ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Први дан

1. а) Лако проверавамо да полиноми $P_k(x) = (x-1)^{2k-1},\ k = 1, 2, \ldots, 2021$ задовољавају све услове задатка.
б) Ако је полином $P \in \mathbb{R}[x]$ симетричан, тада за свако $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, важи да је вишеструкост (дозвољавајући да је та вишеструкост једнака нула) нуле α једнака вишеструкости нуле $\frac{1}{\alpha}$, при чему је број 1 нула парне вишеструкости. Поменуто важи, јер је $P(\alpha) = \alpha^n P(\frac{1}{\alpha})$, када је $\deg(P) = n$, и лако се доказује примнципом математичке индукције. Међутим, важи и обрнуто тврђење, што непосредно следи из чињенице да је производ два симетрична полинома такође симетричан полином.

Из свега наведог закључујемо да се произвољан моничан полином $P \in \mathbb{R}[x]$, који није симетричан, може представити на јединствен начин као производ моничних полинома P_s и P_n, при чему је P_s симетричан полином највећег могућег степена, а P_n полином који није симетричан. Уз то, за полином P_n и произвољно $\alpha \neq 1$, важи да бројеви α и $\frac{1}{\alpha}$ нису истовремено његове нуле.

Посматрајмо три полинома P, Q и R, тако да су они неки од полинома $P_1, ..., P_{2021}$ и представимо их у облику $P = P_s P_n,\ Q = Q_s Q_n$ и $R = R_s R_n$. Ако постоји $\alpha \in \mathbb{C}$ такво да је $P_n(\alpha) = 0$, онда је најпре $P_n(\frac{1}{\alpha}) \neq 0$. Како је PQ симетричан полином и како је количник симетричних полинома (уколико нема остатка при дељењу) симетричан, имамо да је $Q_n(\frac{1}{\alpha}) = 0$, као и $Q_n(\alpha) \neq 0$. Аналогно је и $R_n(\frac{1}{\alpha}) = 0$, као и $R_n(\alpha) \neq 0$. Отуда, полином $Q_n R_n$ није симетричан, а тиме и полином QR. Контрадикција!

Из свега наведеног имамо да је $P_n(x) = Q_n(x) = R_n(x) = x - 1$. Овим смо доказали да је, при наведеним условима, несиметричан умножак свих полинома $P_1, P_2, ..., P_{2021}$ једнак $x - 1$, те је $t(P_1 \cdot P_2 \cdot ... \cdot P_{2021}) \geq 2021$. Један пример када се у овој неједнакости постиже знак једнакости су полиноми $P_k(x) = (x-1)(x^k + 1),\ k = 1, 2, \ldots, 2021$.

2. Довољно је доказати да J лежи на $A-$Аполонијевом кругу k пара тачака (E, F). Нека је Q пресек праве EF и симетрале унутрашњег угла у темену A троугла ABC. Тада је $Q \in k$. Важи да је $\sphericalangle EBD = \sphericalangle FCD$, а из $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EAF = \sphericalangle BDC$ следи $\sphericalangle EDB = \sphericalangle FDC$. Како је $EB = FC$, то је $\triangle EDB \cong \triangle FDC$. Сада је $ED = FD$, па је D средиште лука BAC, док је $M = EF \cap DG$ средиште странице EF. Следи, права AD, тј. права AP, јер $P \in AD$, је симетрала спољашњег угла у темену A троугла ABC, па је и $P \in k$. Стога, довољно је доказати да је четвороугао $AQJP$ тетиван.

Четвороугао $ADMQ$ је тетиван, па је отуда $PQ \cdot PM = PA \cdot PD$ и слично $PA \cdot PD = PJ \cdot PG$, одакле следи тетивност четвороугла $QMGJ$. Сада је $\sphericalangle QJP = \sphericalangle QMG = 90° = \sphericalangle PAQ$, одакле добијамо да је и четвороугао $APJQ$ тетиван.

