МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА
У БЕОГРАДУ

МАТУРСКИ РАД
из математике
РЕАЛНО-ВРЕДНОСНО МЕРЉИВИ КАРДИНАЛИ

ментор:
Александар Перовић

ученик:
Обрад Касум

Београд, 2015.

Садржај

1 Увод

Лебег је почетком XX века развио теорију интеграције базирану на појму мере. У случају реалних функција требало би да та мера представља природно уопштење појма дужине дужи. Идеално за ову теорију би било када би постојало пресликавање $\mu : P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ са следећим својствима:

1. $\mu(0) = 0$;
2. (σ-адитивност)
$$\mu(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n),$$
за фамилију $\langle A_n \mid n \in \omega\rangle$ дисјунктних подскупа скупа $\mathbb{R}$;
3. $\mu([a, b]) = b - a$, за реалне $a < b$;
4. (транслаторна инваријантност) $\mu(A + x) = \mu(A)$, за свако $x \in \mathbb{R}$ и $A \subseteq \mathbb{R}$.

Тада би ово пресликавање било одговарајућа мера. Међутим, Витали је 1905. године показао да у ZFC овакво прсликавање не постоји. Наведимо његов доказ.

Претпоставимо супротно. Дефинишимо релацију еквиваленције $\sim$ над $\mathbb{R}$ на следећи начин:
$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$
Ако са C_x означимо класу реалног броја x у релацији $\sim$, онда, на основу AC, постоји $S \subseteq \mathbb{R}$ такав да
$$(\forall x \in \mathbb{R})(|S \cap (C_x \cap [0, 1])| = 1).$$
Нека је $\alpha = \mu(S)$ (егзистенција таквог реалног броја је последица тоталности мере μ, тј. њене дефинисаности на целом $P(\mathbb{R})$). Скупови $S + q$ за $q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ су међусобно дисјунктни и сви су мере α (на основу транслаторне инваријантности мере μ). На основу овога и σ-адитивности посматране мере је
$$\mu(\bigcup_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} (S + q)) = \sum_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \mu(S + q) = \sum_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \alpha.$$
Важи
$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (S + q) \subseteq [-1, 2],$$
па је, на основу предходног,
$$1 \leqslant \sum_{q\in[0,1]\cup\mathbb{Q}} \alpha \leqslant 3,$$
што је контрадикција. Овим је доказан Виталијев резултат.

Из предходног видимо да постоји колизија између следећа четири својства: AC с једне и тоталности, σ-адитивности и транслаторне инваријантности мере с друге стране. Међутим, испоставља се да се слабљењем једног од ових својстава може отклонити контрадикција. Ово је садржано у следећа четири резултата.

1. Стандардна Лебегова мера m над $\mathbb{R}$ је један могући компромис. Тоталност је својство које је овде ослабљено. Ова мера је дефинисана у ZF + DC, што је битно за смисленост трећег од ових резултата.

2. Други компромис се добија слабљењем σ-адитивности на коначну адитивност. Ово је резултат Банаха и он датира из двадесетих година прошлог века. Банах је доказао, у ZFC, да постоји коначно адитивна транслаторно инваријантна мера која шири Лебегову меру.

3. Соловеј је слабљем акиоме избора дошао до следећег резултата. Он је доказао у [5] да консистентност теорије

   $$\mathrm{ZF} + \text{„постоји јако недостижив кардинал”}$$

   повлачи консистентност теорије

   $$\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \text{„сваки подскуп скупа реалних бројева је Лебег мерљив”}.$$

4. Соловеј је 1996, слабљењем транслаторне инваријантности, дао још једну могућност решења поменуте колизије. Он је у [6] доказао еквиконсистентност следећих теорија.

   а) ZFC + „постоји тотална σ-адитивна екстензија Лебегове мере”

   б) ZFC + „постоји мерљив кардинал”

Имајући у виду величину мерљивих кардинала, видимо да је резултат 4 од посебног значаја за ову тему. Он ће бити размотрен у овом раду.

2 Уламова дихотомија

У овом одељку од интереса су тоталне нетривијалне σ-адитивне вероватносне мере, које ћемо овде звати само *мере*.

***Дефиниција* 2.1.** *Мера на скупу S је пресликавање $\mu : P(S) \to [0,1]$ са следећим својствима:*

1. $\mu(0) = 0$, $\mu(S) = 1$;
2. *(нетривијалност)* $(\forall a \in S)\mu(\{a\}) = 0$;
3. *(σ-адитивност)* $\mu(\bigsqcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n)$.

Улога својства 2 је да искључи могућност да мера буде главни ултрафилтер, која је тривијална и није од интереса. Скуп који има меру мора бити непребројив, што следи из леме 2.1.2. Како горња дефиниција не подразумева никакву структуру над S, довољно је посматрати мере над кардиналима, и то непребројив (на основу предходног). Следећи појмови су од значаја при изучавању мера.

***Дефиниција* 2.2.** *Мера μ је κ-адитивна ако за свако $\lambda < \kappa$ важи*

$$\mu(\bigsqcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(A_\alpha).$$

Норма *и* адитивност *мере су дефинисани редом са*

$$\|\mu\| = \min\{\kappa \mid (\exists A \subseteq S)(|A| = \kappa \wedge \mu(A) > 0)\},$$

$$\mathrm{add}(\mu) = \bigcup\{\kappa \mid \mu \text{ је } \kappa\text{-адитивна}\}.$$

Како је $\mu(S) = 1$, то је дефиниција норме мере коректна. Дефиниција адитивности мере је коректна на основу ставке 1 следеће леме, која даје нека основна својства уведених појмова.

***Лема* 2.1.**

1. *Ако је мера κ-адитивна, онда је $\kappa \leqslant \|\mu\|$.*
2. $\omega_1 \leqslant \mathrm{add}(\mu) \leqslant \|\mu\| \leqslant |S|$.
3. *Мера μ је κ-адитивна акко $\kappa \leqslant \mathrm{add}(\mu)$.*

Доказ.

1. Претпоставимо супротно. Нека је $A \subseteq S$ такав да је $|A| = \|\mu\|$ и $\mu(A) > 0$. Тада би било
$$0 < \mu(A) = \mu(\bigcup_{a\in A}\{a\}) = \sum_{a\in A} \mu(\{a\}) = 0.$$
Контрадикција.
2. Прва неједнакост следи из дефиниције мере, друга следи из 1, а трећа је очигледна.

3. Директно из дефиниције.

$\square$

Ставка два ове леме оправдава следећу дефиницију.

