МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из предмета Анализа са алгебром

Спаривање у теорији графова

Ученик:
Богдана Јелић, **IVд**

Ментор:
Др Соња Чукић

Београд, јун 2015.

Садржај

Предговор

При решавању разних математичких проблема често се сусрећемо са стварима које су наизглед непримењиве у реалном животу. Међутим, лепота математике јесте у томе што чим мало боље упознамо неку област схватамо колико се само проблема који се појављују у природи, ослања и базира баш на темељима математике. Као једна од најлепших области, комбинаторика има широку примену у програмирању и другим наукама. А теорија графова представља основе за развој свих друштвених мрежа. У овом раду сам дала једну општу слику теорије спаривања - прављења парова темена у неком графу. Приликом писања алгоритама за оптимална спаривања, више значаја сам придавала идејама него техничим детаљима, јер су баш идеје оно најлепше у математици.

Због тога што ме је увела у свет математике као науке, и што је све четири године покушавала да нам покаже како је математика заправо много више од обичног средњошколског градива, желим да се захвалим свом ментору, професорки Соњи Чукић на бескрајном стрпљењу у раду самном.

Такође, захвалност дугујем и свим професорима који су ми предавали, и пружили ми основе знања за даљи развој. Са тим основама, надам се да ћу успети да наставим и проширим своје познавање математике, и да створим једну широку слику о овој краљици свих наука.

Београд, јун 2015. *Богдана Јелић*

1 Основни појмови у теорији графова

С обзиром да ћемо радити са структурама теорије графова, неопходно је да на почетку дамо дефиниције и основне појмове које ћемо користити у даљем раду.

Дефиниција 1.1. *Прост неоријентисан граф* је уређен пар $G = (V, E)$, где је V скуп *чворова* или *темена*, а E скуп *грана* или *ивица*, тј. неуређених парова различитих темена из V.
За чворове $u, v \in V$ кажемо да су *суседни* ако су повезани граном.

У даљем раду ћемо често писати само V и E мислећи на $G(V)$ и $G(E)$, тј. скуп чворова односно грана у графу G.

Дефиниција 1.2. Ако је S подскуп чворова графа G, скуп чворова суседних чворовима скупа S обележавамо са $N(S)$. Сада, *степен чвора* v означавамо са $d(v)$ и важи $d(v) = |N(v)|$.
Број грана којима је тачно један крај у неком подскупу темена $U \subseteq V$, а други крај у осталим теменима графа означаваћемо са $d(U)$.

Дефиниција 1.3. *Подграф* графа G је граф G' чији је скуп темена подскуп скупа темена од G, а скуп грана подскуп скупа грана од G.

Дефиниција 1.4. Граф G је *k-партитан* ако се његова темена могу поделити у k дисјунктних подскупова $V_1, V_2, \dots, V_k$ тако да нема грана унутар истог подскупа.

Дефиниција 1.5. За граф G кажемо да је *k-регуларан* ако му је степен сваког чвора k.

Дефиниција 1.6. *Пут* у графу G је низ $v_1, v_2, \dots, v_k$ међусобно различитих темена графа G у коме су чворови v_i и v_{i+1} суседни за свако $1 \leq i \leq k-1$.
Ако нам је важна ознака ивица $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ којима су повезана темена која сачињавају пут, писаћемо $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k$.

Дефиниција 1.7. Ако је $U \subseteq V$ графа G, граф $G[U]$ ћемо звати *индукован граф* теменима U, и важи $G[U] = (U, \{\{x, y\} \mid x, y \in U, \{x, y\} \in E(V)\})$.

У дајем раду ћемо често писати само $G - U$ мислећи на индукован граф $G[V - U]$.

Дефиниција 1.8. Дефинишимо релацију $\sim$ на скупу темена графа:

$$x \sim y \text{ ако и само ако постоји пут између } x \text{ и } y \text{ у графу } G$$

Лако се показује да је $\sim$ релација еквиваленције. Класе еквиваленције се називају *компоненте повезаности* графа G, и подграфови индуковани овим скуповима темена су највећи повезани подграфови графа G.

Дефиниција 1.9. За чвор $v \in V$ кажемо да је *везивни чвор* ако индуковани граф $G[V - v]$ није повезан.

Дефиниција 1.10. *Комплетан граф* G је граф код кога су свака два различита чвора повезана граном.

2 Спаривање графа

2.1 Појам спаривања

Дефиниција 2.1. Скуп M међусобно несуседних грана графа G назива се *спаривање* графа G, при чему кажемо да су гране суседне ако деле теме.

Дефиниција 2.2. Спаривање M је *максимално* ако се не може проширити додавањем грана, тј. скуп грана $M' = M \cup \{e\}$ није спаривање ни за једну грану $e \in E \backslash M$.

Највеће спаривање је оно спаривање код кога скуп M има највећу кардиналност. Број грана у највећем спаривању означавамо са $\alpha'(G) = |M|$.

Дефиниција 2.3. Спаривање M је *савршено* (или *1-фактор*) ако су сви чворови графа покривени гранама спаривања.

Нека је дато неко фиксирано спаривање M графа G. Тада, у односу на M, дефинишемо следеће важне појмове:

• Чвор v је *слободан* или *непокривен* чвор ако није садржан ни у једној грани спаривања M. У супротном за чвор v кажемо да је *покривен* спаривањем M.

На исти начин дефинишемо непокривену грану:

• Грана e је *слободна* или *непокривена* ако се не налази у спаривању M. Иначе, за грану e кажемо да је *покривена* спаривањем M.

2.2 Алтернативни путеви

Дефиниција 2.4. Пут $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$ је *алтернативни пут* ако су гране $e_1, e_3, \ldots$ са непарним индексима непокривене, а гране $e_2, e_4, \ldots$ са парним индексима покривене.

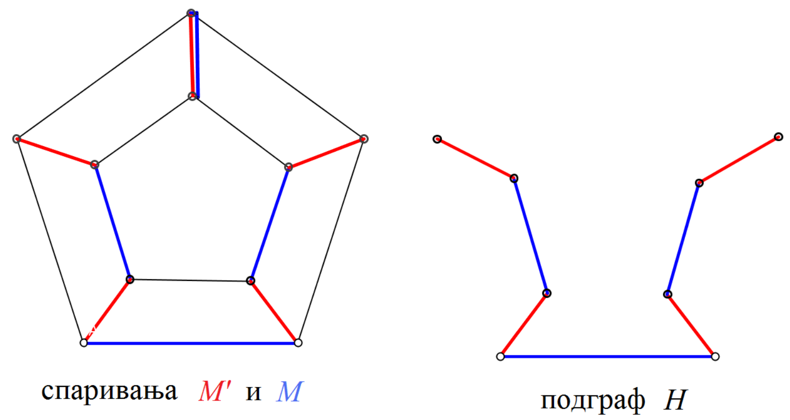
• Ако је чвор v_0 слободан, онда за чворове $v_0, v_2, ...$ кажемо да су *спољашњи*, а за чворове $v_1, v_3, ...$ кажемо да су *унутрашњи*.

• Пут $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$ је *увећавајући пут* ако је алтернативан и ако су чворови v_0 и v_k једини слободни чворови у њему.

Теорема 2.1. Бержова теорема. Спаривање M је највеће ако и само ако у графу $G = (V, E)$ не постоји увећавајући пут (у односу на M).

Доказ. Нека је M највеће спаривање, а P увећавајући пут у графу G. Тада је $M' = M \triangle E(P)$ такође спаривање у G, и $|M'| = |M| + 1$, што је контрадикција.

Претпоставимо сада да не постоји увећавајући пут, и да спаривање M није највеће, тј. да постоји спаривање M' тако да је $|M'| > |M|$. Нека је $H = (V, M' \triangle M)$ подграф графа G (као на слици 1). Сви чворови графа H имају степене највише два јер сваки чвор може бити садржан највише у једној грани из M и највише у једној грани из M'. Због тога су све компоненте графа H или контуре парне дужине (смењују се гране из M и M') или путеви у којима се наизменично смењују гране из M и M'. Пошто је $|M'| > |M|$, а свака контура садржи исти број грана из M и M', барем једна компонента графа H мора бити пут, у коме има једна грана више из M' него из M. Почетна и крајња грана у том путу морају бити гране из M', па почетни и крајњи чвор овог пута нису покривени са M. Дакле, овај пут ће бити увећавајући пут за спаривање M, контрадикција. □



слика 1.

3 Спаривања у бипартитним графовима

Дефиниција 3.1. *Бипатритан граф* G је 2-партитан граф, тј. граф код кога се скуп чворова $V(G)$ може разбити на два подскупа X и Y, тако да свака грана $e \in E(G)$ садржи једно теме из X и једно из Y. Подскупови X и Y се називају *класе*. Углавном обележавамо $G = (X \cup Y, E)$ или $G[X, Y]$.