3. а) Претпоставимо да је b белих и c црних куглица. За сваки уређен пар истобојних куглица, постоји јединствено k тако да ако померимо све куглице удесно за k места, прва ће ићи у другу. Ово значи да је сума квалитета по свим $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ заправо једнака $b(b-1) + c(c-1)$. Сада, по Дирихлеовом принципу, једна има квалитет барем

$$\frac{b^2 + c^2 - n}{n-1} \geq \frac{(\frac{n-1}{2})^2 + (\frac{n+1}{2})^2 - n}{n-1} = \frac{(n-1)^2}{2(n-1)} = \frac{n-1}{2}.$$

б) Из дела под а) се види да ће морати да сви бројеви имају квалитет тачно $\frac{n-1}{2}$. Индексирајмо куглице, редом, бројевима $0, 1, \ldots, n-1$. Нека је $n = p$ прост број облика $4k+3$. Обојимо у бело све куглице које су на позицијама који одговарају квадратним остацима по модулу p, а у црно остале (специјално, на позицији 0 је бела куглица). Квалитет броја k је број оних бројева x, таквих да бројеви x и $x+k$ имају исте квадратне остатке по модулу p. За бројеве $x = 0$ и $x = p-k$, како је тачно један од k и $-k$ квадратни остатак (јер је -1 квадратни неостатак по модулу p), важи да ће тачно један од њих бити урачунат. Сада, претпоставимо да је $x \neq p-k$ и $x \neq 0$. Тражене бројеве x ћемо детектовати тако што ћемо посматрати функцију $f(x) = \frac{x+k}{x} = 1 + \frac{k}{x}$ по модулу p. Потребно је да израчунамо за колико тих бројева x је ова вредност квадратни остатак, због мултипликативности Лежандровог симбола. Међутим, $\frac{1}{x}$ даје све остатке, сем 0, по модулу p, за $x \neq 0$, а како смо искључили још и $x = p-k$, $f(x)$ за преостале вредности x ће узимати вредности $2, 3, \ldots, p-1$ по модулу p. Од ових тачно је $\frac{p-1}{2} - 1$ квадратни остатак (јер су тачно пола од $1, 2, \ldots, p-1$ квадратни остаци, а још смо избацили 1, који свакако јесте квадратни остатак). Ако додамо још онај 1 од првобитно посматраних бројева 0 и $p-k$, налазимо да је квалитет од k тачно $\frac{p-1}{2}$.

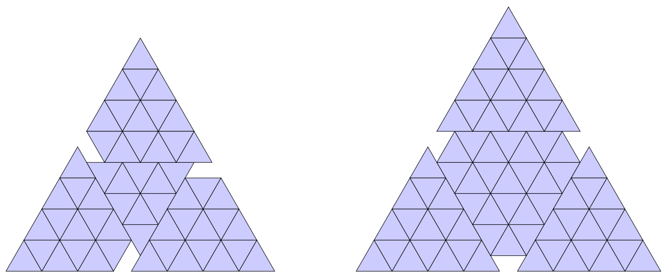
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Други дан

4. Очигледно је $s(4) = 2$. За $i \geqslant 2$ паковања приказана доле (лево за $2 \mid i$, десно за $2 \nmid i$; дајемо само примере за $i = 6$ и $i = 7$, али уопштење је јасно) показују

$$s(i(i+3)) \leqslant i + \frac{3}{2}$$

(заиста, на левој слици имамо укупно $3((\frac{i}{2}+1)^2 - 1) + (\frac{i}{2})^2 = i^2 + 3i$ јединичних троуглова, а на десној укупно $3(\frac{i+1}{2})^2 + ((\frac{i+3}{2})^2 - 3) = i^2 + 3i$ јединичних троуглова, у оба случаја како је и тражено).



С друге стране, како важи $i(i+3)\frac{\sqrt{3}}{4} \geqslant (i+1)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, следи да се $i(i+3)$ јединичних једнакостраничних троуглова не могу спаковати у једнакостраничан троугао странице мање од $i+1$, тј. $s(i(i+3)) \geqslant i+1$. Дакле,

$$2\sum_{i=1}^{n} s(i(i+3)) = 4 + 2\sum_{i=2}^{n} s(i(i+3)) \leqslant 4 + 2\left(\sum_{i=2}^{n} i + \frac{3(n-1)}{2}\right) = 4 + (n^2+4n-5) = n^2+4n-1$$

и

$$2\sum_{i=1}^{n} s(i(i+3)) \geqslant 4 + 2\sum_{i=2}^{n}(i+1) = 4 + ((n+1)(n+2)-6) = n^2+3n.$$

Ово даје

$$(n+1)^2 < n^2+3n+4 \leqslant 4 + \left\lceil 2\sum_{i=1}^{n} s(i(i+3)) \right\rceil \leqslant n^2+4n+3 < (n+2)^2,$$

што имплицира тврђење задатка.

