Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Конвексни политопи и Брионова теорема

Ученик:
Алекса Милојевић IVд

Ментор:
др Соња Чукић

Београд, јун 2019.

Садржај

1

Увод

Иако су прве дефиниције политопа као генерализације полигона и полиедара наслућене још почетком XIX века, математичари су морали сачекати Риманово и Шлафијево заснивање вишедимензионе геометрије да би се озбиљније бавили овом облашћу.

Везе теорије политопа са другим математичким областима зато настају тек крајем XIX и почетком XX века. У почетку, математичари су се претежно бавили геометријским својствима ових објеката, изучавајући поплочавања вишедимензионих простора њима и правилне политопе. У овом периоду, велики утицај на развој ове области имали су Питер Шут и Алисија Бул.

Половином XX века, Коксетер пише књигу у којој сумира дотадашње знање у овој области. Након овога, креће се са дефинисањем и истраживањем комбинаторних особина политопа, као што су њихови графови, број страна, темена итд. Многа питања постављена тада и данас остају нерешена. У овом раду фокусираћемо се на рад Бриона и Ерхарта, који су своје теореме доказали крајем XX века. Њихове теореме осликавају врло јако везу између решетака (у нашем случају целобројних) и политопа.

У другом поглављу углавном се подсећамо градива линеарне алгебре које ћемо интензивно користити у даљем тексту. Треће поглавље, следећи приступ из [5], дефинише основне објекте с којима ћемо радити. Ово поглавље повезано је с апендиксом А у коме допуњујемо доказ основне теореме о дефинисању политопа. Међутим, доказ који дајемо је другачији него у [5], зарад илустративне примене поларности. У четвртом поглављу додајемо последњи технички састојак потребан за наш доказ Брионове теореме, при чему докази лема у овом поглављу порекло вуку из књиге [1]. Поглавља 5 и 6 представљају суштину овог рада, и у њима се доказују и теореме због којих је цела машинерија индикаторских функција развијена. При доказу Брионове теореме, следимо други део рада [2], док у шестом поглављу приказујемо приступ из [3]. Ерхартова теорема из шестог поглавља може се на исти начин доказати и за политопе са рационалним теменима, али је тај део изостављен ради техничког поједностављивања доказа. Апендикси Б и В садрже доказе теорема који су сувише технички захтевни да би се презентовали тамо где се одговарајуће теореме користе. У апендиксу В теорему о триангулацијама полиедара доказујемо слично као у књизи [4].

У раду смо често тежили јасном представљању идеја, понекад и на уштрб формалности. Упркос томе, у раду ниједна теорема која се користи није остављена без доказа, иако су некад ти докази премештени у апендикс. Како су политопи с којима се срећемо често неограничени, зваћемо их полиедрима кроз цео рад.

На крају, трудили смо се да рад садржи што више слика, јер верујемо да су оне кључне за стицање геометријске интуиције. Управо слике осликавају јаку везу теорије политопа и геометрије.

2

Вишедимензиони простори

Овај рад се претежно бави геометријом вишедимензионих скупова. Пре свега, интересује нас уопштење појма многоугла и полиедра на d-димензиони простор. Често ће баш интуиција која потиче из равни или тродимензионалног простора бити кључна за доказивање много сложенијих и општијих теорема.

Постоје два начина де се појам полиедра природно генерализује на више димензије. Међутим, пре него што будемо могли да формирамо те дефиниције, мораћемо да уведемо одговарајућу нотацију.