***Дефиниција* 2.3.** *Кардинал κ је реално-вредносно мерљив (у даљем РВМ) ако над њиме постоји κ-адитивна мера.*

Дакле, за РВМ κ важи $\kappa = \|\mu\| = \mathrm{add}(\mu) \geqslant \omega_1$, где је μ одговарајућа мера. Показаћемо да РВМ мора бити слабо недостижив. Пре тога, уводимо један помоћни појам и указујемо на његов значај.

***Дефиниција* 2.4.** *Идеал скупова мере 0 је скуп $I_\mu = \{A \subseteq S \mid \mu(A) = 0\}$.*

Лако се проверава да је ово заиста идеал (над S).

***Лема* 2.2.** *Не постоји непребројиво много скупова ван I_μ таквих да је пресек свака два различита у I_μ.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да постоји фамилија $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ таква да важи:

1. $A_\alpha \notin I_\mu$;
2. $A_\alpha \cap A_\beta \in I_\mu$, за $\alpha \neq \beta$.

Нека је $B_\alpha = A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$. Ови скуови су дисјунктни и позитивне мере, одакле следи да постоји коначно много њих чије су мере у збиру > 1. Међутим, тада је мера уније тих скупова > 1 - контрадикција.

$\square$

Ова лема заправо говори да је I_μ *σ-засићен* (видети дефиницију 4.1 и лему 4.1).

***Лема* 2.3.** $\mathrm{add}(\mu) = \mathrm{add}(I_\mu)$.

Доказ. Непосредно се проверава да је мера μ κ-адитивна само ако је I_μ κ-комплетан. Претпоставимо да је I_μ κ-комплетан. Нека је $\lambda < \kappa$ и нека су A_α ($\alpha < \lambda$) дисјунктни. Највише пребројиво много ових скупова је позитивне мере (на основу предходне леме). Дакле, постоји $W \subseteq \lambda$, $|W| \leqslant \omega$, такво да је $\mu(A_\alpha) > 0$ акко $\alpha \in W$. Даље,

$$\mu(\bigcup_{\alpha\in W} A_\alpha) = \sum_{\alpha\in W} \mu(A_\alpha),$$

због σ-адитивности мере μ, и

$$\mu(\bigcup_{\alpha\in\lambda\setminus W} A_\alpha) = 0,$$

због κ-комплетности идеала I_μ, па је

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha) = \mu(\bigcup_{\alpha\in W} A_\alpha \cup \bigcup_{\alpha\in\lambda\setminus W} A_\alpha) = \mu(\bigcup_{\alpha\in W} A_\alpha) + \mu(\bigcup_{\alpha\in\lambda\setminus W} A_\alpha) = \sum_{\alpha\in W} \mu(A_\alpha) = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(A_\alpha).$$

Дакле, μ је κ-адитивна. Овиме је доказ леме завршен. $\square$

***Лема* 2.4.** *РВМ кардинал је регуларан.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да постоји сингуларан РВМ κ. Тада постоји $\theta < \kappa$ и кофиналан у κ низ $\langle \alpha_\beta \mid \beta < \theta \rangle$. Онда важи

$$1 = \mu(\kappa) = \mu(\bigcup_{\beta<\theta} \alpha_\beta) \leqslant \sum_{\beta<\theta} \mu(\alpha_\beta) = 0.$$

Контрадикција. $\square$

Да бисмо показали да РВМ мора бити граничан, уводимо следећи помоћни појам.

***Дефиниција* 2.5.** *Уламова (λ^+, λ)-матрица је фамилија $\langle A_{\alpha,\beta} \mid \alpha < \lambda^+, \beta < \lambda \rangle$ подскупова λ^+ са следећим својствима:*

1. $A_{\alpha_1,\beta} \cap A_{\alpha_2,\beta} = 0$*, за све* $\alpha_1, \alpha_2 < \lambda^+$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, *и* $\beta < \lambda$*;*
2. $|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\beta<\lambda} A_{\alpha,\beta}| \leqslant \lambda$*, за све* $\alpha < \lambda^+$.

***Лема* 2.5.** *Постоји Уламова (λ^+, λ)-матрица.*

Доказ. За $\xi < \lambda^+$, нека је $f_\xi : \lambda \to \lambda^+$ функција која задовољава $\xi \subseteq \operatorname{ran}(f_\xi)$. Тада, нека је $A_{\alpha,\beta} = \{\xi < \lambda^+ \mid f_\xi(\beta) = \alpha\}$. $\langle A_{\alpha,\beta} \mid \alpha < \lambda^+, \beta < \lambda \rangle$ је Уламова (λ^+, λ)-матрица. Проверимо да важи 2 предходне дефиниције (јасно је да 1 важи). Наиме, за произвољно $\alpha < \lambda^+$, ако $\xi \in \lambda^+ \setminus \bigcup_{\beta<\lambda} A_{\alpha,\beta}$, онда је $(\forall \beta < \lambda) f_\xi(\beta) \neq \alpha$, па $\alpha \notin \operatorname{ran}(f_\xi)$, што је могуће само ако је $\xi \leqslant \alpha$, одакле следи $|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\beta<\lambda} A_{\alpha,\beta}| \leqslant |\alpha + 1| < \lambda^+$. $\square$

***Лема* 2.6.** *Сваки РВМ је граничан.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да постоји λ^+ који је РВМ. Тада постоји Уламова (λ^+, λ)-матрица $\langle A_{\alpha,\beta} \mid \alpha < \lambda^+, \beta < \lambda \rangle$. Сваки од скупова $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\beta<\lambda} A_{\alpha,\beta}$ је мере 0, па за свако $\alpha < \lambda^+$, постоји $\beta_\alpha < \lambda$ такво да је A_{α,β_α} позитивне мере. Одавде следи да постоји $W \subseteq \lambda^+$ кардиналности λ^+ такав да су сви β_α једнаки за $\alpha \in W$. Будући да су скупови A_{α,β_α} $(\alpha \in W)$ дисјунктни (јер су у истој колони) и позитивне мере, то мора бити $|W| < \omega_1$ (на основу леме 2.2). Контрадикција. $\square$

***Теорема* 2.1.** *РВМ је слабо недостижив.*

Доказ. Директно из лема 2.4 и 2.6. $\square$

Следећа теорема показује да нам се у изучавању мера неизбежно намећу РВМ кардинали.