Тврђење 3.1. Значајан чвор. Кажемо да је чвор v графа G *значајан* ако је покривен у сваком највећем спаривању графа G, тј. ако важи

$$\alpha'(G - v) = \alpha'(G) - 1.$$

Онда сваки непразан бипартитан граф има значајан чвор.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да за сваки чвор графа $G[U, V]$ постоји неко највеће спаривање у коме је он слободан. Нека је, без умањења општости, чвор $u \in U$ слободан у неком највећем спаривању M. Посматрамо скуп чворова S до којих може да се дође из u алтернативним путевима. Нека је $U \cap S = A$ и $V \cap S = B$. Како је спаривање M највеће, ниједан чвор из B не сме бити слободан, јер би иначе имали увећавајући пут, што би било у супротности са теоремом 2.1.
Пошто је граф бипартитан, алтернативни пут P из u до неког чвора $b \in B$ се завршава слободном граном. Како су сви чворови из B покривени, постоји неки чвор b_1 тд. $bb_1 \in M$. Ако $b_1 \notin A$, пошто се алтернативни пут P до b завршава слободном граном, пут Pbb_1 је такође алтернативан, а $b_1 \notin A$,

контрадикција. Дакле, сваки чвор из B је повезан неком граном спаривања M са неким чвором из A, одакле закључујемо да је $|B| \leq |A| - 1$ (чвор u је слободан).
Сада посматрамо алтернативни пут P којим се долази до неког чвора $a \in A$. Пошто је граф бипартитан, последња грана из P мора да буде покривена, па су сви чворови из $A - u$ покривени, и крајеви грана из M су у B. Претпоставимо да имамо неку грану из неког чвора $a \in A - u$ ка $a_1 \in V \setminus B$. Тада грана aa_1 мора бити слободна, па је пут Paa_1 такође алтернативан, а $a \notin B$, контрадикција. Дакле, све гране из скупа A иду ка чворовима из B, и сваки чвор из A је упарен са неким чвором из B граном спаривања M, одакле следи $|A| - 1 \leq |B|$, па закључујемо да важи $|B| = |A| - 1$, и постоји савршено спаривање између чворова из B и чворова из $A - u$.
Посматрамо сада неки чвор $v \in B$. Постоји највеће спаривање M' у коме је чвор v слободан. Посматрајмо сада скупове A' и B' дефинисане на исти начин као малопре. Нека је чвор a био повезан са чвором v у спаривању M. Чвор a мора да припада скупу A' и мора бити покривен у спаривању M' (иначе можемо само додати ту грану, па спаривање M' не би било највеће). Како чворови из A имају само гране ка B постоји грана из M' која га спаја са неким чвором из B, и нека је то чвор $b \in B$. Чвор b мора бити повезан граном из M са неким чвором $a_1 \in A$ различитим од a, а пошто је спаривање M' највеће не смемо да имамо нигде увећавајући пут, па чвор a_1 мора бити покривен спаривањем M'.
Због тога чвор a_1 мора бити повезан граном из M' са неким чвором b_1 из B. Овако добијамо да сваки чвор из $A - u$ мора бити повезан граном из M' са неким чвором, а како чворови из $A - u$ имају само гране ка чворовима из B, и како је чвор $u \in B$ слободан, следи:

$$|A| - 1 = |B| - 1.$$

Како имамо $|B| = |A| - 1$, добијамо контрадикцију. □

3.1 Холова теорема

Дефиниција 3.2. Нека је S произвољан коначан скуп и $F = \{S_i : i \in I\}$ коначна фамилија подскупова скупа S. Допуштено је да F буде мултискуп, тј. да можемо имати и једнаке подскупове скупа S. *Систем различитих представника* фамилије F је подскуп $A = \{a_i : i \in I\}$ скупа S такав да $a_i \in S_i$, и $a_i \neq a_j$ за $i \neq j$ и $i, j \in I$. Другим речима, сваки подскуп из посматране фамилије има свог представника, и свака два подскупа из фамилије имају различите представнике.

Један логичан услов који мора бити задовољен да би постојао систем различитих представника је да је укупан број елемената у унији подскупова из неке подфамилије већи или једнак од броја подскупова у тој подфамилији.
По Холовој теореми, овај услов је не само потребан, већ и довољан:

Теорема 3.2. Холова теорема. Фамилија $F = \{S_i : i \in I\}$, има систем различитих представника ако и само ако за свако $J \subseteq I$ важи услов:

$$|\bigcup_{j \in I} S_j| \geq |J|.$$

Испоставља се да се многи практични проблеми на природан начин доводе у везу са системом различитих представника.
Један од најпознатијих примера је проблем *радника у фабрици.* У овом проблему сваки радник има скуп послова које може да обавља, и потребно је распоредити раднике тако да сваки има посао у својој струци.
Још једна интерпретација проналажења система различитих представника је и проблем упаривања момака и девојака. Свака девојка има скуп момака који јој се допадају, и треба их упарити тако да свака девојка буде са момком који јој се свиђа. Због овог проблема, Холова теорема се често назива и *Теорема о мувању.*

Холова теорема у теорији графова има следећу интерпретацију:

Теорема 3.3. Холова теорема за графове. Ако је $G = (U \cup V, E)$ бипартитан граф, тада G има спаривање које покрива све чворове из U ако и само ако за свако $U' \subseteq U$ важи услов:

$$|N(U')| \geq |U'| \qquad (*)$$

Доказ. Нека спаривање M покрива сваки чвор из U. Посматрајмо произвољан подскуп U' од U. Сви чворови из U' су повезани са различитим чворовима у $N(U')$ гранама из спаривања M због тога очигледно важи $|N(U')| \geq |U'|$.

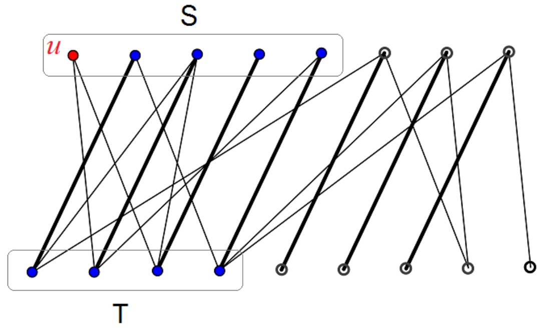
Нека је сада M највеће спаривање, и нека важи $(*)$. Претпоставимо да M не покрива U. Тада постоји слободан чвор $u \in U$. Нека су $S \subseteq U$ и $T \subseteq V$ скупови чворова до којих можемо стићи алернативним путевима из u. Пошто је спаривање M по претпоставци највеће, не постоји увећавајући пут у односу на M, па се ниједан алтернативни пут из u не сме завршавати у T, тј. сви чворови из T су покривени. Пошто је граф бипартитан, и чворови из S су повезани само са чворовима из T, а сваки чвор из S (осим чвора u) мора бити покривен спаривањем M , и сваки чвор из T мора бити покривен граном из M која води ка S, закључујемо:

$$|T| = |S| - 1 \text{ и } T \subseteq N(S).$$

Пошто је сваки чвор из S покривен спаривањем M, сваки чвор из $N(S)$ је повезан са u алтернативним путем, па имамо $N(S) = T$. Добијамо:

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1 \leq |S|,$$

па имамо контрадикцију са $(*)$. □



слика 2.

Последица 3.4. Бипартитан граф $G(U \cup V, E)$ има савршено покривање ако и само ако $|U| = |V|$ и $|N(U')| \geq |U'|$ за свако $U' \subseteq U$ $\triangle$

Последица 3.5. Сваки регуларан бипартитан граф има савршено спаривање.

Доказ. Нека је $G(U \cup V, E)$ регуларан бипартитан граф, и нека је $k \geq 1$. Пошто је G регуларан $|U| = |V|$. Нека је $U' \subseteq U$ и нека су са E_1 обележене гране које иду из U', а нека су са E_2 обележене гране које иду из $N(U')$. По дефиницији $N(U')$ имамо да важи $E_1 \subseteq E_2$, па

$$k \cdot |N(U')| = E_2 \geq E_1 = k \cdot |U'|.$$

С обзиром да је $k \geq 1$ добијамо $|N(U')| \geq |U'|$ за свако $U' \subseteq U$, па по последици 3.4 граф G има савршено спаривање. $\triangle$

3.2 Веза између спаривања и покривања графа

Дефиниција 3.3. *Покривање* графа G је подскуп чворова $K \subseteq V$ такав да свака грана графа G има барем један крај у K.
Покривање K је *најмање* ако у графу G не постоји покривање K' тако да важи $|K| > |K'|$. Број чворова у најмањем покривању се назива *наткривајући број* графа G, и означава се $\beta(G)$.
Покривање K је *минимално* ако ниједан подскуп од K није покривање.

Ако је M спаривање графа G, а K је покривање графа G, најмање један крај сваке гране из M је у K, па закључујемо да важи:

$$|M| \leq |K|.$$

Шта више, показује се да ако једнакост важи, онда је M највеће спаривање, а K је најмање покривање графа G.

Тврђење 3.6. Нека је M спаривање, а K покривање графа G тако да важи $|M| = |K|$. Тада је M највеће спаривање, а K је најмање покривање.

Доказ. Свака грана из M мора да има бар један крај у K, а како је $|M| = |K|$, имамо да је тачно по један крај сваке гране спаривања M у K, и нема других чворова у K осим ових.
Дакле, све гране које постоје у графу G имају барем по један крај у чворовима из K. Ако спаривање M покрива неку грану, та грана сигурно има барем један чвор у K. Одавде имамо да је највећи број грана у M баш $|K|$ (јер никоје две гране из M не смеју да садрже исти чвор). Сада добијамо да је M највеће спаривање графа G.
Претпоставимо сада да постоји покривање K' тако да $|K| > |K'|$. То је еквивалентно са $|K'| \leq |K| - 1$, а како имамо да је број грана у спаривању M баш једнак $|K|$,

$$|M| = |K| > |K| - 1 \geq |K'|,$$

следи да постоји грана из M која нема ниједан крај у K', што је контрадикција.
Дакле K је најмање покривање, а M највеће спаривање. □

Може се показати да је у сваком бипартитном графу кардиналност највећег спаривања једнака броју чворова најмањег покривања. У наредном примеру ћемо то лако показати преко алтернативних путева:

Теорема 3.7.(*König* 1931) У сваком бипартитном графу важи:

$$\alpha'(G) = \beta(G).$$

Доказ. Нека је $G[X, Y]$ бипартитан граф и нека је M највеће спаривање у G. Означимо са U скуп слободних темена спаривања M у скупу X. Нека је K скуп чворова тако да из сваке гране у спаривању M имамо тачно један чвор, и нека је одабран крај гране у Y ако се до њега може доћи неким од алтернативних путева чворова из U, иначе бирамо крај гране из X. Сада имамо да је $|K| = |M|$, па ако докажемо да је K покривање графа G, по тврђењу 3.6 имамо да је K најмање покривање.
Нека је e грана у графу G са крајевима $v_1, v_2 \in V$, желимо да покажемо да један од чворова v_1 и v_2 лежи у K. Ако $e \in M$ услов је задовољен јер смо тако одабрали скуп K, па ћемо разматрити остале случајеве. Барем један од чворова v_1 и v_2 је крај неке гране из M (иначе су оба слободна па можемо увећати M). Ако је v_1 слободан чвор, онда до чвора v_2 можемо доћи граном e из $v_1 \in U$, а v_2 је крај неке гране у M. Одавде добијамо $v_2 \in K$, па имамо да је услов задовољен.
Дакле, остаје нам случај ако је v_1 крај неке гране из M. Ако је v_1 крај гране e_1 из M, означићемо са u чвор који је њен други крај. Како $v_1 \notin K$ онда се неки алтернативни пут P завршава у чвору u, али тада постоји алтернативни пут $P' = (P, e_1, e)$ који стиже до чвора v_2 (ако $v_2 \notin P$, иначе до чвора v_2 стиже део алтернативног пута P, $P' = P_b$). Пошто је M највеће спаривање, P' не сме бити увећавајући пут, па чвор v_2 мора бити покривен. Добијамо да $v_2 \in K$ јер се до њега може стићи алтернативним путем, па ће v_2 бити одабран из гране спаривања M која га садржи.
Дакле, K је покривање, $|M| = |K|$, па по тврђењу 3.6 имамо да је K је најмање покривање. Добијамо:

$$\alpha'(G) = \beta(G)$$ □

Теорема 3.8. *König-Ore формула.* Нека је $G[X, Y]$ бипартитан граф, M спаривање графа G, а U скуп чворова из X непокривених спаривањем M. Тада важи:

- За сваки $S \subseteq X$, важи $|U| \geq |S| - |N(S)|$,
- M је највеће спаривање графа G ако и само ако постоји подскуп $S \subseteq X$ тд. важи $|U| = |S| - |N(S)|$.

За кардиналност највећег спаривања у сваком бипартитном графу $G[X, Y]$ важи:

$$\alpha'(G) = |X| - \max\{|S| - |N(S)| : S \subseteq X\}.$$

Доказ.

• Ако је $|S| \geq |N(S)|$, максималан број чворова покривених спаривањем M у скупу S мора бити мањи или једнак од $|N(S)|$ јер свако теме може бити упарено са највише једним другим теменом. Следи да је број слободних темена у S већи или једнак од $|S| - |N(S)|$, тј.

$$|U| \geq |S| - |N(S)|.$$

• Ако за неки $S \subseteq X$ важи $|U| = |S| - |N(S)|$, а знамо да број слободних чворова у S мора бити већи или једнак од $|S| - |N(S)|$, имамо да су сви слободни чворови U графа G баш у скупу S, и сви чворови из $N(S)$ су упарени са чворовима S спаривањем M.
Докажимо да не постоји увећавајући пут у M. Како су сви слободни чворови U у S, ако постоји, увећавајући пут мора да почне из U, и мора да се заврши у слободном чвору. Пошто су сви чворови из $N(S)$ упарени са чворовима из S, сваки алтернативни пут из U мора да се завршава у $N(S)$, а ниједан од тих чворова није слободан. Дакле, не постоји увећавајући пут, па је по Бержовој теореми спаривање M највеће.
Обрнуто, ако имамо највеће спаривање M, узећемо за скуп S све слободне чворове из U, и све чворове из скупа X до којих можемо стићи неким алтернативним путевима. Доказаћмо да је $N(S)$ баш скуп чворова T из Y до којих се може стићи алтернативним путевима. Да бисмо до неког чвора из X стигли алтернативним путем, последња грана у том путу мора бити покривена, па ако имамо било коју другу грану која полази из тог темена, до чвора на њеном крају такође постоји алтернативни пут, па добијамо $N(S) \subseteq T$. Ако до неког чвора $y \in Y$ долази алтернативни пут, последња грана мора бити слободна, па да не бисмо имали увећавајући пут, то теме мора бити покривено неком граном $yx \in M$. Крај те гране x је из скупа X, и до њега се може доћи алтернативним путем, па је сваки чвор из Y до кога се може доћи алтернативним путем повезан са неким чвором из S, следи $T \subseteq N(S)$. Дакле, $N(S) = T$, а како је сваки чвор из T повезан неком граном из M са чвором из S, добијамо да је број слободних чворова $|U|$, баш једнак $|S| - |N(S)| = |U|$.

Сада, пошто је $|U| \geq |S| - |N(S)|$ за свако $S \subseteq X$, а у највећем спаривању важи једнакост, то је $\max\{|S| - |N(S)| : S \subseteq X\} = |U|$ па имамо:

$$\alpha'(G) = |X| - \max\{|S| - |N(S)| : S \subseteq X\}.$$ □

4 Спаривање у произвољним графовима

Дефиниција 4.1. *Непарна компонента* графа је компонента са непарним бројем чворова. Број непарних компоненти графа G означићемо са $\text{nep}(G)$.

4.1 Теорема о савршеном спаривању

Наредну теорему је први доказао математичар Тат, и она нам говори када произвољан граф G има савршено спаривање. Да бисмо приказали различите технике у теорији спаривања, даћемо два доказа ове теореме.

Теорема 4.1. Теорема о савршеном спаривању. (*Tutte* 1947)
Граф $G = (V, E)$ има свршено спаривање ако и само ако за сваки $U \subseteq V$ важи услов:

$$nep(G - U) \leq |U|.$$

Доказ 1. Доказаћемо прво да ако је M савршено спаривање, услов теореме мора да важи. Нека је M савршено спаривање G, и нека је U произвољан подскуп чворова. Ако је нека компонента подграфа $G - U$ непарна, тада бар један њен чвор није покривен граном из M која је у тој компоненти графа, па је њен други крај у скупу U. Пошто се сваки чвор налази у тачно једној грани из M, следи да је $\mathrm{nep}(G - U) \leq |U|$, па мора да важи услов теореме.

Сада покажимо други смер. Претпоставимо да важи услов теореме и да граф G нема савршено спаривање. Тада можемо уочити граф G' добијен од графа G додавањем максималног броја грана, али тако да граф G' и даље нема савршено спаривање. Додавањем било које гране у граф G' добијамо граф са савршеним спаривањем, иначе можемо додати ту грану и добити граф са више грана од графа G' који нема савршено спаривање. Дакле граф G' нема савршено спаривање, али додавањем било које гране га добија.

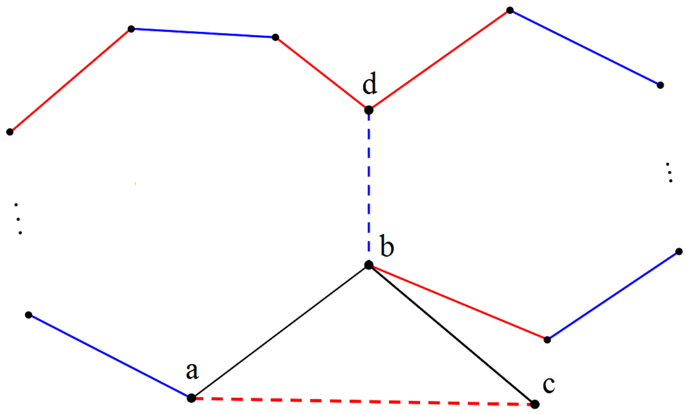
Приметимо да услов теореме важи и за граф G'. Додавањем грана неке две непарне компоненте се могу спојити у једну, следи $\mathrm{nep}(G' - U) \leq \mathrm{nep}(G - U)$. Сада, ако је U подскуп од G', имамо да важи: $|U| \geq \mathrm{nep}(G - U) \geq \mathrm{nep}(G' - U)$. Нека је $U = \emptyset$. Сада је $\mathrm{nep}(G') \leq 0$ па све компоненте графа G' имају паран број чворова.

Нека је сада W скуп чворова графа G' који су суседни са свим преосталим чворовима (W може бити празан скуп). Посматрамо $G' - W$.

• Ако је $G' - W$ унија комплетних графова, чворови сваке компоненте се могу упарити на произвољан начин тако да остане неупарен само по један чвор из сваке непарне компоненте. Према услову теореме, $|W| \geq \mathrm{nep}(G' - W)$, па њих можемо упарити са чворовима из W, а преостале чворове из W можемо спарити међусобно јер је укупан број чворова паран. Дакле добијамо да граф G' има савршено спаривање, контрадикција.