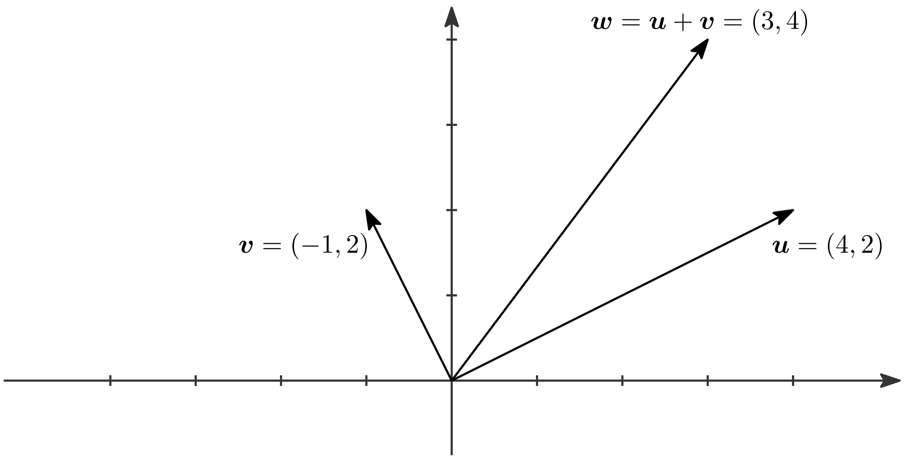
Дефиниција 2.1. За природан број d, са $\mathbb{R}^d$ означаваћемо Декартов производ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, где се $\mathbb{R}$ појављује d пута. Конкретно, то је скуп d-торки облика $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, где су $x_i \in \mathbb{R}$. [1]

Врло често ћемо $\mathbb{R}^d$ посматрати као векторски простор на пољем $\mathbb{R}$, а d-торке као векторе, које можемо сабирати и множити скаларима као и уобичајене тродимензионалне векторе. Прецизније, ако је $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, а $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$, онда је $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_d + y_d)$. Такође, за $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_d)$.

Операција скаларног производа биће кључна за нашу дефиницију поларности касније у тексту, тако да ћемо се подсетити да скаларни производ вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ дефинишемо као збир $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d$. Овако дефинисан скаларни производ можемо искористити да генерализујемо појам нормалности вектора. За векторе $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ кажемо да су нормални ако је $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.

У тексту и формулама, векторе (d-торке реалних бројева) ћемо увек означавати подебљаним словима, рецимо $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}$ итд.

[1] Свака d-торка представља координате неке тачке. Стога бројеве x_i зовемо координате тачке (вектора).



Слика 2.1

Пример 1. На слици видимо представљање два пара бројева $\boldsymbol{u} = (4, 2)$ и $\boldsymbol{v} = (-1, 2)$ у равни. Приметићемо да су $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ ортогонални, тј. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$.

Почев одавде, поистоветићемо тачке и векторе, јер се могу на исти начин описати d-торкама реалних бројева. Стога од сада можемо сабирати и множити тачке као што смо векторе до сада. Подсетимо се још и дефиниције линеарне независности вектора:

Дефиниција 2.2. *Линеарна комбинација* вектора $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$ је израз облика $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$, где су $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Бројеве λ_i зовемо коефицијентима у линеарној комбинацији. Скуп свих линеарних комбинација скупа вектора $X = \{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ зваћемо њиховим *линеарним омотачем* и обележаваћемо са $\operatorname{span}(X)$. Формално:

$$\operatorname{span}(X) = \{\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \wedge \boldsymbol{x}_i \in X\}.$$

Чак и ако је X бесконачан скуп, можемо и даље дефинисати $\operatorname{span}(X)$ као скуп свих могућих линеарних комбинација коначно много вектора из X. Скуп X је *линеарно независан* ако ниједан његов вектор није једнак некој линеарној комбинацији осталих.

Занимљиво је да $\operatorname{span}(X)$ формира векторски простор унутар $\mathbb{R}^d$.

2.1 Афина геометрија

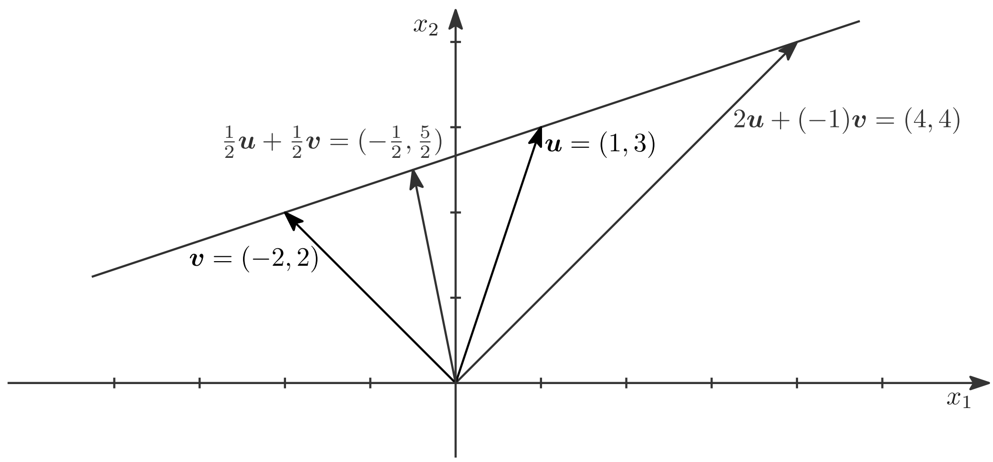
Пошто смо успешно пронашли простор у коме ћемо живети, време је да кренемо да истражујемо његову геометрију. Стога и следеће појмове преносимо у $\mathbb{R}^d$:

Дефиниција 2.3. *Афина комбинација* вектора $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$ је линеарна комбинација тих вектора за коју је сума коефицијената једнака 1, тј. $\sum \lambda_i = 1$. Скуп свих афиних комбинација скупа X зваћемо *афиним омотачем*, и обележавати са $\mathrm{aff}(X)$. Скуп X је *афино независан* ако се ниједан његов елемент не може представити као афина комбинација других елемената.

Слично као што је $\mathrm{span}(X)$ векторски простор у $\mathbb{R}^d$, за $\mathrm{aff}(X)$ можемо рећи да је то афини простор. Афини простори играће кључну улогу у генерализовању појма праве и равни на више димензије. Заправо, имамо дефиниције:

Дефиниција 2.4. *Права* у $\mathbb{R}^d$ је скуп тачака које су колинеарне са две дате тачке $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, тј. скуп свих оних тачака које се могу представити као њихова афина комбинација $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}$, за $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ова дефиниција одговара правој облика $\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{v}$, што се подудара са нашом тродимензионом интуицијом.



Слика 2.2

Дефиниција 2.5. *Хиперраван* $H \subset \mathbb{R}^d$ је скуп облика $H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = b\}$, за неке $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}$.

Ово значи да су тачке хиперравни одређене једном једначином облика $a_1x_1 + \cdots + a_dx_d = b$, што одговара интуицији коју имамо у нижим димензијама. Сада ћемо приметити да је и хиперраван афини простор, тј. да свака афина комбинација тачака хиперравни представља и даље тачку хиперравни. Ово је тачно јер ако $\boldsymbol{x}_i \in H$, онда је

$$(\sum \lambda_i \boldsymbol{x}_i) \cdot \boldsymbol{a} = \sum \lambda_i \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{a} = \sum \lambda_i b = b,$$

јер је $\sum \lambda_i = 1$. Како је за сваке две тачке $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0$, кажемо да је $\boldsymbol{a}$ вектор нормале на хиперраван H.

Како радимо у вишедимензионим просторима, ваљало би и да добро утврдимо шта сматрамо под појмом димензија. До сада смо јасно дефинисали $\mathbb{R}^d$ као простор димензије d. Међутим, остаје питање како дефинисати димензију произвољног објекта.

Интуитивно, димензија објекта је број степена слободе који имамо када дефинишемо његове тачке. Права би била димензије 1, јер постоји само један параметар λ којим можемо одредити сваку тачку на правој. Раван је димензије 2, јер су нам увек потребне две координатне осе унутар равни да бисмо једнозначно одредили све њене тачке. Међутим, овакву интуицију тешко је пренети на формалну дефиницију, па морамо приступити новом начину да дефинишемо димензију.

Дефиниција 2.6. *Димензију* објекта (скупа тачака) $X \subset \mathbb{R}^d$ дефинишемо као максимални број афино независних тачака у X умањен за један, и обележавамо са $\dim X$.