***Теорема* 2.2.** *Адитивност мере је РВМ кардинал.*

Доказ. Нека је $\kappa = \operatorname{add}(\mu)$. На основу леме 2.3, постоје различити $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ мере нула, чија је унија мере $m > 0$. Тада је над скупом $S_1 = \{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ кардиналности κ са $\mu_1(X) = \frac{1}{m}\mu(\bigcup_{A\in X} A)$ коректно дефинисана κ-адитивна мера μ_1. Дакле, κ је РВМ. $\square$

Пре него што укажемо на значај РВМ кардинала у решавању проблема мере, доказаћемо Уламову дихотомију. Најпре дефинишемо две врсте мера, које представљају њен основ.

***Дефиниција* 2.6.** *Нека је μ мера на скупу S. $A \subseteq S$ је атом ако је позитивне мере и ако не постоји $B \subseteq A$ такав да је $0 < \mu(B) < \mu(A)$. μ је:*

1. безатомична *ако нема атома;*

2. бинарна *ако је* $\mathrm{rng}(\mu) = 2$.

***Теорема* 2.3.** *Ако на кардиналу κ постоји безатомична κ-адитивна мера, онда је он $\leqslant 2^{\aleph_0}$.*

Доказ. Рекурзијом до ω_1 по нивоима конструишемо дрво $\langle T, \supseteq\rangle$ подскупова кардинала κ на следећи начин:

1. Нулти ниво је једнак $\{\kappa\}$.

2. Следбеник ниво правимо тако што сваки скуп са предходног нивоа разбијамо на два позитивне мере. Ово нам омогућује безатомичност, под условом да су сви скупови са предходног нивоа позитивне мере.

3. Ако је α граничан, онда за $\supseteq$-растући низ $\langle X_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$, чији β-ти елемент припада β-том нивоу, скуп $\bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta$ узимамо на α-том нивоу ако је позитивне мере.

Сваки ниво овог дрвета чине дисјунктни скупови позитивне мере, па нивои морају бити највише пребројиви. Ако би постојала грана дужине ω_1, онда бисмо, узимајући за сваки елемент те гране његовог следбеника који није у посматраној грани, формирали непребројив скуп дисјунктних подскупова скупа κ, који су сви позитивне мере, што је немогуће. Дакле, све гране овог дрвета су пребројиве, па их има $\leqslant 2^{\aleph_0}$.

Нека је $\langle b_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle$, $\lambda \leqslant 2^{\aleph_0}$, нумерација свих грана дрвета које имају непразан пресек. Скупови $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$ су мере 0 и чине партицију скупа κ, па адитивност посматране мере мора бити $\leqslant \lambda$. Одавде следи да је $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$. ☐

***Дефиниција* 2.7.** *Кардинал κ је мерљив ако на њему постоји бинарна κ-адитивна мера.*

***Лема* 2.7.** *Ако на κ постоји κ-адитивна мера са атомом, он је мерљив.*

Доказ. Нека је μ одговарајућа мера. Ако је A атом, онда је са $\mu_1(X) = \frac{1}{\mu(A)}\mu(A \cap X)$ коректно дефинисана бинарна κ-адитивна мера μ_1 на κ, па је κ мерљив.

☐

***Теорема* 2.4.** *Мерљив кардинал је јако недостижив.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Тада постоји мерљив κ и $\lambda < \kappa$ такав да је $2^\lambda \geqslant \kappa$. Нека је $S \subseteq {}^{\lambda}2$ кардиналности κ и нека је μ κ-адитивна бинарна мера на S. За $\alpha < \lambda$ нека је X_α онај од скупова $\{f \in S \mid f(\alpha) = 0\}$, $\{f \in S \mid f(\alpha) = 1\}$ који је мере 1. Тада је $\mu(\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha) = 1$, а важи $|\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha| = 1$. Контрадикција. ☐

***Теорема* 2.5. [Уламова дихотомија]** *Нека је κ РВМ. Тада наступа тачно једна од следеће две могућности.*

1. $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$*, постоји безатомична κ-адитивна мера на κ и κ је слабо недостижив.*

2. $\kappa > 2^{\aleph_0}$*, постоји бинарна κ-адитивна мера на κ и κ је јако недостижив.*

Доказ. Директно из теорема 2.3, 2.1 и 2.4 и леме 2.7. ☐

Последица ове теореме је то да у интервалу ($2^{\aleph_0}$, први мерљиви кардинал) не постоје РВМ кардинали. Ако имамо у виду и величину мерљивог кардинала у односу на $2^{\aleph_0}$, онда је јасно зашто се овај интервал понекад назива *Уламов понор*.

Соловеј је доказао да су гране Уламове дихотомије еквиконсистентне. То исказујемо следећом теоремом.

***Теорема* 2.6.** *Следеће теорије су еквиконсистентне.*

1. ZFC + „$2^{\aleph_0}$ *је РВМ*"

2. ZFC + „*постоји мерљив кардинал*"

Доказ. Ово тврђење је последица конструкције спроведене у наредном одељку и теореме 4.5. □

Сада доказујемо резултат 4 из увода.

***Лема* 2.8.** *За безатомичну меру μ важи:*

1. *ако је $\mu(A) > \frac{1}{2}$, онда постоји $B \subseteq A$ такав да важи $\frac{1}{2} < \mu(B) < \mu(A)$;*

2. *постоји скуп мере $\frac{1}{2}$;*

3. *за свако Z постоји $Z_0 \subseteq Z$ такво да је $\mu(Z_0) = \frac{1}{2}\mu(Z)$.*

Доказ.

1. Рекурзијом до ω по нивоима конструишемо дрво чији је нулти ниво једнак $\{A\}$ и чији сваки елемент има два следбеника, који чине партицију њега и позитивне су мере. То дрво има $2^{\aleph_0}$ грана. Нека је $\langle b_\alpha \,|\, \alpha < 2^{\aleph_0}\rangle$ нумерација њих. Ако би сви скупови $\bigcap b_\alpha$ били позитивне мере, они би чинили партицију скупа носача на $2^{\aleph_0}$ делова позитивне мере, што није могуће. Дакле, неки $\bigcap b_\alpha$ је мере нула. Нека је он једнак $\{X_n \,|\, n < \omega\}$, при чему је X_n n-ти елемент те гране. Тада је
$$0 = \mu(\bigcap_{n<\omega} X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(X_n),$$
па за неки X_n важи $\mu(X_n) < \mu(A) - \frac{1}{2}$. Тада је $B = A \setminus X_n$ одговарајући.