• Ако $G' - W$ није унија комплетних графова, тада нека компонента $G' - W$ садржи два несуседна чвора a и a'. Уочимо најкраћи пут P између њих, и прва три чвора на том путу: чворови a, b и c (чвор c може бити једнак a'). Пошто је P најкраћи пут, чворови a и c су несуседни, и мора постојати чвор d, који је несуседан са чвором b, иначе $b \in W$. Пошто додавањем било које гране у граф G' добијамо граф са савршеним спаривањем, постоји савршено спаривање M_1 графа $G' + ac$ и савршено спаривање M_2 графа $G' + bd$.
Уочимо сада најдужи пут $P' = (d, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ тако да су гране наизменично из спаривања M_1 и M_2, тј. $e_1, e_3, \ldots \in M_1$ и $e_2, e_4, \ldots \in M_2$. Ако је последња грана $e_k \in M_1$, онда теме v_k није крај ниједне гране из спаривања M_2, а такво једино теме поред d је b, па имамо да је $v_k = b$. Обележимо онда са C контуру $C = P + bd$. Ако је $e_k \in M_2$, онда на исти овај начин добијамо да је чвор v_k или a или c, јер само из чворова a и c немамо грану из M_1. Нека је у том случају контура $C = P + v_k b + bd$. У оба случаја, контура C је парне дужине, са

сваком другом граном из M_2, и једино грана bd није у графу G'. Контура C је увећавајући пут за спаривање M_2 у G', па ако заменимо њене гране гранама $C \backslash M_2$ добијамо савршено спаривање графа G', контрадикција.
Дакле добијамо да је наша претпоставка нетачна, тј. ако важи услов теореме граф G има савршено спаривање. □

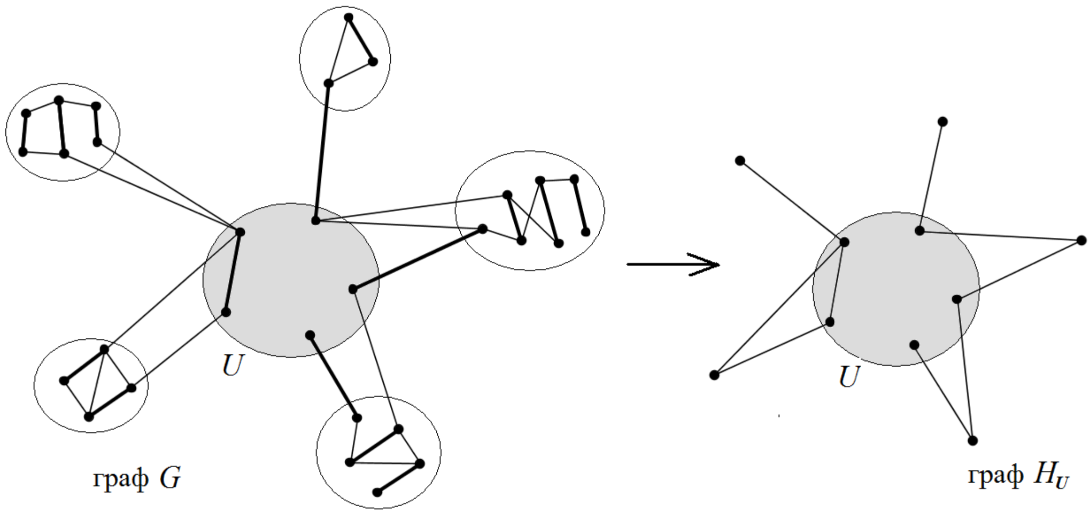


слика 3.

Да бисмо показали други доказ Татове теореме, уведимо још неке појмове везане за структуру произвољног графа G:

Дефиниција 4.2. Граф $G = (V, E)$ је *критичан* ако је $G \neq \emptyset$ и граф $G - v$ има савршено спаривање за сваки чвор $v \in V(G)$.

Дефиниција 4.3. За подскуп темена U графа G кажемо да је *упарен* са $G - U$ ако бипартитан граф H_U настао сажимањем сваке компоненте графа $G - U$ у један чвор (скуп чворова $\mathcal{C}_{G-U}$) и брисањем грана међу чворовима из скупа U има спаривање M које покрива све чворове скупа U.



слика 4.

Лема 4.2. Сваки граф $G = (V, E)$ садржи скуп темена U који задовољава:
(1) U је упарен са $G - U$;
(2) Свака компонента графа $G - U$ је критична.
За дати скуп темена U, граф G има савршено спаривање ако и само ако $|U| = |\mathcal{C}_{G-U}|$.

Доказ. Докажимо прво да ако постоји подскуп темена који задовољава услове, онда важи последње тврђење теореме. Ако граф G има савршено спаривање, онда као првом делу доказа 1 имамо да је $\text{nep}(G-U) \leq |U|$ за сваки подскуп чворова U, јер свака непарна компонента оставља најмање један чвор неспарен у оквиру компоненте, па други крај гране из покривања мора бити у U. Како је скуп U упарен, следи $|\mathcal{C}_{G-U}| \geq |U|$, а како су све компоненте $G-U$ критичне, $\text{nep}(G-U) = |\mathcal{C}_{G-U}|$, добијамо

$$|\mathcal{C}_{G-U}| = |U|.$$

Ако важи $|\mathcal{C}_{G-U}| = |U|$, очигледно је да у графу G имамо савршено спаривање. Пошто је U упарен, спаривање M ће садржати гране којима је U упарен, а за преостале чворове у свакој компоненти постоји савршено спаривање, јер су све компоненте критичне.

Да скуп чворова U који задовољава услове (1) и (2) постоји у сваком графу G доказујемо индукцијом по $|G|$.

Ако је $|G| = 0$ узимамо $U = \emptyset$.

Сада нека је $|G| > 0$, и претпоставимо да тражени скуп чворова постоји за све графове са мање темена. Нека је d најмањи ненегативан цео број тако да:

$$\text{nep}(G-T) \leq T + d$$

важи за свако $T \subseteq V$.
Сада мора постојати скуп A тако да важи једнакост:

∘ ако је $d = 0$ онда за $A = \emptyset$ важи $\text{nep}(G-\emptyset) \leq 0$, а број непарних компоненти графа G је већи или једнак од 0, тд. имамо $\text{nep}(G-\emptyset) = 0$

∘ ако је $d > 0$, једнакост је задовољена јер је d минимално.

Нека је U скуп чворова за које важи једнакост, и који има највећу кардиналност. Докажимо да је свака компонента C графа $G-U$ непарна. Ако је $|C|$ парно, одаберемо чвор $c \in C$, и пребацимо га у U. Сада је $U' = U \cup \{c\}$, $|C'| = |C| - 1$ и C' има непаран број чворова, па се сада међу скупом чворова C' налази најмање једна непарна компонента, па добијамо да важи:

$$\text{nep}(G-U') \geq \text{nep}(G-U) + 1 = |U| + 1 + d = |U'| + d \geq \text{nep}(G-U').$$

Дакле једнакост важи и код скупа U', а $|U'| > |U|$ што је контрадикција са максималном кардиналности скупа U.
Закључујемо да су све компоненте графа $G-U$ непарне.
Докажимо сада да је свака компонента графа $G-U$ критична. Претпоставимо да постоји чвор $c \in C$, тако да у графу $C' = C - c$ не постоји савршено спаривање.
По индуктивној хипотези, за скуп C' постоји подскуп чворова T' графа C' за који важе услови (1) и (2). Сада имамо да је $|T'| \leq |\mathcal{C}_{C'-T'}| = \text{nep}(C'-T')$, а како је свака компонента графа $C'-T'$ критична, показали смо да ако важи $|T'| = \text{nep}(C'-T')$, постоји савршено спаривање графа C', следи:

$$|T'| < \text{nep}(C'-T')$$

Пошто је $|C|$ непарна, онда је $|C'|$ парна, па имамо да су $\text{nep}(C'-T')$ и $|T'|$ исте парности па се не могу разликовати за 1, тј.

$$\text{nep}(C'-T') \geq |T'| + 2.$$

За скуп $S = U \cup T' \cup \{c\}$ добијамо:

$$\begin{aligned} \operatorname{nep}(G - S) &= \operatorname{nep}(G - U) - 1 + \operatorname{nep}(C' - T') \\ &\geq |U| + d - 1 + |T'| + 2 \\ &= |S| + d \\ &\geq \operatorname{nep}(G - S). \end{aligned}$$

Добијамо да је $\operatorname{nep}(G - S) = |S| + d$, $|S| > |U|$, што је контрадикција јер је скуп U највећи скуп који задовољава ову једнакост.

Остаје нам још да покажемо да је U упарен са $G - U$.
Ако је $U = \emptyset$ очигледно је да важи тврђење, па разматрамо само случај када је $U \neq \emptyset$.
Како је $|U| + d = \operatorname{nep}(G - U)$, имамо да $\mathcal{C}_{G-U}$ није празан скуп. Примењујемо *König-Ore* формулу на граф H_U и $X = \mathcal{C}_{G-U}$. Нека је $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_{G-U}$ и нека је $N(\mathcal{C}') = U' \subseteq U$ Пошто је свака компонента $C \in \mathcal{C}'$ непарна компонента $G - U'$ имамо:

$$|N(\mathcal{C}')| = |U'| \geq \operatorname{nep}(G - U') - d \geq |\mathcal{C}'| - d,$$

одакле добијамо да $d \geq |\mathcal{C}| - |N(\mathcal{C}')|$.

Сада по *König-Ore* формули имамо да је највеће спаривање графа H_U:

$$\alpha' = |\mathcal{C}_{G-U}| - \max\{|\mathcal{C}'| - |N(\mathcal{C}')|\} \geq |\mathcal{C}_{G-U}| - d.$$

С обзиром да знамо:

$$|\mathcal{C}_{G-U}| - d = \operatorname{nep}(G - U) - d = |U|,$$

добијамо да је ово спаривање које обухвата све чворове U. □

Сада други доказ теореме о савршеном спаривању лако следи из претходног тврђења:

Доказ 2. Како сваки граф G садржи скуп темена U из претходног тврђења, из услова (1) и (2) имамо да је $|U| \leq |\mathcal{C}_{G-U}| = \operatorname{nep}(G-U)$, па ако претпоставимо да важи услов теореме, имамо $|U| \geq \operatorname{nep}(G - U)$, закључујемо да:

$$|U| = |\mathcal{C}_{G-U}|,$$

па граф G има савршено спаривање по последњем тврђењу леме 4.2.
Уколико граф G има савршено спаривање, услов Татове теореме очигледно важи као што смо показали у доказу 1. □

Размотримо сада још неке последице леме 4.2. Ако је дато неко спаривање M графа G, обележићемо са k_U број грана из M које имају најмање један крај у U, а са $k_{\mathcal{C}}$ број грана из M којима су оба краја у $G - U$. Пошто је свака компонента $\mathcal{C}_{G-U}$ непарна, барем једно теме није повезано граном са неким теменом из $G - U$.

