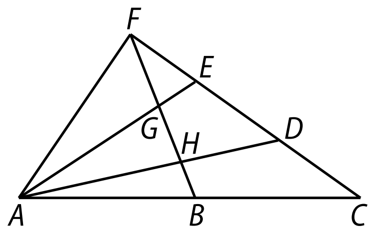
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

12.03.2022.

III разред

1. Запиши све троуглове са слике.



2. Медвед Вини током сваког лета добије 5 kg, а током сваке зиме изгуби 4 kg. Његова маса се не мења током пролећа и јесени. У јесен 2021. године његова маса је била 100 kg. Колику масу је медвед Вини имао у пролеће 2018. године?

3. Код неких бројева четврте стотине цифра десетица једнака је збиру цифара стотина и јединица. Одреди таква два различита броја, тако да је:
а) њихов збир највећи могућ;
б) њихова разлика број шесте десетице. Одреди сва решења.

4. Запиши све бројеве мање од 300 који у свом запису имају тачно две двојке.

5. У сабирању

ФА + ЛА + МИ = СИ

истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре. Одреди највећу могућу вредност збира и у том случају једно решење датог сабирања.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 54/4**) На слици се уочава 15 троуглова: *ABH*, *ABG*, *ABF*, *ACD*, *ACE*, *ACF*, *BCF*, *AHG*, *AHF*, *ADE*, *ADF*, *HDF*, *AGF*, *AEF*, *GEF* [**за свака 3 тачно наведена троугла по 4 бода**].

2. Медвед Вини током једне године повећа масу за 1 kg [**5 бодова**]. Како је у јесен 2021. године имао 100 kg, следи да је у пролеће 2021. године имао 95 kg [**8 бодова**], па је у пролеће 2018. године имао 95 kg – 3 kg = 92 kg [**7 бодова**].

3. Сви бројеви код којих је цифра десетица једнака збиру цифара стотина и јединица, а налазе се у четвртој стотини су 330, 341, 352, 363, 374, 385 и 396.
а) Највећи збир се добија када саберемо два највећа броја међу наведеним, тј. 385 и 396 [**10 бодова**].
б) Постоје два решења: 396 и 341 [**5 бодова**] и 385 и 330 [**5 бодова**], јер је разлика у оба случаја 55.

4. Међу двоцифреним бројевима постоји један такав: 22. Међу троцифреним постоји 19 таквих бројева, а то су: 122, 202, 212, 220, 221, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292. Дакле, укупно постоји 20 тражених бројева [**за сваки тачан број 1 бод, за сваки погрешно наведен број одузети 1 бод, при чему ученик не може имати негативан број бодова**].

5. Како је СИ двоцифрени број са различитим цифрама, највећа могућа вредност збира је 98 [**10 бодова**]. Нека могућа решења су: 45 + 35 + 18 = 98, 50 + 30 + 18 = 98, 60 + 20 + 18 = 98. [**За било који тачан збир 10 бодова**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

12.03.2022.

IV разред

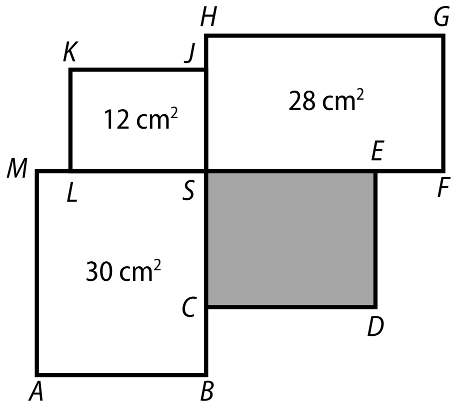
1 За број кажемо да је „растући" ако је свака његова цифра (осим прве), гледано са лева на десно, за један већа од претходне. Одреди „растући" број чија је трећина природан број већи од 1500 и мањи од 2300.

2. Дешифруј сабирање

$$\overline{AB}+\overline{ABC}+\overline{ABCD}=3000,$$

тако да истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима одговарају различите цифре.

3. На три правоугаоника написане су њихове површине. Израчунај површину осенченог правоугаоника *CDES* ако је:
$BC = 2$ cm, $EF = 2$ cm,
$FG = 4$ cm, $HJ = 1$ cm и
$ML = 1$ cm.



4. Бројеви 1, 2, 3, ..., 40 написани су један за другим, без запете, тако да се добије број

123456789101112...383940.

Који је највећи број који можеш да добијеш ако из написаног броја обришеш 66 цифара (редослед цифара не смеш да мењаш)?