2. Претпоставимо супротно. Тада рекурзијом до ω_1 конструишемо низ $\langle A_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\rangle$ на следећи начин.
   (i) A_0 је скуп носач мере.
   (ii) Ако је $\mu(A_\alpha) > \frac{1}{2}$, онда је $A_{\alpha+1} \subseteq A_\alpha$ такав да је $\frac{1}{2} < \mu(A_{\alpha+1}) < \mu(A_\alpha)$;
   (iii) Ако је α граничан и $\langle A_\beta \,|\, \beta < \alpha\rangle$ опадајући низ скупова мере $> \frac{1}{2}$, онда је $A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta$ подскуп тих скупова мере $> \frac{1}{2}$. Да би смо ово последње доказали, означимо са $\langle \beta_n \,|\, n < \omega\rangle$ строго растући низ чији је лимес α. Тада је
   $$\mu(A_\alpha) = \mu(\bigcap_{n<\omega} A_{\beta_n}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{\beta_n}) \geqslant \frac{1}{2},$$
   па, будући да по претпоставци једнакост не може важити, следи тврдња.

Конструисани низ је опадајући низ скупова чија мера строго опада, па су скупови $A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ $(\alpha < \omega_1)$ дисјунктни позитивне мере. Контрадикција.

3. Ово тврђење је очигледно када је $\mu(Z) = 0$, а иначе следи применом 2 на меру $\frac{1}{\mu(Z)}(\mu \restriction Z)$.

$\square$

Под *Лебеговом мером* у овом одељку подразумевамо Лебегову меру на $[0,1]$. Она није мера у складу са дефиницијом 2.1, али ако имамо у виду напомену пре те дефиниције, онда би она била *нетривијална σ-адитивна вероватносна мера*, а следећим двема теоремама говоримо о могућности њеног продужења до *тоталне* нетривијалне σ-адитивне вероватносне мере.

***Теорема* 2.7.** *Лебегова мера се може продужити до тоталне σ-адитивне мере акко постоји PBM $\leqslant 2^{\aleph_0}$.*

Доказ. Смер $(\Rightarrow)$ је директна последица теореме 2.2 и леме 2.1.2. Докажимо други смер. Нека је $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$ PBM. Рекурзијом по дужини коначног низа s нула и јединица дефинишемо $X_s \subseteq \kappa$ на следећи начин:

1. $X_0 = \kappa$;

2. ако је X_s дефинисан, онда су $X_{s^\frown 0}$ и $X_{s^\frown 1}$ такви да је $X_s = X_{s^\frown 0} \sqcup X_{s^\frown 1}$ и да важи $\mu(X_{s^\frown 0}) = \mu(X_{s^\frown 1}) = \frac{1}{2}\mu(X_s)$ (што је могуће на основу предходне леме).

Нека је $X_f = \bigcap_{n<\omega} X_{f\restriction n}$ за $f : \omega \to 2$. Тада са $\nu_1(Z) = \mu(\bigcup_{f\in Z} X_f)$ коректно дефинишемо меру на ${}^\omega 2$. Нека је $F : {}^\omega 2 \to [0,1]$ дефинисана са $F(f) = \sum_{n<\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}}$. Тада је са $\nu(S) = \nu_1(F^{-1}[S])$ коректно дефинисана мера на $[0,1]$. Непосредно се проверава да се ова мера поклапа са Лебеговом на $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ $(0 \leqslant k < 2^n)$, а последица овога је да се ове мере поклапају на отвореним скуповима, будући да су они уније највише пребројиво много поменутих сегмената са дисјунктним унутрашњостима. Даље следи да се ове мере морају поклапати и на σ-алгебри генерисаној отвореним скуповима, тј. на Бореловој σ-алгебри. Сваки скуп Лебегове мере 0 је садржан у Борелов скупу Лебегове мере 0, па му је и ν-мера 0. На крају, како је сваки Лебег мерљив скуп дисјунктна унија Бореловог скупа и скупа Лебегове мере 0, то његова Лебегова мера мора бити једнака његовој ν-мери. Дакле, ν је одговарајућа екстензија Лебегове мере. $\square$

***Теорема* 2.8.** *Следеће теорије су еквиконсистентне.*

1. ZFC + *„постоји тотална σ-адитивна екстензија Лебегове мере”*

2. ZFC + *„постоји мерљив кардинал”*

Доказ. Директно из предходне теореме и теореме 2.6. $\square$

3 Прављење РВМ $\leqslant 2^{\aleph_0}$

Нека је M пребројив транзитиван модел за ZFC + „постоји мерљив кардинал”. Подразумева се да у даљем радимо у M, осим ако се друкчије не нагласи.

За κ мерљив и $\lambda \geqslant \kappa$ такав да је $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$, конструисаћемо комплетну Булову алгебру $\mathcal{B}$ која даје генеричка проширења у којима је κ РВМ и $2^{\aleph_0} = \lambda$. Будући да је

$$\kappa^{\aleph_0} = |{}^{\omega}\kappa| = |\bigcup_{\omega\leqslant\alpha<\kappa} {}^{\omega}\alpha| \leqslant \sum_{\omega\leqslant\alpha<\kappa} |\alpha|^{\aleph_0} \leqslant \sum_{\omega\leqslant\alpha<\kappa} 2^{|\alpha|} \leqslant \kappa\cdot\kappa = \kappa,$$

то је $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, па је могуће узети $\lambda = \kappa$. У овом случају је у генеричким проширењима $2^{\aleph_0}$ РВМ.

Нека је $I = \lambda \times \omega$ и

$$\langle S, \mathcal{F}, \nu' \rangle = \prod_{i\in I} \langle 2, P(2), \nu'' \rangle,$$

при чему је ν'' мера на 2 дефинисана са $\nu''(X) = \frac{1}{2}|X|$. Нека је $\mathcal{B} = \mathcal{F}/I_{\nu'}$. Тада је са $\nu([X]) = \nu'(X)$ коректно дефинисана коначно адитивна мера на $\mathcal{B}$. Непосредно се утврђује да је $|\mathcal{B}| = \lambda$ и да је

$$\bigvee_{n<\omega}[A_n] = [\bigcup_{n<\omega} A_n],$$

одакле следи σ-комплетност алгебре $\mathcal{B}$ и σ-адитивност мере ν. $\mathcal{B}$ задовољава *c.c.c.* (што следи из леме 2.2). За сваки скуп $X \subseteq \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$, ако је $\overline{X} = \{y \,|\, (\exists x \in X) y \leqslant x\}$ и ако је $A \neq \{\mathbf{0}\}$ максимални антиланац у $\overline{X}$, онда је он највише преројив, па је

$$\bigvee X = \bigvee \overline{X} = \bigvee A \in \mathcal{B},$$

што значи да је $\mathcal{B}$ комплетна. Дакле, да сублимирамо: $\mathcal{B}$ је комплетна кардиналности λ која задовољава *c.c.c.* и ν је σ-адитивна мера над њом.