Ево и објашњења зашто ова дефиниција одговара нашој пређашњој интуицији. Нека је $k+1$ максималан број афино независних тачака у неком афином простору X, и нека су те тачке рецимо $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k$. Онда је и свака тачка облика $\boldsymbol{x}_0 + \lambda_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + \lambda_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0) + \cdots + \lambda_k(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0)$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) такође у X. Међутим, ако би постојала тачка $\boldsymbol{y} \in X$ која се не може представити овако, онда би она била афино независна од $\boldsymbol{x}_0, ..., \boldsymbol{x}_k$, што је немогуће јер је $k+1$ максималан број афино независних тачака у X. Даље, из афине независности $\boldsymbol{x}_0, ..., \boldsymbol{x}_k$ добијамо да је свакој тачки $\boldsymbol{y} \in X$ одговара тачно један избор коефицијената λ_i. Дакле, као да сваку тачку $\boldsymbol{y} \in X$ можемо описати са k координата $\lambda_1, ..., \lambda_k$.

Занимљиво је приметити да је $\dim X$ у ствари најмањи број d такав да X можемо да сместимо у $\mathbb{R}^d$ очувавајући његову геометријску структуру.[2]

Дефиниција 2.7. *Кодимензију* скупа $X \subset \mathbb{R}^d$ дефинишемо као $\operatorname{codim} X = d - \dim X$.

Претходна дефиниција није суштинска, већ само олакшава нотацију. Приметићемо да кодимензија скупа зависи од простора $\mathbb{R}^d$ у коме живимо.

Пример 2. Хиперраван је објекат димензије $d-1$.

[2]Када кажемо да $X \subset \mathbb{R}^n$ и $X' \subset \mathbb{R}^m$ имају исту геометријску структуру, мислимо на то да постоји инвертибилна трансформација облика $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ (где је A матрица формата $m \times n$, а $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$) која слика X у X'.

2.2 Конвексност

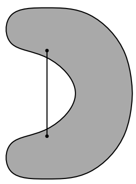
Како се у овом раду претежно бавимо конвексним објектима, подсетићемо се дефиниције конвексног скупа.

Дефиниција 2.8. Скуп X је *конвексан* ако дуж одређена са сваке две његове тачке у целости припада скупу X.

У $\mathbb{R}^d$ ова дефиниција захтева геометријску интуицију и дефиницију дужи између две тачке. Стога, следећа дефиниција даје еквивалентан алгебарски запис:

Дефиниција 2.9. Скуп $X \subset \mathbb{R}^d$ је *конвексан* ако за сваке две његове тачке $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, и за све $\lambda \in [0,1]$ важи $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in X$.

Пример 3. На слици је пример једног неконвексног скупа тачака у равни. Такође, сваки скуп са n тачака у $\mathbb{R}^d$ је неконвексан, када је n природан број већи или једнак 2.

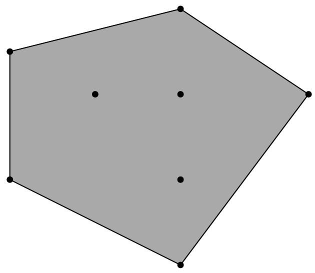


Слика 2.3

Примећујемо да је израз који се појављује у претходној дефиницији $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}$ у ствари афина комбинација вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ са условом $\lambda \in [0,1]$. Онда можемо генерализовати овакав израз на скуп вектора:

Дефиниција 2.10. Нека је $V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ скуп вектора. Конвексну комбинацију тог скупа дефинишемо као афину комбинацију у којој су сви коефицијенти позитивни. Конкретно, конвексна комбинација је израз облика $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots \lambda_n\boldsymbol{v}_n$, где је $\sum \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}_0^+$. Конвексни омотач скупа тачака је, слично као и у ранијим дефиницијама, скуп свих конвексних комбинација почетног скупа. Конвексни омотач скупа V обележаваћемо са $\operatorname{conv} V$.

Пример 4. На слици је конвексни омотач скупа тачака у равни. Ваља приметити да нису све тачке „неопходне”да би конвексни омотач имао овај облик. Рецимо, и ако избацимо неку од централне три тачке из скупа, конвексни омотач задржаће свој облик.



Слика 2.4

Конвексни омотач скупа X је заправо најмањи конвексан скуп коме X припада. Ово заправо и није тешко доказати јер све тачке из $\operatorname{conv} X$ сигурно морају припадати конвексном скупу који садржи X јер су конвексне комбинације тачака из X. С друге стране, $\operatorname{conv} X$ јесте конвексан скуп, па одатле добијамо његову минималност.