5. Некад се у радионици играчака производило 198 аутића дневно. Сада се за 6 дана произведе толико аутића колико се некад производило за 8 дана. Колико аутића сад може да се произведе за 100 радних дана?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Означимо тражени број са x. Како је трећина броја између 1500 и 2300, то је $4500 < x < 6900$ [**5 бодова**]. Како је број x растући, он може бити један од бројева 4567, 5678 и 6789 [**7 бодова**]. Трећина броја x је природан број, па је број x дељив са 3. Тражено решење је $x = 6789$ [**8 бодова**].

2. Цифра A не може да буде 1, нити већа од 2, па је $A = 2$ [**5 бодова**]. Дакле, $\overline{2B}+\overline{2BC}+\overline{2BCD}=3000$, па је $B+\overline{BC}+\overline{BCD}=780$. Одавде закључујемо да је $B = 7$ [**5 бодова**]. Из $7+\overline{7C}+\overline{7CD}=780$ следи да је $C+\overline{CD}=3$, па закључујемо да је $C = 0$ [**5 бодова**] и $D = 3$ [**5 бодова**].

3. Како је површина правоугаоника *SFGH* једнака 28cm^2 и $FG = 4$ cm, то је $SF = 7$ cm и $SE = 5$ cm (јер је $EF = 2$ cm) [**5 бодова**]. Како је $HJ = 1$ cm и $HS = 4$ cm, то је $JS = 3$ cm. Даље је $LS = 4$ cm [**5 бодова**], а онда и $MS = 5$ cm. Сада је $MA = BS = 6$ cm, а онда и $SC = 4$ cm [**5 бодова**]. Коначно, тражена површина је $P = 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$ [**5 бодова**].

4. У датом броју је записано 9 једноцифрених и 31 двоцифрен број, па он укупно има $9 + 31 \cdot 2 = 71$ цифру [**8 бодова**]. Дакле, после прецртавања ће остати петоцифрен број. Да би број био што већи, треба да имамо што већи број деветки. Како у њему постоје 4 деветке (у сваком од бројева 9, 19, 29, 39 по једна) [**8 бодова**], највећи број који може остати после прецртавања је 99994 [**4 бода**].

5. (**МЛ 55/3**) Раније би се за 8 дана произвело $8 \cdot 198 = 1584$ аутића [**8 бодова**]. Сада се за дан произведе $1584 : 6 = 264$ аутића [**8 бодова**], а за сто дана $100 \cdot 264 = 26400$ аутића [**4 бода**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

12.03.2022.

V разред

1. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ комплементни. Збир углова α и γ је $123°$. Израчунај углове α, β и γ.

2. Колико има трочланих подскупова скупа

$$A=\left\{\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{8}{11},\frac{9}{11},\frac{10}{11}\right\}$$

у којима је збир најмањег и највећег елемента једнак 1?

3. Вања је замислила три броја. НЗД првог и другог броја је 12, првог и трећег 8, а другог и трећег 20. Који су најмањи природни бројеви које је она могла да замисли?

4. Укупно 24 особе поделиле су 48 кроасана. Свако дете добило је по 8 кроасана, свака жена по 2, а сваки мушкарац по 1 кроасан. Колико је било деце, колико жена, а колико мушкараца који су поделили кроасане, ако је свако добио бар по један кроасан? Одреди сва решења.

5. Одреди све просте бројеве a, b и c такве да је

$$4a+5b+6c=96.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Из услова задатка је $\alpha+\beta=180°$, $\beta+\gamma=90°$ и $\alpha+\gamma=123°$. Ако саберемо леве и десне стране једнакости и потом поделимо са 2, добијамо да је $\alpha+\beta+\gamma=196°\ 30'$ [**8 бодова**]. Одузимањем прве три једнакости од добијене добијамо да је $\gamma=16°\ 30'$ [**4 бода**], $\alpha=106°\ 30'$ [**4 бода**] и $\beta=73°\ 30'$ [**4 бода**].

2. Најпре одредимо парове разломака (најмањи и највећи), чији је збир 1. То су: $\left(\frac{1}{11},\frac{10}{11}\right),\left(\frac{2}{11},\frac{9}{11}\right),\left(\frac{3}{11},\frac{8}{11}\right),\left(\frac{4}{11},\frac{7}{11}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{6}{11}\right)$ [**5 бодова**]. У подскупу са првим паром може бити 8 разломака [**2 бода**], са другим паром 6 [**2 бода**], са трећим 4 [**2 бода**], са четвртим 2 [**2 бода**], а ниједан разломак са последњим паром [**2 бода**]. Дакле, укупно има $8+6+4+2=20$ подскупова [**5 бодова**].