Нека је G произвољни $\mathcal{B}$-генерички над M. Очигледно важи $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \leqslant (|\mathcal{B}|^{\aleph_0})^M = \lambda$. С друге стране, за $U_{\alpha,n} = \{t \in {}^{I}2 \,|\, t(\alpha, n) = 1\}$ и $u_{\alpha,n} = [U_{\alpha,n}]$ ($\langle\alpha, n\rangle \in I$) и $\tau_\alpha = \{\langle \check{n}, u_{\alpha,n}\rangle \,|\, n < \omega\}$ ($\alpha < \lambda$) важи $\tau_{\alpha G} \neq \tau_{\beta G}$ за $\alpha \neq \beta$, па $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geqslant \lambda$. Дакле, $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \lambda$, односно $\mathbf{1} \Vdash 2^{\aleph_0} = \check{\lambda}$.

Докажимо да важи $\mathbf{1} \Vdash$ „$\check{\kappa}$ је РВМ”. Нека је μ бинарна мера на κ.

За $a \in \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{A} \in M^{\mathcal{B}}$ дефинишемо пресликавање $f_{a,\mathbf{A}} : \kappa \to [0, 1]$ са

$$f_{a,\mathbf{A}}(\alpha) = \frac{\nu(a \wedge \|\check{\alpha} \in \mathbf{A}\|)}{\nu(a)}.$$

Постоји јединствено $r \in [0, 1]$ такво да је $f_{a,\mathbf{A}}(\alpha) = r$ скоро свуда модуло μ. Нека је $\mu_a(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} r$.

Важи следеће.

1. Ако $a \Vdash \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1$, онда $\mu_a(\mathbf{A}_0) = \mu_a(\mathbf{A}_1)$.

2. Ако $a \Vdash \mathbf{A}_0 \subseteq \mathbf{A}_1$, онда $\mu_a(\mathbf{A}_0) \leqslant \mu_a(\mathbf{A}_1)$.

3. За $X \subseteq \kappa$ је $\mu_a(\check{X}) = \mu(X)$.

4. Нека је $\gamma < \kappa$ и нека су $\mathbf{A}_\xi$ ($\xi < \gamma$) $\mathcal{B}$-имена. Ако важи $a \Vdash \mathbf{A}_\xi \subseteq \check{\kappa}$ и $a \Vdash \mathbf{A}_\xi \cap \mathbf{A}_\eta = 0$ (за $\xi \neq \eta$) и ако је $\mathbf{A}$ $\mathcal{B}$-име такво да важи $a \Vdash \mathbf{A} = \bigcup_{\xi<\gamma} \mathbf{A}_\xi$, онда је

$$\mu_a(\mathbf{A}) = \sum_{\xi<\gamma} \mu_a(\mathbf{A}_\xi).$$

За $a > \mathbf{0}$, нека је

$$\mu_a^*(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{0}<b\leqslant a} \mu_b(\mathbf{A}).$$

μ_a^* задовољава горе поменута својства 1-3, а уместо 4, за њу, под условима ове ставке, важи

$$\mu_a^*(\mathbf{A}) \geqslant \sum_{\xi<\gamma} \mu_a^*(\mathbf{A}_\xi).$$

Такође важи и $\mu_{a_0}^*(\mathbf{A}) \geqslant \mu_{a_1}^*(\mathbf{A})$, за $a_0 \leqslant a_1$.

Нека је **G** канонско име за генерички филтер. Постоји име **m** такво да

$$\mathbf{1} \Vdash \mathbf{m} : P(\check{\kappa}) \to [0,1]$$

и да за име $\mathbf{A}$ за које је $\mathbf{1} \Vdash \mathbf{A} \subseteq \check{\kappa}$ важи

$$\mathbf{1} \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}) = \sup_{a\in\mathbf{G}} \mu_a^*(\mathbf{A}).$$

За генерички филтер G у $M[G]$ важи

$$\mathbf{m}_G(A) = \sup_{a\in G} \mu_a^*(\mathbf{A})$$

за произвољно име $\mathbf{A}$ скупа $A \subseteq \kappa$ и $\mathbf{m}_G$ је растућа екстензија мере μ са $P^M(\kappa)$ на $P^{M[G]}(\kappa)$. Показаћемо да је $\mathbf{m}_G$ κ-адитивна, одакле следи $M[G] \models$ „κ је RVM”, чиме ће бити доказано $\mathbf{1} \Vdash$ „$\check{\kappa}$ је RVM”.

Важи следеће помоћно тврђење, као и њему аналогна тврђења када се $<$ замени са $\leqslant$, $>$ и $\geqslant$.

За све $a \in \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $r \in [0,1]$ и $\mathbf{A} \in M^{\mathcal{B}}$ такве да за свако $b \in (\mathbf{0}, a]$ постоји $c \in (\mathbf{0}, b]$ такво да је $\mu_c(\mathbf{A}) < r$ важи $\mu_a(\mathbf{A}) < r$.

Да бисмо ово доказали, рекурзивно конструишемо низ елемената мањих од a такав да је сваки члан овог низа дисјунктан са унијом предходних, да је μ индексирано тим елементом у $\mathbf{A} < r$ и да је унија свих чланова тог низа a. Ако са P означимо скуп чланова тог низа, онда P представља партицију елемента a, која је највише пребројива, јер $\mathcal{B}$ задовољава *c.c.c.* За све $p \in P$ и за скоро све α је $\nu(p \wedge \|\check{\alpha} \in \mathbf{A}\|) < r\nu(p)$, одакле следи да за скоро све α важи

$$\nu(a \wedge \|\check{\alpha} \in \mathbf{A}\|) = \sum_{p\in P} \nu(p \wedge \|\check{\alpha} \in \mathbf{A}\|) < \sum_{p\in P} r\nu(p) = r\nu(a),$$

тј. важи $\mu_a(\mathbf{A}) < r$.