3

Полиедри

3.1 Дефиниције

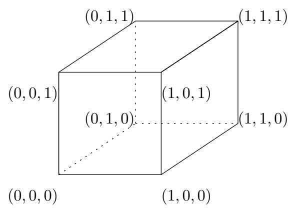
Конвексни многоуглови у две димензије су сушински одређени својим теменима. Сваком многоуглу одговара јединствен скуп темена, а од скупа темена се увек може конструисати многоугао. Тачка X припада многоуглу $\mathcal{M}$ ако се налази унутар конвексног омотача његових темена. Одатле добијамо природну дефиницију полиедра у вишим димензијама:

Дефиниција 3.1. Нека је дат скуп $V = \{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$. Тада $\mathcal{V}$-*полиедар* над тим скупом дефинишемо као скуп свих конвексних комбинација скупа V.

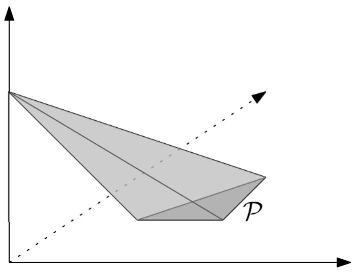
Пример 5. Узмимо скуп $V = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Његов конвексни омотач је тетраедар са теменима у тачкама V.

Сада ћемо искористити нашу нову дефиницију да генерализујемо појмове коцке и пирамиде у $\mathbb{R}^d$.

Пример 6. Хиперкоцку у $\mathbb{R}^d$ можемо дефинисати као конвексни омотач 2^d тачака облика $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_d)$, где су $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_i \in \{0, 1\}$.



Слика 3.1



Слика 3.2

Пример 7. Над било којим полиедром $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^d$ можемо дефинисати пирамиду са основом $\mathcal{P}$. То радимо тако што у $\mathbb{R}^{d+1}$, у хиперраван $x_{d+1} = 0$, сместимо полиедар $\mathcal{P}$, и дефинишемо пирамиду над $\mathcal{P}$ као скуп $\mathrm{conv}\{(0, ..., 0, 1)\} \cup \mathcal{P}$.

Дефиниција 3.2. Све полиедре које можемо представити као конвексни омотач $d + 1$ афино-независне тачке у $\mathbb{R}^d$ зваћемо *d-симплекс.*

Међутим, у овој дефиницији су темена на неки начин истакнута, и не знамо како да дефинишемо странице тог полиедра. Стога, равански многоугао можемо и другачије окарактерисати: многоугао је пресек полуравни одређених његовим ивицама. Наиме, свакој ивици можемо доделити полураван која је одређена правом која садржи ивицу, тако да цео многоугао припада тој полуравни. У $\mathbb{R}^d$, полупростор би био скуп са једне стране хиперравни. Формалније, тај скуп би имао облик $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} \leq b\}$, где су $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}$. Одатле имамо следећу дефиницију полиедра:

Дефиниција 3.3. Нека је дат скуп вектора $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^d$, и бројеви $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$. Тада је *$\mathcal{H}$-полиедар* скуп свих тачака $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, таквих да за све $i \in \{1, ..., n\}$ важи $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_i \leq b_i$.

Пример 8. Заинтересованом читаоцу предлажемо да $\mathcal{V}$-полиедар из примера 5 представи као скуп решења нејдначина као у дефиницији 3.3.

На овај начин, полиедар дефинишемо као скуп решења неких линеарних неједначина. На први поглед, уопште није јасно каква је веза између претходне две дефиниције. Чак и више, предажемо читаоцу да се увери да ове две дефиниције нису еквивалентне чак ни у равни. Ево следећег примера:

Пример 9. Посматрајмо $\mathcal{H}$-полиедар у равни дефинисан само једном неједначином $x_1 \leq 1$. Решења ове неједначине формирају једну полураван коју тешко да можемо представити као конвексни омотач коначно много тачака. Проблем који се поставља је неограниченост ове полуравни, јер су конвексни омотачи коначног броја тачака ограничени. Стога, морамо побољшати наше дефиниције.

Постоје два начина да разрешимо овај проблем. Први је да кажемо да $\mathcal{H}$-полиедри морају бити ограничени, тј. да не смеју садржати полуправу. Онда скуп ограничених $\mathcal{H}$-полиедара заправо јесте исти као скуп $\mathcal{V}$-полиедара (мада ово није тривијално показати без дефиниција купа).