3. Нека су тражени бројеви a, b и c. Тада је НЗД$(a, b) = 12$, НЗД$(a, c) = 8$ и НЗД$(b, c) = 20$, па мора да важи: $12 \mid a$ и $8 \mid a$ [**3 бода**]; $12 \mid b$ и $20 \mid b$ [**3 бода**]; $8 \mid c$ и $20 \mid c$ [**3 бода**]. Како тражимо најмање вредности бројева a, b и c, следи да је $a =$ НЗС$(12, 8) = 24$ [**4 бода**], $b =$ НЗС$(12, 20) = 60$ [**4 бода**] и $c =$ НЗС$(8, 20) = 40$ [**3 бода**].

4. Означимо са D број деце, са Z број жена и са M број мушкараца. Како је $8D+2Z+M=48$ и $D+Z+M=24$, одузимањем левих и десних страна једнакости добијамо да је $7D+Z=24$ [**8 бодова**]. Заменом вредности за D у овој једнакости са 1, 2 и 3 добијамо следећа решења: $D=1$, $Z=17$, $M=6$ [**4 бода**], $D=2$, $Z=10$, $M=12$ [**4 бода**] и $D=3$, $Z=3$, $M=18$ [**4 бода**].

5. (**МЛ 54/5**) Како су бројеви $4a$, $6c$ и 96 парни, то је $b=2$ [**5 бодова**]. Полазна једнакост постаје $4a+6c=86$, односно $2a+3c=43$ [**2 бода**]. Како је $2a\geq 4$, то је $3c\leq 39$, тј. $c\leq 13$ [**5 бодова**], па је $c\in\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Директном провером добијамо да су решења: $c=3$, $a=17$ [**2 бода**]; $c=7$, $a=11$ [**2 бода**]; $c=11$, $a=5$ [**2 бода**]; $c=13$, $a=2$ [**2 бода**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

12.03.2022 - VI разред

1. Колико има петоцифрених бројева чије су све цифре различите и:
а) дељиви су са 10;
б) збир прве и последње цифре је 8?

2. Збир два броја и њиховог збира је $\frac{40}{21}$. Израчунај сабирке ако је апсолутна вредност једног четири пута већа од апсолутне вредности другог.

3. Дат је троугао ABC. Угао који граде симетрале спољашњих углова код темена B и C једнак је унутрашњем углу код темена A и за $7°$ је већи од унутрашњег угла код темена C. Упореди дужине страница троугла ABC.

4. Нека је n најмањи природан број дељив са 60, који се записује само помоћу цифара 0 и 7. Колико делилаца има број n?

5. У Петровом одељењу има n ученика. Сви ученици скупљају албуме са сличицама. Сваки ученик је сакупио бар један албум, а највише од свих, 8 албума, сакупио је Петар. Одреди најмању вредност броја n тако да сигурно можемо да тврдимо да постоји бар 5 ученика који су сакупили исти број албума.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

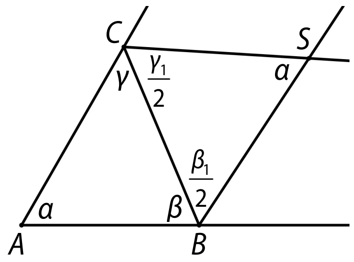
1. а) Цифра јединица мора да буде 0 [**2 бода**]. Од цифара 1, 2, ..., 9, цифра на месној вредности десетица хиљада може се одабрати на 9 начина. Цифра на месној вредности јединица хиљада на 8 начина, на месној вредности стотина на 7 начина и на месној вредности десетица на 6 начина [**4 бода**]. Дакле, укупно постоји $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ [**4 бода**] петоцифрених бројева дељивих са 10.
б) Прва и последња цифра броја се могу изабрати на 7 начина (1 и 7; 2 и 6; 3 и 5; 5 и 3; 6 и 2; 7 и 1; 8 и 0) [**4 бода**]. За избор цифара на месним вредностима јединица хиљада, стотина и десетица, када су прва и последња цифра већ изабране, постоји редом 8, 7 и 6 могућности (јер су све цифре различите), па тражених петоцифрених бројева има $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2352$ [**6 бодова**].

2. (**МЛ 55/4**) Означимо сабирке са a и b. По услову задатка је $a + b + (a + b) = \frac{40}{21}$, одакле је $a + b = \frac{20}{21}$ [**4 бода**]. Како је $|a| = 4|b|$, разликоваћемо два случаја.