У следећа два пасуса су представљена још два помоћна тврђења.

$$\mu_a^*(\mathbf{A}) \geqslant r \text{ акко } a \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}) \geqslant \check{r}.$$

Смер ($\Rightarrow$) је очигледан, стога докажимо само други. За свако $b \in (\mathbf{0}, a]$ важи $b \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}) \geqslant \check{r}$, одакле следи

$$b \Vdash (\forall q < \check{r})(\exists d \in \mathbf{G})\mu^*_d(\mathbf{A}) > q,$$

па за свако $q < r$ и свако $c \in (\mathbf{0}, b]$ постоје $d \in (\mathbf{0}, c]$ и име σ такви да

$$d \Vdash \sigma \in \mathbf{G} \wedge \mu^*_\sigma(\mathbf{A}) > \check{q}.$$

Сада је јасно да постоји $e \in \mathcal{B}$ такво да

$$d \Vdash \check{e} \in \mathbf{G} \wedge \mu^*_e(\mathbf{A}) > \check{q}.$$

Из $d \Vdash \check{e} \in \mathbf{G}$ следи $d \leqslant e$, одакле следи $\mu^*_d(\mathbf{A}) \geqslant \mu^*_e(\mathbf{A})$. $d \Vdash \mu^*_e(\mathbf{A}) > \check{q}$ повлачи $\mu^*_e(\mathbf{A}) > q$, па је $\mu^*_d(\mathbf{A}) > q$ и, последично, $\mu_d(\mathbf{A}) > q$. Дакле,

$$(\forall q < r)(\forall c \in (\mathbf{0}, b])(\exists d \in (\mathbf{0}, c])\mu_d(\mathbf{A}) > q,$$

одакле, на основу предходног тврђења, следи $(\forall q < r)\mu_b(\mathbf{A}) > q$, тј. $\mu_b(\mathbf{A}) \geqslant r$. Како ово важи за све $b \in (\mathbf{0}, a]$, то је $\mu^*_a(\mathbf{A}) \geqslant r$.

Друго поменуто помоћно тврђење је следеће.

$$a \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}) < \check{r} \text{ повлачи } \mu_a(\mathbf{A}) < r.$$

Из $a \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}) < \check{r}$ следи $a \Vdash \neg(\mathbf{m}(\mathbf{A}) \geqslant \check{r})$, па

$$(\forall b \in (\mathbf{0}, a])b \nVdash \mathbf{m}(\mathbf{A}) \geqslant \check{r},$$

одакле, на основу предходног тврђења, следи $(\forall b \in (\mathbf{0}, a])\mu^*_b(\mathbf{A}) < r$. Одавде добијамо

$$(\forall b \in (\mathbf{0}, a])(\exists c \in (\mathbf{0}, b])\mu_c(\mathbf{A}) < r,$$

што даје $\mu_a(\mathbf{A}) < r$.

Нека је G произвољан генерички филтер. Покажимо да је у $M[G]$ пресликавање $\mathbf{m}_G$ коначно адитивно. Нека су A, A_0 и A_1 подскупови скупа κ такви да је A дисјунктна унија скупова A_0 и A_1 и нека су $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_1$, редом, имена за њих. Нека је $a_0 \in G$ такав да

$$a_0 \Vdash \mathbf{A}_0 \subseteq \check{\kappa} \wedge \mathbf{A}_1 \subseteq \check{\kappa} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sqcup \mathbf{A}_1.$$

Нека су $r_0, r_1 \in \mathbb{R}^M$ такви да важи $\mathbf{m}_G(A_0) \geqslant r_0$ и $\mathbf{m}_G(A_1) \geqslant r_1$. Тада постоје $a_i \in G$ такви да је $\mu^*_{a_i}(\mathbf{A}_i) \geqslant r_i$. Нека је $a = a_0 \wedge a_1 \wedge a_2 \in G$. Важи

$$r_0 + r_1 \leqslant \mu^*_{a_0}(\mathbf{A}_0) + \mu^*_{a_1}(\mathbf{A}_1) \leqslant \mu^*_a(\mathbf{A}_0) + \mu^*_a(\mathbf{A}_1) \leqslant \mu^*_a(\mathbf{A}) \leqslant \mathbf{m}_G(A).$$

Сада следи да је $\mathbf{m}_G(A_0) + \mathbf{m}_G(A_1) \leqslant \mathbf{m}_G(A)$. Претпоставимо да је $\mathbf{m}_G(A_0) + \mathbf{m}_G(A_1) < \mathbf{m}_G(A)$. Тада постоје $q_i \in \mathbb{R}^M$ такви да је $\mathbf{m}_G(A_i) < q_i$ и $\mathbf{m}_G(A) > q_0 + q_1$. Постоји $b_0 \in G$ такво да важи $b_0 \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}_i) < \check{q}_i$ и $b_0 \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}) > \check{q}_0 + \check{q}_1$. Ако је $b = a \wedge b_0 \in G$, онда је, на основу последње од предходних релација, $\mu^*_b(\mathbf{A}) \geqslant q_0 + q_1$, а на осонову прве две је $\mu_b(\mathbf{A}_i) < q_i$, па је

$$\mu^*_b(\mathbf{A}) \leqslant \mu_b(\mathbf{A}) = \mu_b(\mathbf{A}_0) + \mu_b(\mathbf{A}_1) < q_0 + q_1,$$

што је контрадикција. Дакле, $\mathbf{m}_G(A_0) + \mathbf{m}_G(A_1) = \mathbf{m}_G(A)$.

Коначно, докажимо да је $\mathbf{m}_G$ κ-адитивна. За ово је, због предходног, довољно доказати да је

$$\mathbf{m}_G(\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi) \leqslant \sum_{\xi<\gamma} \mathbf{m}_G(A_\xi)$$

за произвољни $\gamma < \kappa$ и произвољне дисјунктне $A_\xi \subseteq \kappa$ $(\xi < \gamma)$. Претпоставимо супротно. Тада постоје $q, r \in \mathbb{R}^M$ такави да је

$$\mathbf{m}_G(\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi) > q > r > \sum_{\xi<\gamma} \mathbf{m}_G(A_\xi).$$

Нека је $\mathbf{A}_\xi$ име за A_ξ, $\mathbf{A}_E$ име за $\bigcup_{\xi\in E} A_\xi$, за коначан $E \subseteq \gamma$, и $\mathbf{A}$ име за $\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi$. Постоји $b \in G$ такав да

$$b \Vdash (\forall\xi < \gamma)\mathbf{A}_\xi \subseteq \check{\kappa} \wedge (\forall E \in [\gamma]^{<\omega})\mathbf{A}_E = \bigsqcup_{\xi\in E} \mathbf{A}_\xi \wedge \mathbf{A} = \bigsqcup_{\xi<\gamma} \mathbf{A}_\xi \wedge \mathbf{m}(\mathbf{A}) > \check{q} \wedge \sum_{\xi<\gamma} \mathbf{m}(\mathbf{A}_\xi) < \check{r}.$$

Сада имамо да

$$b \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}_E) = \sum_{\xi\in E} \mathbf{m}(\mathbf{A}_\xi) < \check{r},$$

одакле следи

$$r > \mu_b(\mathbf{A}_E) = \sum_{\xi\in E} \mu_b(\mathbf{A}_\xi),$$

па је

$$\mu_b(\mathbf{A}) = \sum_{\xi<\gamma} \mu_b(\mathbf{A}_\xi) \leqslant r.$$

Због $b \Vdash \mathbf{m}(\mathbf{A}) > \check{q}$ је $\mu_b(\mathbf{A}) \geqslant \mu_b^*(\mathbf{A}) \geqslant q$ - контрадикција.