5. Означимо $P(x) = nx^{n+1} + (2n+1)x^n - 3(n-1)x^{n-1} - x - 3$. Тада је

$$P(x) = (x-1)(x+3)(nx^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) = (x-1)(x+3)Q(x).$$

Докажимо да важи наредно тврђење.

Лема. $2n-1 \mid (x-1)(x+3)$ ако и само ако $2n-1 \mid Q(x)$.

Доказ. Претпоставимо прво да $2n-1 \mid (x-1)(x+3)$. Ако $2n-1 \mid x-1$, тада из $Q(1) = 2n-1$, по Безуовом ставу следи $2n-1 \mid Q(x)$. Слично, ако $2n-1 \mid x+3$, тада из

$$4\cdot Q(-3) = (4n-1)(-3)^{n-1} + 1 \equiv (-3)^{n-1} + 1 \equiv \left(\frac{-3}{2n-1}\right) + 1 \equiv \left(\frac{2n-1}{3}\right) + 1 = 0 \pmod{2n-1},$$

по Безуовом ставу следи $2n-1 \mid Q(x)$.

Претпоставимо сада да $2n-1 \mid Q(x)$ и да $2n-1 \nmid x-1$. Тада је $(x-1)Q(x) = n(x-1)x^{n-1} + x^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{2n-1}$. По МФТ је $x^{n-1} \equiv 0, \pm 1 \pmod{2n-1}$. Јасно $x \not\equiv 0 \pmod{2n-1}$. Ако је

$x^{n-1} \equiv 1 \pmod{2n-1}$ следи $n(x-1) \equiv 0 \pmod{2n-1}$, што је контрадикција. Дакле, $x^{n-1} \equiv -1 \pmod{2n-1}$, па из $0 \equiv (x-1)Q(x) \equiv -n(x-1) - 2 \pmod{2n-1}$, множењем са 2, добијамо $x \equiv -3 \pmod{2n-1}$, што је требало доказати. $\square$

Како је $P(x)$ бесквадратан, закључујемо да $2n-1 \nmid P(x)$, па је по услову задатка $P(x) \leqslant 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)$. Како је по АГ неједнакост $i(2n-i) \leqslant n^2$, то је из претходног $P(x) \leqslant n^{n-2}$, одакле, користећи $P(x) > Q(x) > Q(n) > n^n$, добијамо да не постоји тражени број x.

6. Нека се праве AD и BC секу у тачки E. Означимо $BE = a$, $EA = b$ и $AB = e$. Како је $ED : DA = EC : CB = k : (1-k)$, пресек F дијагонала AC и BD има барицентарске координате $(k : k : 1-k)$ у односу на $\triangle ABE$. Сходно томе, тачка P која је изогонално спрегнута тачки F имаће координате $(\frac{a^2}{k} : \frac{b^2}{k} : \frac{e^2}{1-k})$.
Увешћемо правоугли координатни систем у коме тачке A, B и E редом имају координате $(-1,0)$, $(1,0)$ и (x,y). Тада је $a^2 = (x-1)^2 + y^2$, $b^2 = (x+1)^2 + y^2$ и $e = 2$. По претходном, координате тачке P су $(x_P, y_P) = [\frac{a^2}{k}(-1,0) + \frac{b^2}{k}(1,0) + \frac{e^2}{1-k}(x,y)]/[\frac{a^2}{k} + \frac{b^2}{k} + \frac{e^2}{1-k}] = \frac{2k}{((1-k)(x^2+y^2)+(1+k)}(\frac{x}{k}, y)$.
У правоуглим координатама, услов $PA + PB \leqslant \frac{AB}{\sqrt{1-k^2}}$ се (након квадрирања) своди на једначину елипсе: $k^2x_P^2 + y_P^2 \leqslant \frac{k^2}{1-k^2}$. Ово је заиста задовољено, јер је $((1-k)(x^2+y^2)+(1+k))^2 \geqslant 4(1-k^2)(x^2+y^2)$, па је $k^2x_P^2 + y_P^2 = \frac{4k^2(x^2+y^2)}{((1-k)(x^2+y^2)+(1+k))^2} \leqslant \frac{k^2}{1-k^2}$.