Министарство просвете, науке и технолошког развоја

Друштво математичара Србије

16. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2022. године

Први дан

1. Нека је k уписана кружница унутар оштоуглог троугла ABC, $AC \neq BC$, и l његова споља приписана кружница, која додирује страницу AB. Права p, која садржи тачку C и нормална је на AB, сече кружницу k у тачкама X и Y, а кружницу l у тачкама Z и T, при чему важи следећи распоред тачака: $X - Y - Z - T$. Кружница m, која садржи тачке X и Z, сече праву AB у тачкама D и E. Доказати да су тачке D, Y, E и T концикличне.

2. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a^3+b^3+c^3 = 3$. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{3-2a}+\frac{1}{3-2b}+\frac{1}{3-2c} \geqslant 3.$$

3. Табела димензија $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$, је попуњена бројевима од 1 до n^2, али тако да је разлика било која два броја на суседним пољима највише n и да је за свако $k = 1, 2, \ldots, n^2$ скуп поља на којима су бројеви $1, 2, \ldots, k$ повезан, као и скуп поља на којима се налазе бројеви $k, k+1, \ldots, n^2$. Под суседним пољима подразумевамо поља са заједничком страном, док се скуп поља сматра повезаним ако се из сваког елемента до сваког другог елемената тог скупа поља може доћи идући само по суседним пољима унутар тог скупа. Кажемо да је пар суседних бројева, тј. бројева који се налазе на суседним пољима, добар, ако је њихова апсолутна разлика тачно n (један број се може налазити у више добрих парова). Доказати да се у табели налази барем $2(n-1)$ добрих парова.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја

Друштво математичара Србије

16. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

2. април 2022. године

Други дан

4. Претпоставимо да $f(n)$ означава укупан број бројева $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, за које важи да је $\mathrm{NZD}(x, n)$ прост или једнак 1 . Доказати да важи

$$\sum_{d|n} f(d) + \varphi(n) \geqslant 2n.$$

За које n важи знак једнакости?

5. На табли је написано n целих бројева, $n \in \mathbb{N}$. У једном потезу могуће је изабрати два једнака написана броја и један од њих повећати за 1, а други смањити за 1. Доказати да у овој игри није могуће одиграти више од $\dfrac{n^3}{6}$ потеза.

6. Нека су p и q различити прости бројеви и α реалан број, $0 < \alpha < 3$. Доказати да у низу

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots$$

постоји члан тог низа мањи од $2pq$, који је дељив неким од бројева p и q.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Сваки задатак вреди 7 бодова.