Одатле имамо да свако спаривање M мора да задовољава:

$$k_U \leq |U|,\ k_{\mathcal{C}} \leq \frac{1}{2}(|V| - |U| - |\mathcal{C}_{G-U}|) \tag{$*$}$$

Шта више, постоји спаривање M_0 у коме важе оба знака једнакости. Прво одаберемо $|U|$ грана ка $G-U$ према услову (1) из леме, а онда пошто су све компоненте $C \in \mathcal{C}_{G-U}$ критичне, можемо да упаримо $\frac{1}{2}(|C|-1)$ грана у M у свакој компоненти. Број грана оваквог спаривања M_0 је тачно:

$$|M_0| = |U| + \tfrac{1}{2}(|V| - |U| - |\mathcal{C}_{G-U}|).$$

Сада посматрамо неко највеће спаривање M, $|M| \geq |M_0|$, али пошто свако спаривање M мора да задовољава услове $(*)$, следи $|M| = |M_0|$, па је кардиналност највећег спаривања баш $|M_0|$. Како у M важи $|U| = k_U$, највеће спаривање M мора да изгледа баш као што смо описали спаривање M_0:

∘ сваки чвор из $u \in U$ повежемо граном из M са неким чвором $t \in G-U$ што можемо због услова (1), а у свакој од компоненти C упаримо тачно $\frac{1}{2}(|C|-1)$ грана у M што можемо због услова (2).

На овакав начин можемо да конструишемо највеће спаривање било ког графа G, што су показали *Gallai* (1964) и *Edmond* (1965). У наредном поглављу, показаћемо неке алгоритме проналажења највећег спаривања графа G.

4.2 Последице Татове теореме

Теорема 4.3. Тат-Бержова формула. Највећа кардиналност спаривања M у графу $G = (V, E)$ једнака је:

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2}\left(|V| - \min\{\mathrm{nep}(G-U) - |U| : U \subseteq V\}\right) \qquad \square$$

Теорема 4.4. Петерсенова теорема. Сваки 3-регуларан граф без везивних чворова има савршено спаривање.

Доказ. Нека је $G = (V, E)$ 3-регуларан граф и нека је U подскуп од G. Посматрамо све непарне компоненте $C_i \in G-U$. Пошто G нема везивних чворова, број грана које иду из сваке компоненте C_i ка скупу U мора бити најмање два $\forall\ 0 \leq i \leq k$. Пошто је граф G 3-регуларан, а $|C_i|$ је непаран, број грана $d(C_i)$ које излазе из C_i ка U мора бити непаран (укупан број грана које полазе из свих темена C_i је непаран, а укупан број грана које полазе ка теменима C_i је 2·број ивица унутар компоненте, па број ивица које излазе из сваке компоненте мора да буде непаран).

$$\Rightarrow d(C_i) \geq 3,\ 1 \leq i \leq k$$

Пошто су компоненте C_i дисјунктне, имамо:

$$3 \cdot k \leq \sum_{i=1}^{k} d(C_i) = d\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right) \leq d(U) \leq 3 \cdot |U|$$

Па имамо да $nep(G-U) = k \leq |U|$ за сваки $U \subseteq V$, па по Татовој теореми граф G има савршено спаривање. $\square$

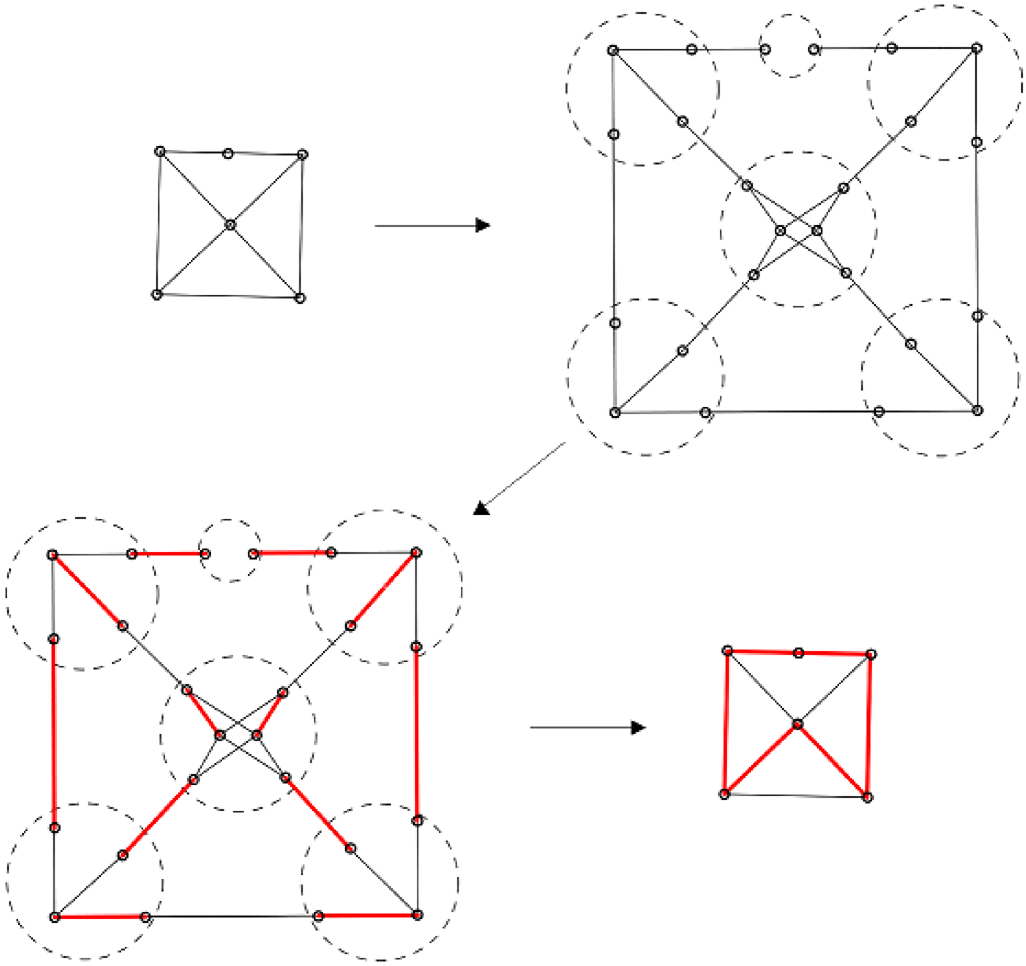
4.3 Фактори

Дефиниција 4.4. Нека је дат граф G, и нека је f природан број. Онда је f-*фактор* подграф графа G који садржи сва темена и задовољава услов да је степен сваког чвора једнак f.

Заправо, 1-фактор графа G је његово савршено спаривање, а 2-фактор графа G је граф чије су све компоненте циклуси.
Многи проблеми у теорији графова могу бити решени алгоритмима полиномске сложености, а један од њих је да ли граф G има f-фактор. Тат је показао да се овај проблем може свести на проблем одређивања да ли неки граф G' има 1-фактор, тј. савршено спаривање.
Описаћемо како проблем f-фактора сводимо на проблем о савршеном спаривању.
За свако теме v можемо претпоставити да је $d(v) \geq f$ (иначе је очигледно да не постоји f-фактор) и узимамо да граф G нема петље.

◦ Свако теме v ћемо заменити скупом Y_v од $d(v)$ темена, сваки са степеном један. Сада додајемо скуп X_v од $d(v) - f$ темена, и формирамо комплетан бипартитан граф $H_v[X_v, Y_v]$. Дакле, граф H добијамо када свако теме v заменимо бипартитним графом H_v. Сада повежемо сваку ивицу која је ишла у чвор v са различитим теменом из Y_v.

Ево како 2-фактор проблем сводимо на проблем савршеног спаривања:



слика 5.

Приметимо да је обрнут процес симетричан, граф G добијамо од графа H само сажимањем сваке компоненте H_v у један чвор v.

У графу H, чворови X_v су спојени само само са чворовима Y_v. Тако да ако је спаривање M 1-фактор графа H, $d(v) - f$ чворова X_v морају бити спојени са $d(v) - f$ чворова Y_v гранама спаривања M, а преосталих f чворова из Y_v су повезани спаривањем M са осталим чворовима из H. Тако да када од графа H сажимањем добијемо граф G, из сваког темена ће излазити тачно f грана, па ће то бити f-фактор графа G. На исти овај начин имамо да сваки f-фактор графа G можемо да трансформишемо у 1-фактор графа H.

Дакле, овим смо свели проблем налажења f-фактора графа G на проблем налажења савршеног спаривања у неком графу, што је и један од проблема са којима се стално сусрећемо у теорији спаривања. Зато у наредном поглављу дајемо неке математичке алгоритме за налажење највећег спаривања у теорији графова.

5 Алгоритми у теорији спаривања

5.1 Потрага за увећавајућим путевима

Приликом потраге за највећим спаривањем у неком графу, Бержова теорема нам даје да је најприроднији начин за налажење највећег спаривања потрага за увећавајућим путевима. Уколико нађемо увећавајући пут, спаривање M замењујемо спаривањем $M \triangle E(P)$. Све док постоји увећавајући пут понављамо процес, и по Бержовој теореми добијамо да је крајње спаривање M највеће.
Зато желимо да нађемо најефикаснији начин проналажења увећавајућих путева у графу G. За то ће нам бити потребни још неки појмови:

Дефиниција 5.1. Нека је дат граф G, и нека је M спаривање графа G. *Алтернативно стабло* T је стабло са кореном у слободном чвору u, тако да је пут uTv алтернативан у спаривању M за сваки чвор $v \in V(T)$. Алтернативно стабло је *покривено* ако је једини слободан чвор у њему корен.