Други начин да побољшамо дефиницију јесте да на неки начин дозволимо конвексним омотачима да буду бесконачни, тј. да дозволимо да тачке у конвексним комбинацијама буду тачке у бесконачности. За читаоца упућеног пројективну геометрију, ово можемо урадити на сличан начин као што дефинишемо $\mathbb{R}P^2$.[1]

Дефиниција 3.4. Дат је скуп вектора $V = \{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$. *Купу* са теменом у $\boldsymbol{a}$ над тим скупом вектора дефинишемо као скуп $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{a} + \sum \lambda_i \boldsymbol{v}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_0^+\}$. Векторе $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ зваћемо генераторима купе.

Пример 10. У $\mathbb{R}^2$ купа над генераторима $(1,0)$ и $(0,1)$ би била цео први квадрант координатног система, јер је $(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$, а овакво представљање је могуће само за $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$.

Пример 11. Ако купа нема генератора, онда се састоји од само једне тачке, њеног темена $\boldsymbol{a}$.

Сада су купе управо оно што ће нам дати потребну бесконачност у дефиницији $\mathcal{V}$-полиедара.

Дефиниција 3.5. За дате скупове $X, Y \in \mathbb{R}^d$ дефинишемо *суму Минковског* та два скупа као

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}.$$

Сада коначно имамо еквиваленцију коју смо до сада тражили:

Теорема 3.1. (Фурије – Моцкин) Нека је дат скуп $X \subset \mathbb{R}^d$. Онда је X $\mathcal{H}$-полиедар ако и само ако се може представити у облику $\operatorname{conv} V + \mathcal{K}$, где је V коначан скуп вектора, а $\mathcal{K}$ нека купа. Оне скупове X који се могу тако представити зваћемо полиедрима.

Како би нас доказ овог тврђења скренуо с пута ка Брионовој теореми, пренећемо га у апендикс А. Одавде директно следи да су сви ограничени полиедри у ствари $\mathcal{V}$-полиедри, јер је $\operatorname{conv} V + \mathcal{K}$ ограничен ако и само ако се $\mathcal{K}$ састоји од само једне тачке.

[1] Наиме, можемо цео наш простор $\mathbb{R}^d$ сместити као хиперраван $x_{d+1} = 1$ унутар простора $\mathbb{R}^{d+1}$. Затим, полиедре из $\mathbb{R}^d$ можемо представити као пресек купе са теменом у $\mathbf{0}$ и хиперравни $x_{d+1} = 1$. Овај поступак познат је као хомогенизација и први је корак у доказу да су наше две дефиниције полиедара еквивалентне.

3.2 Стране полиедра

Интуитивно, стране полиедра треба дефинисати као структуре на граници полиедра. Међутим онда се поставља питање како формално одредити границу полиедра. Ево једног приступа.

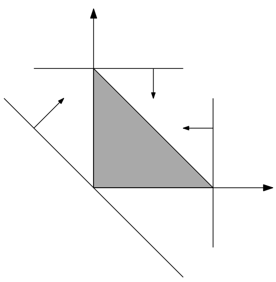
Дефиниција 3.6. Неједнакост $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \leq b$ зваћемо *тачном* за полиедар $\mathcal{P}$ ако је задовољава свака тачка $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$.

Дефиниција 3.7. Нека је неједнакост $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \leq b$ тачна за полиедар $\mathcal{P}$. Скуп свих тачака које задовољавају $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = b$ зваћемо *страном* $\mathcal{F}$ полиедра $\mathcal{P}$. За неједнакост $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \leq b$ рећи ћемо да *одређује* $\mathcal{F}$.

Дефиниција 3.8. У зависности од димензије стране, можемо класификовати стране као *темена* (стране димензије 0), *ивице* (стране димезије 1), *фацете* (стране димензије $\dim \mathcal{P} - 1$).

Пример 12. Посматрајмо троугао у равни са теменима $(0,0), (1,0), (0,1)$. Он има 8 страна, празан скуп, три стране диманзије 0, три стране димезније 1 и једну страну димензије 2.