4 Прављење мерљивих кардинала

Нека су κ и ν непрбројиви кардинали, при чему је $\nu < \kappa$, и нека је I неглавни идеал над κ који садржи све синглтоне. За подскуп кардинала κ кажемо да је мере нула (у односу на I) ако припада I, позитивне мере ако не припада I и мере 1 ако припада дуалном филтеру идеала I. У овом одељку су од интереса следећа својства идеала.

***Дефиниција* 4.1.**

1. *I је ν-засићен ако је $P(\kappa)/I$ ν-с.с.*

2. *Подскуп кардинала κ је атом ако је позитивне мере и ако се не може разбити на два скупа позитивних мера. I је безатомичан ако не постоје атоми.*

3. *I је нормалан ако је κ-комплетан и ако за сваки скуп S позитивне мере и сваку регресивну функцију $f : S \to \kappa$ постоји $T \subseteq S$ позитивне мере на ком је f константна.*

Ако је μ мера над κ, онда је I_μ κ-комплетан σ-засићен, па је јасно да је тачка 1 предходне дефиниције резултат нашег настојања да уопштимо појам мере. Ово својство има очигледну карактеризацију, коју дајемо у виду следеће леме.

***Лема* 4.1.** *I је ν-засићен акко не постоји ν подскупова κ који су ван I а пресек свака два различита је у I.*

Наравно, тачком 2 предходне дефиниције су уопштени појмови атома и безатомичности мере. У складу с овим је и следећа теорема, по формулацији и доказу јако слична Уламовој дихотомији.

***Теорема* 4.1.** *Ако је I κ-комплетан ν-засићен над κ, онда наступа тачно једна од следеће две могућности.*

1. *I је безатомичан, κ је слабо недостижив и $\kappa \leqslant 2^{<\nu}$.*

2. *κ је мерљив.*

Размотримо сада појам нормалности. Нека је μ бинарна мера над κ. Тада је ултрастепен

$$\prod_\mu \langle \kappa, \in \rangle$$

добро уређење. Тип овог уређења је $> \kappa$, што следи из очигледне неједнакости $\overline{\beta}_\mu \in_\mu \mathrm{id}_{\kappa\mu}$, која важи за све $\beta < \kappa$, при чему је $\overline{\beta} = \langle \beta \,|\, \alpha < \kappa \rangle$. Сада је логично поставити питање да ли је $\mathrm{id}_{\kappa\mu}$ први већи од свих $\overline{\beta}_\mu$. То не мора нужно бити случај, али, ако јесте, онда за меру μ кажемо да је нормална. Дакле, „μ је нормална” значи

$$(\forall f \in {}^\kappa\kappa)(\{\alpha < \kappa \,|\, f(\alpha) < \alpha\} \notin I_\mu \Rightarrow (\exists \beta < \kappa)\{\alpha < \kappa \,|\, f(\alpha) = \beta\} \notin I_\mu),$$

па је јасно порекло тачке 3 дефиниције 4.1.

Пројекција мере μ по функцији чија је класа κ-ти елемент горе поменутог ултрастепена је нормална мера. Прилагођавањем ове идеје доказујемо следеће тврђење.

***Теорема* 4.2.** *Ако постоји κ-комплетан ν-засићен идеал над κ, онда постоји и нормалан ν-засићен идеал над κ.*

Доказ. Нека је I κ-комплетан ν-засићен идеал над κ. Нека је $\mathcal{F}$ скуп свих неограничених функција у κ дефинисаних на неком $S \subseteq \kappa$ позитивне мере. Нека су за $f, g \in \mathcal{F}$ релације $<$ и $\leq$ дефинисане на следећи начин.

1. $f < g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{dom}f \subseteq \text{dom}g \wedge (\forall \alpha \in \text{dom}f) f(\alpha) < g(\alpha)$.

2. $f \leq g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{dom}f \subseteq \text{dom}g \wedge (\forall \alpha \in \text{dom}f) f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$.

Докажимо да за $f \in \mathcal{F}$ постоји $<$-минимална $g \leq f$. Претпоставимо супротно. Нека је $g \leq f$ произвољна. Тада постоји максимални $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ са следећим својствима:

1. сваки елемент из $\mathcal{A}$ је $< g$;

2. два различита елемента из $\mathcal{A}$ имају дисјунктне домене.

Ако је $h = \bigcup \mathcal{A}$, онда је $h < g$ и важи $\text{dom}g \setminus \text{dom}h \in I$. Сада је јасно да постоји бесконачна $<$-регресија g_n таква да је $\text{dom}g_n \setminus \text{dom}g_{n+1} \in I$. Одавде следи да $\bigcap_{n<\omega} \text{dom}g_n \notin I$, па постоји $x \in \bigcap_{n<\omega} \text{dom}g_n$ и за њега важи да је $g_n(x)$ бесконачна $\in$-регресија. Контрадикција.

Постоји максимални $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ са следећим својствима:

1. сваки елемент из $\mathcal{A}$ је $<$-минимална;

2. два различита елемента из $\mathcal{A}$ имају дисјунктне домене.

Нека је $g = \bigcup \mathcal{A}$. На основу ν-засићености идеала I је $|\mathcal{A}| \leqslant \nu < \kappa$, па за $h < g$ мора постојати $g_1 \in \mathcal{A}$ таква да $A = \text{dom}h \cap \text{dom}g_1 \notin I$, одакле следи $h \upharpoonright A < g_1$, што није могуће. Дакле, g је $<$-минимална. На сонову максималности $\mathcal{A}$ и предходно доказаног, следи да је $\text{dom}g$ мере 1, па је екстензија f функције g, која је једнака 0 тамо где g није дефинисана, $<$-минимално пресликавање $\kappa \to \kappa$.

