

IX Кавкаска математичка олимпијада
Мајкоп, 11.–16. март 2024. године



Јуниори. Дан 1.

12. март

1. Куглице 3 боје — црвена, плава и бела — смештене су у две кутије. Ако се изваде 3 куглице из прве кутије, међу њима ће сигурно бити плава. Ако се изваде 4 куглице из друге кутије, међу њима ће сигурно бити црвена. Ако се изваде било којих 5 лоптица (само из прве кутије, или само из друге кутије, или из обе кутије истовремено), међу њима ће сигурно бити бела куглица. Који је највећи могући укупан број куглица у овим кутијама?
2. Положај ромбова $ABDK$ и $CBEL$ је такав да B припада дужи AC и E припада дужи BD . Тачка M је средиште KL . Доказати да је $\angle DME = 90^\circ$.
3. Дато је 10 природних бројева a_1, a_2, \dots, a_{10} чији је збир једнак 1000. Производ њихових факторијала

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{10}!$$

је десети степен неког природног броја. Доказати да су сви дати бројеви једнаки.

4. Дат је скуп P од $n > 100$ тачака у равни таквих да никоје три нису колинеарне, и скуп S од $20n$ различитих дужи, свака од којих спаја неки пар тачака из P . Доказати да постоји права која не садржи ни једну од тачака из скупа P и сече најмање 200 дужи из скупа S .