У наредном алгоритму тражимо или увећавајући пут које почиње слободним чвором u, или највеће покривено алтернативно стабло са кореном у чвору u.

Означимо темена на парном растојању од чвора u као *спољашња*, а на непарном растојању као *унутрашња*. Обележимо скуп спољашњих темена са $S(T)$, а скуп унутрашњих темена са $U(T)$.

Претрагу почињемо само слободним чвором u који је тривијално покривено алтернативно стабло, и покушавамо да проширимо алтернативно стабло T.

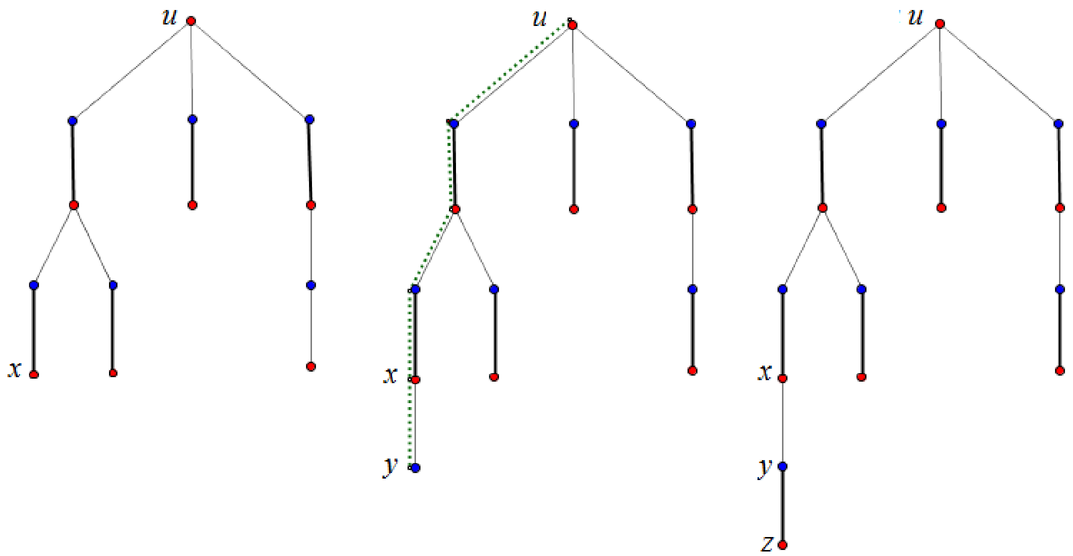
Посматрајмо сада покривено алтернативно стабло T са кореном у чвору u. Пошто је покривено, у стаблу T не постоји увећавајући пут са почетним чвором u. Ако такав пут уопште постоји, гране из T ка осталим чворовима морају садржати једну грану овог пута. Зато покушавамо да проширимо стабло T. Ако не постоји ниједна грана xy тако да је $x \in S(T)$ и $y \in G - T$, стабло T је највеће, па смо завршили претрагу.

Уколико постоји таква грана, имамо два случаја:

∘ ако је чвор y слободан, онда смо нашли увећавајући пут, и спаривање M замењујемо спаривањем $M \triangle E(P)$,

∘ ако је чвор y покривен неком граном yz из спаривања M, стабло T проширујемо чворовима y и z, и гранама xy и yz.

Процедуру понављамо све док постоји увећавајући пут, или док можемо увећати покривено стабло T.



слика 6.

Алгоритам 5.1 Проналажење увећавајућег пута (*APS Алгоритам*)

УЛАЗ: граф G, спаривање M, и слободно теме $u \in G$
ИЗЛАЗ: спаривање M са једном ивицом више него улазно спаривање или покривено стабло T са кореном $u(T)$, скуповима $S(T)$, $U(T)$, и скупом грана $M(T)$ у T покривених спаривањем M.

Корак (1) Постављамо $V(T) = \{u\}$, $E(T) = \emptyset$, $S(T) = \{u\}$

Корак (2) Циклус: Ако постоји грана xy тд. $x \in S(T)$ и $y \in G - T$, мењамо $V(T) \mapsto V(T) \cup \{y\}$, $E(T) \mapsto E(T) \cup \{xy\}$, иначе прелазимо на корак (3)

∘ ако y није покривен спаривањем M онда стављамо $P = uTy$, замењујемо $M \mapsto M \triangle E(P)$, и исписујемо M

∘ ако је y покривен спаривањем M, замењујемо $V(T) \mapsto V(T) \cup \{z\}$, $E(T) \mapsto E(T) \cup \{yz\}$, $S(T) \mapsto S(T) \cup \{z\}$, где $yz \in M$, и поново идемо на корак (2).

Корак (3) Постављамо $T = (V(T), E(T))$, $u(T) = u$, $U(T) = V(T) \setminus S(T)$, и $M(T) = M \cap E(T)$, и прелазимо на корак (4)

Корак (4) исписујемо T, $u(T)$, $S(T)$, $U(T)$, $M(T)$

У случају да нам алгоритам врати увећавајући пут, само понављамо овај алгоритам и сваког пута увећавамо спаривање M. Испоставља се да нам, уколико алгоритам врати покривено стабло T, то не гарантује да немамо увећавајући пут P. Међутим, ако у T не постоје два суседна спољашња темена из $S(T)$, можемо смањити наше претраживање на граф $G - T$. То нам даје следеће тврђење:

Тврђење 5.1. Ако је T покривено алтернативно стабло добијено APS алгоритмом, и ако никоја два темена из $S(T)$ нису суседна, тада ниједан увећавајући пут у графу G не садржи чвор из стабла T.

Доказ. Претпоставимо да неки увећавајући пут садржи неко теме $a \in T$. До сваког чвора из T може да долази само грана која није из спаривања M, јер су сви чворови покривени, па чвор a мора да припада $U(T)$ (све слободне гране које излазе из чворова $S(T)$ су испитане приликом конструкције стабла). Дакле следећа грана у увећавајућем путу мора да буде грана из T која припада спаривању M. Чак шта више, из стабла T не може да се "изађе" јер се након сваке покривене гране налазимо у спољашњем чвору, а све слободне гране које иду из спољашњих чворова $S(T)$ ка чворовима који нису у T су испитане, гране међу теменима из $S(T)$ не постоје, а ако грана спаја нека два темена из $S(T)$ и $U(T)$, тај пут се може наставити само кроз грану из T која је покривена спаривањем M, па имамо контрадикцију јер се овакав пут који је заробљен у стаблу T не може завршавати слобоним чвором. $\square$

Приметимо да ово тврђење важи за све бипартитне грфове, јер два темена из $S(T)$ не могу бити суседна (припадају истој страни бипартитног графа). Зато на бази овог алгоритма можемо наћи највеће спаривање бипартитног графа G.

5.2 Мађарски алгоритам за бипартитне графове

Алгоритам проналажења највећег спаривања у бипартитним графовима који ћемо овде изложити често се назива и *Мађарски алгоритам*, јер га је први дао мађарски математичар *Egerváry* 1931. године.
Нека је $G[X, Y]$ бипартитан граф. У потрази за највећим спаривањем графа G, почећемо са неким спаривањем M и применом APS алгоритма ћемо тражити увећавајуће путеве са почетком у неком слободном чвору u (ако нема слободних чворова, онда је спаривање савршено). Уколико нам APS алгоритам врати увећавајући пут P, ми ћемо заменити спаривање M спаривањем $M \triangle E(P)$, и наставићемо са применом APS алгоритма са неким слободним чвором, повећавајући спаривање M. Ако алгоритам врати стабло T, по тврђењу 5.1 можемо даље претраживати граф $G - T$, тако што ћемо заменити граф G графом $G - T$, сачувати спаривање $M(T) = M \cap E(T)$ у стаблу T, а спаривање M ћемо заменити спаривањем $M \setminus E(T)$ у остатку графа, и онда ћемо наставити са применом APS алгоритма и тражењем увећавајућих путева све док имамо слободних чворова.

Овај алгоритам ће нам вратити:

∘ скуп свих покривених алтернативних стабала $\mathcal{T}$,
∘ скупове чворова $S = \bigcup\limits_{T \in \mathcal{T}} S(T)$, $U = \bigcup\limits_{T \in \mathcal{T}} U(T)$,

- скуп $F = G - (S \cup U)$ и његово спаривање $M(F)$,
- највеће спаривање $M_{max} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} M(T) \cup M(F)$, и
- скуп слободних чворова у спаривању M_{max}: $L = \{u(T) | T \in \mathcal{T}\}$

Докажимо још да је ово спаривање добијено Мађарским алгоритмом највеће спаривање графа $G[X, Y]$:

Теорема 5.2. Спаривање M_{max} добијено Мађарским алгоритмом је највеће спаривање бипартитног графа G.