Непосредно се проверава да је

$$J = \{X \subseteq \kappa \,|\, f^{-1}[X] \in I\}$$

κ-комплетан ν-засићен идеал. Показаћемо да је он нормалан.

Нека је $g : S \to \kappa$ регресивна функција на скупу S позитивне J-мере. Тада је $T = f^{-1}[S]$ позитивне I-мере и за функцију $h = gf$ дефинисану на њему важи $h(\xi) < f(\xi)$, за све $\xi \in T$. Из $<$-минималности функције f следи да је g ограничена, па је јасно да је костантна на неком подскупу скупа S позитивне J-мере.

$\square$

Следећу теорему наводимо без доказа.

***Теорема* 4.3.** *Ако је I нормалан ν-засићен и ако је $V = L[I]$, онда важи $2^{<\nu} = \nu$ и $2^\lambda = \lambda^+$, за све $\lambda \geqslant \nu$.*

***Теорема* 4.4.** *Ако је I нормалан ν-засићен над κ, онда*

$$L[I] \models \text{„}\kappa \text{ је мерљив”}.$$

Доказ. $J = I \cap L[I]$ је у $L[I]$ нормалан ν-засићен идеал над κ и $L[I] = L[J]$, па на основу теореме 4.3 у $L[I]$ је $2^{<\nu} = \nu < \kappa$, одакле, на основу теореме 2, следи да је κ мерљив у $L[I]$.

□

Могуће је показати да је J нормални максимални идеал над κ у $L[I]$. На основу теореме 4.3 онда следи $L[I] \models$ GCH. Слично доказу теореме 4.2, могуће је доказати да на РВМ кардиналу постоји нормална мера, па, на основу предходне теореме, имамо следећу.

***Теорема* 4.5.** *Ако је κ РВМ, онда над њиме постоји нормална мера μ и важи*

$$L[I_\mu] \models \mathrm{GCH} + \text{„}\kappa \text{ је мерљив”}.$$

Показаћемо још да је РВМ кардинал слабо Малоов.

***Лема* 4.2.** *Ако је I нормалан ν-засићен над κ, онда је регресивна функција у κ дефинисана на скупу позитивне мере скоро свугде ограничена на том скупу.*

Доказ. Нека је S позитивне мере и нека је $f : S \to \kappa$ регресивна. Нека је $\mathcal{A}$ максималан скуп дијунктних подскупова позитивне мере скупа S на којима је f константна. Одавде, на основу нормалности, следи да је $S \setminus \bigcup \mathcal{A} \in I$. Будући да је I ν-засићен и да је κ регуларан, функција f је на скупу $\bigcup \mathcal{A}$ (скоро свугде) не већа од $\bigcup \bigcup_{X \in \mathcal{A}} f[X] < \kappa$.

□

***Теорема* 4.6.** *РВМ је слабо Малоов.*

Доказ. Нека је κ РВМ. Постоји нормалан σ-засићен идеал J над κ. Будући да је κ слабо недостижив, довољно је доказати да су у њему регуларни кардинали стационирани. Како су затворени неограничени скупови J-мере 1, довољно је доказати да је скуп свих регуарних кардинала J-мере 1.

Претпоставимо супротно. Тада је скуп свих сингуларних граничних ординала позитивне мере и функција $\alpha \mapsto \mathrm{cf}\alpha$ је на њему регресивна, па је за скоро све њих (за све из неког S) она једнака неком $\lambda < \kappa$. За $\alpha \in S$ нека је $\langle \alpha_\beta \mid \beta < \lambda \rangle$ строго растући низ чији је лимес α. Функција $\alpha \mapsto \alpha_\beta$ је за свако $\beta < \lambda$ регресивна на S, па постоји, на основу леме 4.2, $\gamma_\beta < \kappa$ од ког је она скоро свугде мања. Тада за скоро све елемнте α скупа S позитивне мере важи

$$\alpha = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha_\beta \leqslant \bigcup_{\beta<\lambda} \gamma_\beta < \kappa.$$

Контрадикција.

□

5 Закључак

Размотримо један „практичан” аспект овде изложене материје. Значај вероватноће у физици је огроман. Ми се ту врло често сусрећемо са непребројивим скуповима елементарних догађаја. На пример у квантној механици, када посматрамо неку честицу, ми говоримо о вероватноћи њеног налажења у неком делу простор-времена; скуп елементарних догађаја у овом случају је $\mathbb{R}^4$. Интуитивно, који год *део* простор-времена да посматрамо, требало би да постоји вероватноћа да се честица налази у њему. Другим речима, очекујемо да сваки подскуп $\mathbb{R}^4$ има вероватноћу. Међутим, како би та вероватноћа дефинитивно морала да задовољава својства 1-3 дефиниције 2.1, видимо да је оно што очекујемо еквиконсистентно мерљивом кардиналу. Ово би значило да нам је консистентност егзистенције мерљивог кардинала интуитивна! Ако узмемо у обзир да је све што можемо *видети* коначно, и то *мало* коначно, морамо се запитати шта то не ваља у нашем погледу на стварност.

Предходно разматрање почива на убеђењу да наша стварност није *патолошка*. Дакле, верујемо да важи аксиома избора и да поменута вероватноћа мора бити тотална и σ-адитивна. Ако бисмо неко од ових уверења одбацили, проблем би нестао (истина је да се у резултату 3 из увода помиње јако недостижив кардинал, али Соловеј је веровао да би се претпоставка о његовој егзистенцији могла изоставити; чак и кад ово не би био случај, далеко лакше бисмо прихватили недостижив кардинал од мерљивог). Дакле, шта је стварност: постојање патолошких појава или консистентност мерљивог кардинала? Ако бисмо прихватили патологије, онда бисмо се морали запитати колико дубоко оне досежу. Можда у нашој стварности постоје скупови који припадају сами себи?!

Библиографија

[1] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић: Теорија мере. Функционална анализа. Теорија оператора. Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[2] S. Banach: Sur le problème de la mesure. Fundamenta Mathematicae 4, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1923, 7-33.

[3] T. Jech: Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and Expanded. Springer, Berlin, 2002.

[4] A. Perović, A. Jovanović, B. Veličković: Teorija skupova. Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[5] R. M. Solovay: A Model of Set-Theory in Which Every Set of Reals is Lebesgue Measurable. The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 92, No. 1, 1970, 1-56.

[6] R. M. Solovay: Real-valued measurable cardinals. Axiomatic set theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, 397–428.