа $G - T$.



Слика 3.3.2: Слика уз доказ леме 6

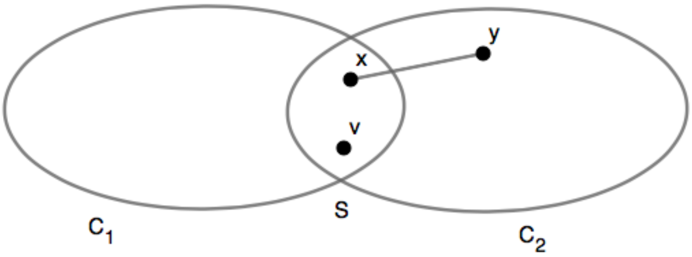
Посматрајмо грану xy, чвор z и компоненту C такву да је $|C|$ минимално, и чвор $v \in C$ инцидентан чвору z. На слици 3.3.2 су графички приказани елементи које посматрамо. По претпоставци граф $G \setminus zv$ није три-повезан, па постоји чвор w тако да скуп $\{z, v, w\}$ чини G неповезаним, и као и раније сваки члан скупа $\{z, v, w\}$ има инцидентни чвор у свакој компоненти графа $G - \{z, v, w\}$.
Како су x и y инцидентни, $G - \{z, v, w\}$ има компоненту D тако да $D \cap \{x, y\} = \varnothing$. Сваки чвор инцидентан са v из D је уједно и у C (јер $v \in C$), па $D \cap C \neq \varnothing$. Одатле следи да је D подскуп од C (због избора D), што је у контрадикцији са избором xy, z и C. □

Теорема 3.3.1. [Тутова теорема 1966.] Граф G је три-повезан ако и само ако постоји низ графова $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_n$ тако да:

1. $G_0 = K_4$ и $G_n = G$
2. G_{i+1} садржи грану xy такву да је $d(x), d(y) \geqslant 3$ и $G_i = G_{i+1} \setminus xy$ за свако $i < n$.

Доказ: Ако је G три-повезан. На основу леме 6 овакав низ постоји. Такође су сви чланови овог низа три-повезани.

Докажимо сада супротан смер. Нека је $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_n$ низ графова који испуњава услове теореме. Докажимо да ако је $G_i = G_{i+1} \setminus xy$ три-повезан, онда је и G_{i+1} три-повезан за свако $i < n$. Претпоставимо супротно: Нека G_{i+1} није три-повезан. Онда постоји скуп S са највише два елемента који садржи чворове чијим уклањањем граф G_{i+1} постаје неповезан. Нека су C_1 и C_2 две компоненте графа $G - S$. Пошто су x и y повезани можемо да претпоставимо да $\{x, y\} \cap V(C_1) = \varnothing$ (слика дата уз доказ теореме).



Слика 3.3.3: Слика уз доказ теореме 3.3.1

А C_2 не може садржати оба чвора x, y. Посматрајмо чворове v_{xy} и v у графу G_i. Њиховим уклањањем граф G_i постаје неповезан, што је по дефиницији значи да је граф G_i два-повезан. Контрадикција. □

4

Примена повезаности графова

4.1 Конструкција поузданих комуникационих мрежа

До сада смо причали о конструкцији два-повезаних и три-повезаних графова. Али у пракси се често сусрећемо са конструкцијом графа од n чворова који је притом k-повезан. Најраспрострањенији пример оваквог проблема представља конструкција комуникационе мреже, где гране представљају комуникационе везе, а чворови кориснике. Пошто често долази до кварова у комуникационим везама или на корисницима, битно је направити систем тако да квар у неким деловима не угрози целокупну комуникацију.

Што је већа повезаност самог графа то је мрежа поузданија. Када бисмо посматрали стабла, закључујемо да су она лош пример структуре мреже зато што су само један-повезана. Са друге стране ако узмемо потпун граф као структуру наше мреже јасно је да тај проблем немамо. Али врло је важно да се при конструкцији мреже узиме у обзир и цена саме комуникационе везе, самим тим наш циљ је да пронађемо оптимално k тако да наша мрежа буде k-повезана.