Доказ. Нека су $\mathcal{T}, S, U$ и L скупови стабала, спољашњих темена, унутрашњих темена и слободних чворова враћених Мађарским алгоритмом. Једини слободни чворови су коренови стабала, следи $|L| = |\mathcal{T}|$, а како је свако стабло покривено, имамо да је у сваком стаблу $|S(T)| = |U(T)| + 1$. Добијамо да важи:

$$|S| = |U| - |\mathcal{T}|.$$

Како су у графу G кроз Мађарски алгоритам чворови из S суседни само са чворовима из U, у сваком произвољном спаривању чворови из S могу бити суседни само са чворовима из U, па је најмањи број слободних чворова $L_{min} = |S| - |U|$, закључујемо да важи:

$$|L_{min}| = |S| - |U| = |\mathcal{T}| = |L|,$$

па имамо да је спаривање M_{max} добијено Мађарским алгоритмом баш највеће спаривање. □

Мађарски алгоритам се не користи само за проналажење највећег спаривања у графу, већ њиме добијамо и најмање покривање бипартитног графа. Нека је M_{max} највеће спаривање у бипартитном графу $G[X, Y]$, и нека су S и U скупови спољашњих и унутрашњих чворова враћених алгоритмом. Посматрамо скуп $H = G - (S \cup U)$.
Пошто спољашњи чворови могу бити суседни само са унутрашњим чворовима, а сваки унутрашњи чвор мора бити повезан са неким спољашњим, имамо да је $N(S) = U$. Зато скуп чворова U покрива све гране осим оних у графу H. Пошто по конструкцији графа H из алгоритма имамо да H има савршено спаривање, скуп чворова $X \cap H$ покрива све гране из H. Дакле, добијамо да је скуп чворова $K = U \cup (X \cap H)$ покривање графа G. Пошто је свако унутрашње теме покривено спаривањем M_{max}, а свако теме из $X \cap H$ је такође покривено, сва темена из K су покривена спаривањем M_{max}, а како из сваке гране спаривања имамо тачно једно теме у K, добијамо да је $|M_{max}| = |K|$, па по тврђењу 3.6 имамо да важи:

$$K = K_{min}.$$

5.3 Највеће спаривање у произвољном графу

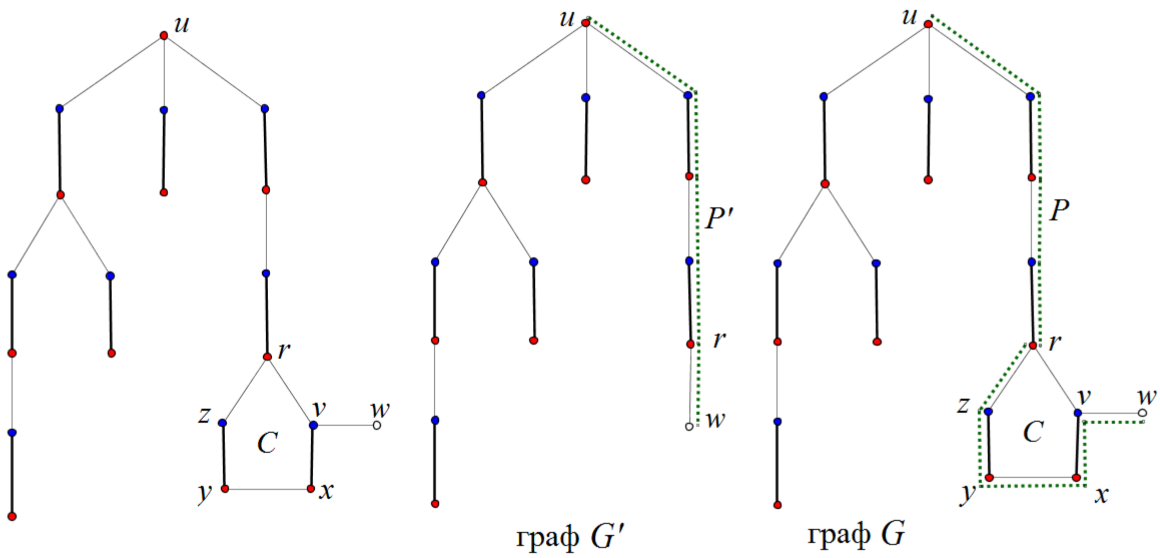
5.3.1 Латице и цветови у алтернативном стаблу

Као што смо видели у потрази за увећавајућим путевима, када имамо суседна спољашња темена, можемо имати увећавајући пут који APS алгоритам неће вратити. Разматрајући структуру стабла T у којој имамо два спољашња чвора x и y повезана, можемо уочити контуру C, која има корен у чвору r (то је спољашњи чвор у коме се раздвајају алтернативни путеви из корена стабла u до чворова x и y). Овакву контуру C називаћемо *латица*.

Сада посматрамо једану латицу. Када изузмемо корен латице, она има савршено спаривање у оквиру спаривања M, а чвор r који је корен мора припадати спољашњим чворовима, па је ивица којом се долази до њега покривена спаривањем M.

Како гране ка чворовима $G - T$ могу да иду само из унутрашњих темена, то увећавајући пут (који садржи грану xy) на изласку из контуре C мора имати слободну грану (грану која не припада M).

Кључ наше потраге за највећим спаривањем је да у стаблу T сажмемо сваку латицу у један чвор (корен латице) када год латица буде пронађена приликом APS алгоритма. Ако постоји грана vw тако да $v \in C$, а $w \in G - T$, онда до чвора w можемо стићи алтернативним путем из корена стабла. Сажимањем латице у њен корен добијамо граф $G' = G/C$. Ако је до чвора w у графу G ишао алтернативни пут P, у графу G' постоји алтернативни пут P' који иде од корена стабла до w. Очигледно је да важи и обрнут процес, тј. убацивањем сегмента rv контуре C од графа G' можемо добити граф G.
Као ефекат сажимања, граф G мењамо графом G/C, стабло $T \mapsto (T+xy)/C$, где су нам x и y два суседна спољашња темена у C, и спаривање $M \mapsto M \setminus E(C)$. Сада настављамо са применом алгоритма који се у програмирању назива APS^+ алгоритам.



слика 7.

Приметимо да понављајући APS^+ алгоритам више пута, свака латица бива зажета у свој корен који је спољашњи чвор, па један чвор $a \in S$ може бити

добијен сажимањем једне или више латица. Претпоставимо да је након k примена алгоритма, низ латица које су сажете $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$. Па добијамо низ модификованих графова $(G, G_1, G_2, \ldots, G_k)$, где је сваки граф G_i у низу добијен од претходног сажимањем контуре C_i. Зато ћемо подграфове графа G који су сажети у неком спољашњем темену у графу G_i називати *цветови*.
Показује се да сваки цвет задовољава следеће особине:

Тврђење 5.3. Нека је F цвет графа G. Онда важи:
(1) F је повезан и непарног је степена
(2) за сваки чвор $v \in F$, постоји алтернативни пут парне дужине од корена стабла T од чвора v.

Доказ. (1) Сваки цвет F је састављен од неког броја латица, и једини заједнички чвор свих латица је чвор у коме се цвет налази. Свака латица има непаран број чворова (укључујући чвор корен), па додавањем нове латице у цвет, број чворова се увећава за паран број. Дакле, парност броја чворова у цвету не мења, па је цвет F непарног степена.
Цвет F је очигледно повезан, јер су сви чворови из једне латице повезани са кореном, па су латице међусобно повезане преко корена.
(2) Докажимо прво да се у почетној латици може доћи од корена стабла u до сваког чвора v алтернативним путем парне дужине. Посматрајмо 2 алтернативна пута од од u до v: при обиласку контуре латице у смеру казаљке на сату, и у супротном смеру. Како контура има непаран број грана, то се у једном од 2 смера обиласка добија алтернативни пут парне дужине.
Доказујемо индукцијом по броју латица. Нека је корен цвета r. Претпоставимо да смо додали нову латицу. Као што смо малопре показали, у новој латици сигурно постоји алтернативни пут парне дужине од корена латице r до сваког чвора v, па ако не користимо ниједну грану из претходног цвета, завршили смо. Ако користимо неку грану која је у претходном цвету била повезана са неким чвором w, по индуктивној претпоставци до чвора w можемо стићи алтернативним путем парне дужине, а од чвора r имамо такође пут парне дужине до v (очигледно их можемо надовезати, јер се пут до w завршава граном из M, а из r излазе само слободне гране), па до сваког чвора постоји алтернативни пут парне дужине. □

Сада можемо доказати тачност APS^+ алгоритма:

Теорема 5.4. Нека је T_k APS стабло графа G_k и нека никоја два спољашња темена нису суседна. Тада су сва спољашња темена T_k повезана само са унутрашњим теменима из T_k. Или другачије речено, цветови стабла T_k су суседни само са унутрашњим чворовима T_k.

Доказ. Ако G_k има увећавајући пут, онда га по услову (2) тврђења 5.3 има и граф G. Дакле, ако G_k нема увећавајући пут, ниједно спољашње теме из T_k не сме бити суседно ни са једним слободним теменом из $G_k - T_k$. Са друге стране, пошто је T_k највеће стабло, ниједно спољашње теме не сме бити суседно ни са једним чвором из $G_k - T_k$ који је покривен спаривањем M. Пошто никоја два спољашња темена нису суседна, добијамо да спољашња темена у T_k могу бити суседна само са унутрашњим теменима из T_k. □

Приметимо сада да APS^+ алгоритмом постижемо да у произвољном графу G добијемо сва темена до којих можемо доћи алтернативним путевима из неког слободног чвора u, јер ако алгоритам врати стабло T_k сваки алтернативни пут из u који се завршава у унутрашњем темену има непарну дужину, тј. завршава се слободном граном (па се може наставити само кроз спољашњи чвор из стабла), а из спољашњих чворова гране иду само ка чворовима из T_k, па се алтернативним путевима може стићи само до чворова из стабла T_k.

5.3.2 Едмондов алгоритам

Идеју о потрази највећег спаривања преко увећавајућих путева и сажимања латица први је дао математичар *Josh Edmond* 1965. године. Он је изложио алгоритам полиномске сложености за проналажење највећег спаривања у произвољном графу G.

У потрази за највећим спаривањем, полазимо од произвољног спаривања графа G и слободног чвора u, и примењујемо APS^+ алгоритам тражећи увећавајући пут. Уколико је такав пут P нађен, алгоритам враћа веће спаривање $M \triangle E(P)$, иначе алгоритам враћа покривено алтернативно стабло T са кореном у u.
Уколико смо добили ново спаривање, поново покрећемо алгоритам, али само у складу са новим спаривањем, док у случају стабла, претражујемо нови граф $G - T$, бележимо највеће спаривање $M(T) = M \cap E(T)$ у стаблу T, заменимо $M \mapsto M \setminus E(T)$, и поново покрећемо алгоритам. Ово понављамо све док не добијемо граф F у коме нема слободних темена, што значи да има савршено спаривање.

