Министарство просвете, науке и технолошког развоја

Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

18. мај 2022. године

Први дан

1. За неконстантан полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x],\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, кажемо да је симетричан акко је $a_k = a_{n-k}$, за свако $k = 0, 1, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Тежину неконстантног полинома $P \in \mathbb{R}[x]$, у ознаци $t(P)$, дефинишемо као вишеструкост оне нуле полинома P која има највећу вишеструкост.
а) Доказати да постоје неконстантни, монични, међусобно различити полиноми $P_1, P_2, ..., P_{2021} \in \mathbb{R}[x]$, од којих ниједан није симетричан, такви да је производ свака два (различита) симетричан полином.
б) Колико најмање може бити $t(P_1 \cdot P_2 \cdot ... \cdot P_{2021})$, ако су $P_1, P_2, ..., P_{2021} \in \mathbb{R}[x]$ неконстантни, монични, међусобно различити полиноми, од којих ниједан није симетричан, док је производ свака два (различита) симетричан полином?

2. Нека је γ кружница описана око троугла ABC. Тачке E и F изабране су на страницама AB и AC, редом, тако да је $BE = CF$. Кружница описана око троугла AEF и кружница γ секу се у тачки D, $D \neq A$, док се нормала из тачке D на праву EF и кружница γ секу у тачки G, $G \neq A$, а праве AD и EF у тачки P. Ако је пресек праве PG и кружнице γ тачка J, $J \neq G$, доказати да је

$$\frac{JE}{JF} = \frac{AE}{AF}.$$

3. Нека је n непаран природан број. На кружницу је постављено n идентичних куглица, од којих су неке црне, а остале беле. За $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ дефинишемо квалитет броја k на следећи начин: ако бисмо померили сваку куглицу за k места у смеру кретања казаљке на сату, квалитет броја k је број позиција на којима се није променила боја куглице.
а) Доказати да за свако n постоји $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ тако да је квалитет броја k барем $\frac{n-1}{2}$.
б) Доказати да постоји бесконачно много непарних природних бројева n за које постоји конфигурација белих и црних куглица, таква да ниједно k нема квалитет већи од $\frac{n-1}{2}$.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја

Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

19. мај 2022. године

Други дан

4. Означимо са $s(k)$ дужину странице најмањег једнакостраничног троугла у који се може спаковати k јединичних једнакостраничних троуглова. Доказати да вредност израза

$$4+\left\lceil 2\sum_{i=1}^{n} s(i(i+3))\right\rceil$$

никада не може бити потпун квадрат.

5. Дат је природан број n дељив са 3 такав да је $2n-1$ прост број. Да ли постоји цео број $x>n$ такав да је број

$$nx^{n+1}+(2n+1)x^{n}-3(n-1)x^{n-1}-x-3$$

једнак производу првих неколико непарних простих бројева?

6. У трапезу $ABCD$, са основицама AB и CD, важи $CD=k\cdot AB$ $(0<k<1)$. Тачка P је таква да је $\sphericalangle PAB=\sphericalangle CAD$ и $\sphericalangle PBA=\sphericalangle DBC$. Доказати да је $PA+PB\leqslant \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cdot AB$.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Сваки задатак вреди 7 бодова.