Комуникационе везе се у пракси разликују по цени имплементације. Стога се у оваквим проблемима често ради са тежинским графовима. За $k = 1$ проблем се своди на проналажење најмањег разапињућег стабла што је решено помоћу Крушкаловог алгоритма. Али овај проблем засад није решен за $k > 1$

Посматрајмо посебан случај овог проблема када је тежина сваке гране иста. Тада се овај проблем своди на проналажење k-повезаног графа са n чворова који при том има минималан број грана.

Дефиниција 36. Нека функција $f(k, n)$ представља најмањи број грана тако да граф од n чворова буде k-повезан.

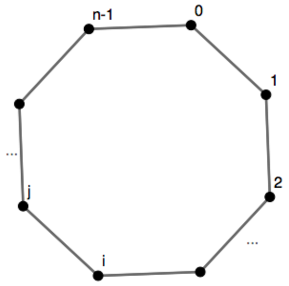
Ограничимо вредност функције f:

Теорема 4.1.1. Нека је f функција дефинисана у дефиницији 36, онда важи следећа неједнакост:

$$f(k,n) \geqslant \frac{kn}{2}$$

Доказ: Теорема следи на основу теореме 2.3.1 и једначине $\Sigma d(v) = 2\varepsilon$, где ε представља број грана графа. $\Sigma d(v) \geqslant nk$ и $\Sigma d(v) = 2\varepsilon$ одатле следи $2\varepsilon \geqslant nk$. А како је $f(k,n) = \varepsilon$, одатле следи тврђење теореме. □

Интересантно је позабавити се конструкцијом графа код ког у тврђењу теореме 4.1.1 важи једнакост. Један од метода конструкције оваквог графа дао је Френк Харари. Тај граф познат је као **Хараријев граф** и означава се $H_{k,n}$. Конструкција Хараријевог графа почиње конструкцијом циклус графа дужине n чији су чворови редом нумерисани $0, 1, \dots, n-1$.



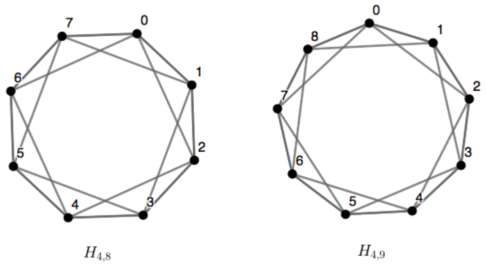
Слика 4.1.1: Почетак конструкције Хараријевог графа

Суседство између чворова i и j је детерминисано њиховом дистанцом на почетном циклус графу. Дефинишимо ту дистанцу као:

Дефиниција 37. Нека су i и j неки бројеви из скупа $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Дефинишимо **дистанцу по модулу** n, у ознаци $|i-j|_n$ између i и j као $min\{|i-j|, n-|i-j|\}$.

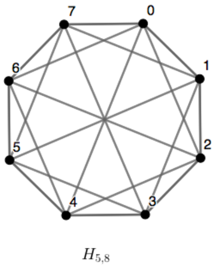
Конструкција $H_{k,n}$ зависи од вредности бројева k и n. И посматрамо три случаја:

1. k је паран:
   Нека је $k = 2r$, чворови i и j су повезани граном ако $|i-j|_n \leqslant r$. На слици 4.1.2 виде се графови $H_{4,8}$ и $H_{4,9}$ Граф $H_{2r,n}$ има rn грана при том важи $r = \frac{k}{2}$. Самим тим цео граф има $\frac{kn}{2}$ грана, што и јесте минимум по теореми 4.1.1.



Слика 4.1.2: Лево граф $H_{4,8}$, десно граф $H_{4,9}$

2. k је непарно и n је парно:
   Нека је $k = 2r+1$. За конструкцију овог графа користићемо конструкцију графа $H_{2r,n}$ из дела 1. Почећемо са графом $H_{2r,n}$, а потом ћемо му додати још $\frac{n}{2}$ грана: грана се повлачи између чворова i и $i + \frac{n}{2}$ за свако $i = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$. Па је укупан број грана једнак $rn + \frac{n}{2} = \frac{(2r+1)n}{2} = \frac{kn}{2}$. На слици 4.1.3 се види граф $H_{5,8}$ који је добијен из графа $H_{4,8}$.