Ако је $a = 4b$, онда је $b = \frac{4}{21}$ и $a = \frac{16}{21}$ [**8 бодова**].

Ако је $a = -4b$, онда је $b = -\frac{20}{63}$ и $a = \frac{80}{63}$ [**8 бодова**].

3. По услову задатка је $\measuredangle CSB = \alpha$, $\alpha = \gamma + 7°$, $\measuredangle SCB = \frac{\gamma_1}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\measuredangle SBC = \frac{\beta_1}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{2\alpha-7^\circ}{2}$. За унутрашње углове у троуглу BSC важи да је $\alpha + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{2\alpha-7^\circ}{2} = 180^\circ$, одакле је $5\alpha + \beta = 367°$ (*1) [**7 бодова**]. За унутрашње углове у троуглу ABC важи да је $\alpha + \beta + \alpha - 7° = 180°$, одакле је $2\alpha + \beta = 187°$ (*2) [**7 бодова**]. Одузимањем једнакости (*2) од једнакости (*1) добијамо да је $\alpha = 60°$, а онда и $\gamma = 53°$, $\beta = 67°$ [**4 бода**]. Како је $\beta > \alpha > \gamma$, онда је $b > a > c$ [**2 бода**].



4. Да би број био дељив са 60, потребно је да буде дељив и са 3 и са 4 и са 5 [**2 бода**]. Дакле, због дељивости са 5 последња цифра мора бити 0 [**2 бода**]. Да би број био дељив са 4, двоцифрени завршетак му мора бити дељив са 4. Како број 70 није дељив са 4, двоцифрени завршетак мора бити 00 [**4 бода**]. На крају, да би број био дељив са 3, збир цифара му мора бити дељив са 3. Најмањи могући збир цифара који је дељив са 3 је 21, па је најмањи тражени број 77700 [**6 бодова**]. Како је $77700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 37$ [**2 бода**], то је број делилаца једнак $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 72$ [**4 бода**].

5. Преостала деца у Петровом одељењу могла су сакупити најмање 1, а највише 7 албума [**5 бодова**]. Ако је исти број албума сакупило по 4 ученика, тада би у одељењу било $7 \cdot 4 + 1 = 29$ ученика [**10 бодова**]. Сваки следећи ученик би био пети ученик у групи која је сакупила исти број албума, па је у одељењу најмање 30 ученика [**5 бодова**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

12.03.2022.

VII разред

1. Упореди разломке $\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2}$ и $\frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}$.

2. Одреди последњу цифру збира

$$1^{2022}+2^{2022}+3^{2022}+\ldots+2021^{2022}.$$

3. У биоскоп су отишли две другарице и три друга и купили су 5 карата тако да седе у истом реду једно до другог. На колико начина они могу да седну на 5 седишта тако да другарице седе једна до друге? Замена места седења било које две особе се сматра новим распоредом седења.

4. Дат је трапез $ABCD$ основица $AB = 5$ cm и $CD = 3$ cm. Дијагонала AC је нормална на крак BC, а дијагонала BD дели угао на дужој основици на пола. Одреди висину тог трапеза.

5. Нека је M пресек симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC троугла ABC. Ако је центар уписане кружнице троугла AMB уједно и центар описане кружнице троугла ABC, одреди мере углова троугла ABC.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. За позитивне бројеве a, b, c, d важи да ако је $ad > bc$, онда је $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Ако је $a = 3^{2021} + 2$, $b = c = 3^{2022} + 2$ и $d = 3^{2023} + 2$, онда је

$ad = (3^{2021} + 2) \cdot (3^{2023} + 2) = 3^{4044} + 20 \cdot 3^{2021} + 4$ [**7 бодова**],

$bc = (3^{2022} + 2) \cdot (3^{2022} + 2) = 3^{4044} + 12 \cdot 3^{2021} + 4$ [**7 бодова**].

Како је $20 \cdot 3^{2021} > 12 \cdot 3^{2021}$, то је $ad > bc$, тј. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, па закључујемо да је $\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2} > \frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}$ [**6 бодова**].

2. У табели су приказане последње цифре 2022. степена бројева који се завршавају сваком могућом цифром (последње цифре степена се периодично понављају) [**10 бодова** за тачно одређене последње цифре степена].