Едмондов алгоритам нам враћа исте структуре као и код Мађарског алгоритма за бипартитне графове:

∘ скуп свих покривених алтернативних стабала $\mathcal{T}$,
∘ скупове чворова $S = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} S(T)$, $U = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} U(T)$,
∘ скуп $F = G - (S \cup U)$ и његово спаривање $M(F)$,
∘ највеће спаривање $M_{max} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} M(T) \cup M(F)$, и
∘ скуп слободних чворова у спаривању M_{max} $L = \{u(T) : T \in \mathcal{T}\}$

Због сличног поступка, само нешто сложенијег, доказ да је спаривање M_{max} највеће је веома слично као код Мађарског алгоритма, па га због тога нећемо излагати.
Приметимо само да је Едмондов алгоритам модификација Мађарског алгоритма примењена на произвољан граф. Кључна разлика је што смо увођењем сажимања латица успели да изолујемо све чворове до којих се може стићи алтернативним путевима из неког слободног чвора.

Сада када знамо алгоритам за проналажење највећег спаривања, у програмирању можемо са полиномском сложеношћу решити проблем f-фактора изложеног у делу 4.3 (свођењем на проблем проналажења савршеног спаривања).

6 Теорема о стабилним паровима

За крај ћемо навести још једну лепу теорему из теорије спаривања.

Нека нам је дат скуп од n жена и n мушкараца, и нека свака особа састави листу у којој стриктно рангига све особе супротног пола по томе колико јој се која особа свиђа.

Дефиниција 6.1. За мушкарца m и жену w који су повезани у спаривању M кажемо да су партнери, и обележавамо $p(w) = m$, $p(m) = w$ ($p(w)$ је партнер жене w).

Дефиниција 6.2 За мушкарца m и жену w кажемо да *блокирају* спаривање M ако m и w нису у пару, и ако се мушкарцу m жена w свиђа више од његове партнерке $p(m)$, и ако се жени w мушкарац m свиђа више од њеног партнера $p(w)$.
Тада за пар (m, w) кажемо да је *блокирајући пар* у спаривању M.
За спаривање M кажемо да је *стабилно* ако не постоји пар који га блокира, иначе кажемо да је спаривање M *нестабилно.*

6.1 Gale-Shapley алгоритам

Иако се можда тривијално не види, лако се показује да стабилно спаривање постоји за сваки одабир ранг листа. То су показали и математичари *Gale* и *Shapley* дајући доказ кроз алгоритам спаривања. Увешћемо још неке појмове ради јасноће алгоритма:

У сваком тренутку, свака особа може да буде или *верена* или *слободна.* Мушкарац може да мења свој статус, док жена када једном постане верена, остаје верена до краја, само може да мења вереника, и то на начин да када је запроси неко бољи (који јој се више свиђа од тренутног вереника), раскине веридбу са тренутним вереником, и узме новог. Тада тренутни вереник постаје слободан. Када се један мушкарац вери па постане слободан, сваком новом веридбом добија жену која му се мање свиђа.

Када слободна жена буде запрошена, она мора да прихвати веридбу, али ако наиђе бољи просац, она оставља тренутног вереника. Уколико је нови просац гори од тренутног вереника, она одбија просидбу.

Алгоритам изгледа овако:

Сваки мушарац проси жене по његовој ранг листи, све док не постане верен. Ако веридба буде раскинута (само жена раскида веридбу), он наставља потрагу за женом од следеће на листи. Показаћемо да ће сваки мушкарац наћи жену пре доласка до краја листе, као и да овај алгоритам даје стабилно спаривање.

Алгоритам 6.1.
Корак (1) Постављамо све особе да буду слободне

Корак (2) Петља: Ако постоји мушкарац m који је слободан:
прва жена са ранг листе мушкарца m коју није никада просио $= w$

∘ Ако је w слободна: означавамо да су m и w повезани спаривањем M. Враћамо се на корак (2)

∘ Ако w није слободна:

∘ Ако w више воли m од свог вереника, означавамо да су m и w повезани спаривањем M, и постављамо $p(w)$ као слободног, враћамо се на корак (2)

∘ Иначе, m остаје слободан и враћамо се поново на корак (2)

Ако не постоји слободан мушкарац идемо на корак (3)

Корак (3) Исписујемо стабилно спаривање M

Докажимо да је овако добијено спаривање стварно стабилно:

Теорема 6.1. Свакој инстанци проблема о стабилном спаривању коначном применом $Gale - Shaply$ алгоритма налазимо пара у спаривању M. Овакво спаривање M је заиста стабилно.

Доказ. Докажимо прво да ниједан мушкарац не може да буде одбијен од стране свих жена. Жена може да одбије мушкарца само ако је верена, а ако се једном вери, она никада не постаје више слободна. Претпоставимо да су неког мушкарца одбиле све жене. Дакле све жене су сада верене. Како свака жена може да буде верена са тачно једним мушкарцем, а број мушкараца и жена је једнак, то значи да су и сви мушкарци верени, па имамо контрадикцију.

Такође, имамо да је алгоритам коначан, јер сваки мушкарац проси сваку жену највише једном, што нам даје максимално n^2 итерација.

Сада имамо да након коначног броја итерација добијамо неко спаривање M. Ако мушкарац m више воли жену w од своје веренице $p(m)$, онда он мора бити у неком тренутку одбијен од стране жене w, па следи:

Жена w је у тренутку када ју је m запросио имала бољег вереника.

А како жена сваки пут приликом раскидања веридбе добија све бољег вереника, она не може више волети мушкарца m од $p(w)$. Дакле, ниједан пар (m, w) не може блокирати спаривање M, дакле:

Спаривање M је стабилно.

□

Уколико имамо четири жене, четири мушкарца и ранг листе са слике 8, ако пођемо од мушкараца имамо спаривање:

$$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

Уколико пођемо од жена у алгоритму имамо спаривање:

$$\{(1,4),(2,1),(3,2),(4,3)\}$$

	ранг листе мушкараца
1	2 4 1 3
2	3 1 4 2
3	2 3 1 4
4	4 1 3 2

	ранг листе жена
1	2 1 4 3
2	4 3 1 2
3	1 4 3 2
4	2 1 4 3

слика 8.

6.2 Оптимално спаривање за жене и мушкарце

Иако је спаривање добијено овим алгоритмом стабилно, може се показати, да уколико је оно оптимално за један пол, оно је најгоре за други, тј. ако у скупу свих стабилних спаривања у спаривању M мушкарци имају најбоље могуће жене, онда је такво спаривање најгоре по жене.
Наредне теореме нам дају још јача тврђења:

Теорема 6.2. Сва могућа извршавања *Gale – Shaply* алгоритма (у којима полазимо од скупа мушкараца) нам дају исто спаривање M, и у овом спаривању сваки мушкарац има најбољу могућу партнерку коју може да има у било ком стабилном спаривању.

Доказ. Претпоставимо да нам произвољно извршавање алгоритма даје спаривање M и да постоји неко спаривање M' у коме m више воли $w' = p_{M'}(m)$ него $w = p_M(m)$. Онда је током алгоритма у неком тренутку m морао бити одбијен од стране w'. Претпоставимо да га је w' одбила због мушкарца $m' = p_M(w')$. Тада имамо да w' више воли m' од m, и претпоставимо без умањена општости да је то први пут да је жена одбила мушкарца са којим је упарена у неком стабилном спаривању. Тада мушарац m' ни у једном стабилном спаривању није са неким кога воли више него w' (јер би иначе већ био одбијен од стране неке жене са којом је упарен у неком стабилном спаривању). Дакле, m' у спаривању M' више воли w' од своје партнерке, а w' више воли m' од m, следи:

Пар (m', w') је блокирајући пар у стабилном спаривању M'.

Овим добијамо контрадикцију. □

Овом теоремом ми добијамо да ако сваком мушкарцу придружимо његову најбољу партнерку из било ког стабилног спаривања добијамо стабилно спаривање, иако не постоје очигледни разлози зашто би то уопште било спаривање.

Сада можемо спаривање настало *Gale-Shaply* алгоритмом у коме полазимо од мушкараца назвати *M-оптимално*. На исти овај начин када бисмо пошли у алгоритму од жена, добили бисмо W-*оптимално* спаривање. Сада делује интуитивно да ако је спаривање M најбоље за један пол, онда је најгоре за други. Показује се да то стварно и важи:

Теорема 6.3. У M-оптималном спаривању, свака жена има најгорег могућег партнера од свих стабилних спаривања.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да у неком спаривању M' нека жена w има партнера $p_{M'}(w) = m'$ кога мање воли од $m = p_M(w)$. Али тада пар (m, w) блокира спаривање M' осим ако m воли више $p_{M'}(m)$ од w. Међутим тада у спаривању M' мушкарац m има бољу партнерку него у спаривању M, па добијамо контрадикцију. □

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. BONDY, U. S. R. MURTY, *Graph Theory*, Springer, 2008.

[2] R. DIESTEL, *Graph Theory*, Math. Helv. Springer, 2000.

[3] M. BONA, *A Walk Through Combinatorics*, World Scientific Publishing Company, 2006.

[4] D. GUSFIELD, R. W. IRVING, *The Stable Marriage Problem*, The MIT Press,1989.

[5] M. GOEMANS, *Combinatorial Optimisation*, Lecture notes MIT, 2009.

[6] D. WEST, *Introduction to Graph Theory*, Hardcover, 2000.