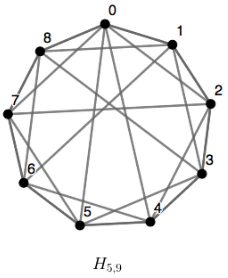


Слика 4.1.3: Граф $H_{5,8}$ добијен из графа $H_{4,8}$

3. k и n су непарни:
   Нека је $k = 2r + 1$. Аналогно претходном случају почећемо од графа $H_{2r,n}$ и додаћемо му $\frac{n+1}{2}$ грана на следећи начин: за почетак додамо грану између чворова 0 и $\frac{n-1}{2}$, потом између 0 и $\frac{n+1}{2}$, а затим између i и $i + \frac{n+1}{2}$ за свако $i = 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2}$. Укупан број грана у $H_{2r+1,n}$ је једнак $rn + \frac{n+1}{2} = \frac{(2r+1)n+1}{2} = \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$. На слици 4.1.4 се види граф $H_{5,9}$ добијен из графа $H_{4,9}$.

Када имамо овако конструисани граф остало је још да докажемо да је он k-повезан.

Теорема 4.1.2. Хараријев граф $H_{k,n}$ је k-повезан.



Слика 4.1.4: Граф $H_{5,9}$ добијен из графа $H_{4,9}$

Доказ: Посматрајмо два одвојена случаја: k парно и k непарно:

1. Посматрајмо прво случај $k = 2r$. Из симетрије графа довољно је доказати да се чворови 0 и x_j не могу одвојити са мање од $2r$ чворова. Претпоставимо супротно: Чворови 0 и x_j се могу одвојити са $2r-1$ чворова: $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2r-1}}$ где је $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{2r-1} \leqslant n-1$. По Дирихлеовом принципу бар један од скупова $\{0, 1, 2, \ldots, j\}$ и $\{j, j+1, \ldots, n\}$ садржи највише $r-1$ индекса. Такође треба додати да је разлика између индекса мања од $r-1$. Два узастопна чвора из низа који настаје када се од $0, x_1, \ldots, x_j$ избаце $x_i, x_{i+1}, \ldots$ су сигурно повезани граном (из начина на који смо конструисали овај граф тј. због $|i-j|_n \leqslant r$). Самим тим су чворови 0 и x_j повезани. Контрадикција.

2. Нека је $k = 2r+1$. Ако посматрамо граф $H_{2r+1,n}$ као граф $H_{2r,n}$ коме је на сваки чвор додата по једна или две гране (две гране су само у случају да је n непарно и то на чвору 0). Јасно се види да је ту повезаност $2r+1$.

$\square$

Литература

[M6] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with applications*,North-Holland, Departmnent of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1976.

[M8] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, Springer, Germany, 2016.

[M3] Rolf S. Rees, *Graphs, Matrices and Designs*, Routledge, Memorial University of Newfoundland, St. Johne's, Newfoundland, Canada, 1992.

[M7] Santanu Saha Ray, *Graph Theory with Algorithms and its Applications*, Springer, Department of Mathematics, National Insitute of Technology, Rourkela, Orissa, India, 2013.

[M4] Dr. Maria Axenovich, *Lecture notes, Graph Theory*, Institute of Technology Karlsruhe, Karlsruhe, Germany, 2016.

[M5] Jonathan L. Gross, Jay Yellen, *Graph Theory and its applications*, Chapman & Hall/CRC Taylor & Fransis Group, Florida, USA, 2006.

[M9] https://www.ucg.ac.me/skladiste/blog_12353/objava_64373/fajlovi/setnje,%20putevi,%20komponente%20povezanosti.pdf

[M1] https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory)

[M2] https://math.stackexchange.com/questions/1078811/what-does-this-definition-of-an-h-path-mean/1078900