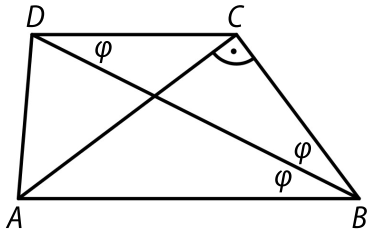
Број	$...1^{2022}$	$...2^{2022}$	$...3^{2022}$	$...4^{2022}$	$...5^{2022}$	$...6^{2022}$	$...7^{2022}$	$...8^{2022}$	$...9^{2022}$	$...0^{2022}$
Последња цифра	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

Збир бројева $1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + ... + 10^{2022}$ завршава се цифром 5 [**3 бода**]. Збир 2022-их степена првих 2020 бројева можемо да поделимо у 202 групе, где је последња цифра збира бројева у свакој групи 5:

$$1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + ... + 2020^{2022} = (1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + ... + 10^{2022}) + ... + (2011^{2022} + 2012^{2022} + 2013^{2022} + ... + 2020^{2022}),$$

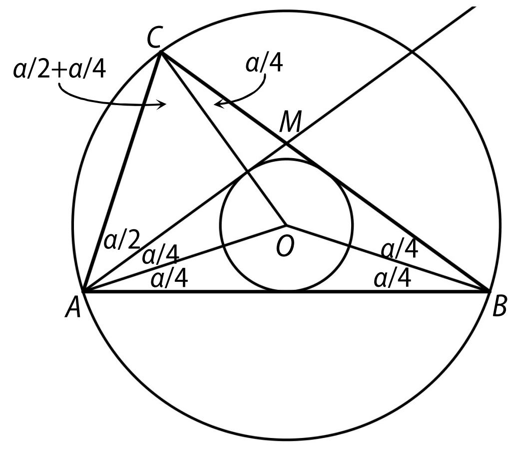
па је последња цифра збира $1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + ... + 2020^{2022}$ цифра 0 [**5 бодова**]. Последња цифра траженог збира је 1 [**2 бода**].

3. Како другарице седе једна до друге, проблем се своди на ситуацију када 4 особе треба распоредити на 4 места. То се може урадити на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ начина [**12 бодова**]. Како се две девојчице могу распоредити на 2 начина да седе једна до друге, то је укупан број распореда $24 \cdot 2 = 48$ [**8 бодова**].



4. (**МЛ 54/5**) Углови ABD и BDC су једнаки као углови са паралелним крацима [**2 бода**]. Како дијагонала BD дели угао на дужој основици на пола, то су једнаки и углови ABD и CBD. Троугао BCD једнакокраки, па је $BC = CD = 3$ cm [**6 бодова**]. Троугао ABC је правоугли, па Питагорином теоремом добијамо да је $AC = 4$ cm [**4 бода**]. Висина трапеза једнака је висини која одговара хипотенузи правоуглог троугла ABC, па је $\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{h \cdot AB}{2}$, одакле је висина трапеза $h = 2{,}4$ cm [**8 бодова**].

5. Означимо углове троугла са α, β, γ и нека је O центар описане кружнице троугла ABC и уписане кружнице троугла ABM. Како је AM симетрала угла α, то је $\measuredangle CAM = \measuredangle MAB = \frac{\alpha}{2}$ [**2 бода**]. OA је симетрала угла MAB, па је $\measuredangle MAO = \measuredangle OAB = \frac{\alpha}{4}$ [**2 бода**]. Дужи OA, OB и OC су полупречници описане кружнице троугла ABC, па су троуглови OAB, OBC и OCA једнакокраки. Одавде добијамо да је $\measuredangle OCA = \measuredangle OAC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4}$ [**4 бода**], и $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = \measuredangle OBC = \measuredangle OCB = \frac{\alpha}{4}$ [**4 бода**]. Сада имамо да је $\beta = \frac{\alpha}{2}$ и $\gamma = \alpha$ [**4 бода**]. Из једнакости $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ добијамо да је $\alpha = 72°$, $\beta = 36°$, $\gamma = 72°$ [**4 бода**].



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

12.03.2022 - VIII разред

1. Основа праве четворостране призме је ромб чија је страница дужине 12 cm и оштар угао 60°. Израчунај запремину призме ако је висина једнака половини дуже дијагонале ромба у основи.

2. Колико има шестоцифрених природних бројева дељивих са 5, који се записују само цифрама 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (цифре се не понављају), при чему цифре 1 и 2 не могу бити једна до друге?

3. Основа тростране пирамиде *ABCS* је једнакокрако-правоугли троугао *ABC*, са правим углом у темену *B*, а врх *S* се нормалном пројекцијом на раван основе пројектује у тачку *D*, која је средиште ивице *AC*. Ако је бочна страна *ACS* правоугли троугао са правим углом код темена *S* и $SD = \sqrt{2}$ cm, израчунај површину пирамиде *ABCS*.

4. У скупу целих бројева реши једначину $y^4 + x = xy + 8$.

5. Да ли је могуће бројеве 3, 3^2, ..., 3^{n-1}, 3^n поделити у три групе (не обавезно са истим бројем елемената) тако да је производ елемената сваке групе исти, уколико је:
а) $n = 2022$; б) $n = 2023$?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

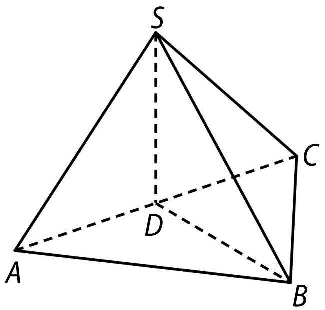
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Површина основе једнака је збиру површина два једнакостранична троугла, па је $B = 72\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ [**8 бодова**]. Дужа дијагонала основе је $d_1 = 12\sqrt{3}$ cm [**8 бодова**], па је тражена запремина $V = B \cdot \dfrac{d_1}{2} = 1296$ cm^3 [**4 бода**].

2. Последња цифра свих тражених бројева мора да буде 5 [**2 бода**]. Цифре 1, 2, 3, 4 и 6 се на првих 5 позиција могу распоредити на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начина [**4 бода**]. Случај када су цифре 1 и 2 једна до друге своди се на случај када 4 цифре треба распоредити на 4 места, а таквих могућности има $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ [**5 бодова**], при чему се цифре 1 и 2 у свакој од тих могућносту могу распоредити на 2 начина [**4 бода**]. Тражени број петоцифрених бројева једнак је $120 - 2 \cdot 24 = 72$ [**5 бодова**].

3. Тачка S се налази на симетрали странице AC, па је $AS = SC$. Дакле, троугао ACS је једнакокрако-правоугли, па су троуглови ABC и ACS подударни [**5 бодова**] и површина сваког је $\dfrac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2$ cm^2. Троуглови SDC и SDB су једнакокрако-правоугли, па применом Питагорине теореме добијамо да је: $SC = SB = SA = BC = BA = 2$ cm [**5 бодова**]. Одавде закључујемо да су троуглови ABS и BCS једнакостранични и површина сваког је $\sqrt{3}$ cm^2 [**5 бодова**]. Површина пирамиде је $P = 2(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABS}) = 2(2+\sqrt{3})$ cm^2 [**5 бодова**].



4. Полазну једначину можемо записати у облику $x(y - 1) = y^4 - 8$, а како је $y \neq 1$, добијамо $x = \dfrac{y^4-8}{y-1} = \dfrac{y^4-1}{y-1} - \dfrac{7}{y-1} = (y^2+1)(y+1) - \dfrac{7}{y-1}$ [**10 бодова**]. Из услова $x \in \mathbb{Z}$, важи $(y - 1) \mid 7$, па $y - 1 \in \{-7, -1, 1, 7\}$ [**6 бодова**]. Решења су $(x, y) \in \{(-184, -6), (8, 0), (8, 2), (584, 8)\}$ [**4 бода**].

5. (**МЛ 54/1**) Производ свих n бројева је $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ [**4 бода**]. Ако бројеви могу да се поделе у три групе тако да је производ у свакој групи исти (на пример једнак је A), онда мора да буде $A^3 = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Закључујемо да $3 \mid \dfrac{n(n+1)}{2}$ [**5 бодова**]. Како $\dfrac{2023 \cdot 2024}{2}$ није дељиво са 3, закључујемо да за $n = 2023$ није могуће поделити бројеве на тражени начин [**5 бодова**]. Покажимо да је то могуће за $n = 2022$. Да бисмо ово показали потребно је конструисати барем једну поделу датих бројева на три групе тако да је производ бројева у све три групе једнак, односно да је збир изложилаца у све три групе једнак. Бројеве 1, 2, 3, ..., 2021, 2022 можемо поделити у скупове од по шест узастопних бројева на следећи начин: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}, ..., {2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022}. У сваком од ових скупова, збир првог и шестог; другог и петог, трећег и четвртог записаног броја је једнак. Дакле, ако из сваког скупа у по једну групу ставимо по један пар поменутих бројева, добићемо тражену поделу [**6 бодова**].