- Празан скуп је страна која је одређена неједнакошћу $x_1 \geq -1$. Ова неједнакост јесте у складу с нашом дефиницијом јер је еквивалентна са $(1,0) \cdot (x_1, x_2) \geq -1$.
- Стране димензије 0 у нашем троуглу јесу управо његова темена. Линеарне неједнакости које их одређују приказане су на слици.
  - Страна $\{(0,0)\}$ је одређена са $x_1 + x_2 \geq 0$, тј. $(1,1) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$.
  - Страна $\{(1,0)\}$ је одређена са $x_1 \leq 1$, тј. $(-1,0) \cdot (x_1, x_2) \geq -1$.
  - Страна $\{(0,0)\}$ је одређена са $x_2 \leq 1$, тј. $(0,-1) \cdot (x_1, x_2) \geq -1$.



Слика 3.3

- Стране димензије 1 су ивице нашег троугла:
  - Дуж $(0,0)(1,0)$ је одређена са $x_2 \geq 0$, тј. $(0,1)\cdot(x_1,x_2) \geq 0$.
  - Дуж $(0,0)(0,1)$ је одређена са $x_1 \geq 0$, тј. $(1,0)\cdot(x_1,x_2) \geq 0$.
  - Дуж $(0,1)(1,0)$ је одређена са $x_1 + x_2 \leq 1$, тј. $(-1,-1)\cdot(x_1,x_2) \geq -1$.
- Цео троугао јесте такође страна по нашој дефиницији. Он је одређен случајем једнакости у неједнакости $0 \geq 0$, тј. $(0,0)\cdot(x_1,x_2) \geq 0$.

Лема 3.1. Страна $\mathcal{F}$ полиедра $\mathcal{P}$ је и сама полиедар.

Доказ. Нека је $\mathcal{F}$ одређена неједначином $\boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{x} \leq b_0$. Ако је $N = \{\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} \leq b_i\}$ скуп неједнакости који описује $\mathcal{P}$, онда скуп $N \cup \{\boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{x} \leq b_0, \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{x} \geq b_0\}$ описује страну $\mathcal{F}$. □

Лема 3.2. Ако су $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ стране полиедра $\mathcal{P}$, имамо да је и $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ страна $\mathcal{P}$.

Доказ. Ако су $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ одређене са $\boldsymbol{a}_{\mathcal{F}} \cdot \boldsymbol{x} \leq b_{\mathcal{F}}$ и $\boldsymbol{a}_{\mathcal{G}} \cdot \boldsymbol{x} \leq b_{\mathcal{G}}$, онда неједнакост $(\boldsymbol{a}_{\mathcal{F}} + \boldsymbol{a}_{\mathcal{G}}) \cdot \boldsymbol{x} \leq b_{\mathcal{F}} + b_{\mathcal{G}}$ одређује $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. □

Пажљиви читалац приметиће да смо темена полиедра досад помињали у два различита контекста, као елементе конвексних комбинација којима дефинишемо $\mathcal{P}$ и као стране димензије 0. Зашто су ова два описа темена еквивалентни?

Лема 3.3. Нека је $\mathcal{P} = \operatorname{conv} V$, где је V скуп тачака у $\mathbb{R}^d$. Ако је $\operatorname{vert} P$ скуп темена полиедра $\mathcal{P}$ (као страна димензије 0), онда је $\operatorname{vert} \mathcal{P} \subset V$. Чак и више $\mathcal{P} = \operatorname{conv}(\operatorname{vert}(P))$.

Застанимо на час да анализирамо тврђење ове леме. Први део леме даје нам да темена полиедра могу бити само оне тачке које смо користили у конвексним комбинацијама, док нам други део тврђења даје да су заправо темена довољна да би се конвексним комбинацијама реконструисао полиедар.

Доказ. За почетак ћемо из скупа V избацити све оне тачке $\boldsymbol{v}$ које се могу представити као конвексна комбинација осталих. Ово полиедар $\mathcal{P}$ неће променити јер се у свим конвексним комбинацијама које укључују $\boldsymbol{v}$, та тачка може заменити конвексном комбинацијом осталих.

Тврдимо да је преостали скуп тачака управо $\operatorname{vert} \mathcal{P}$. Јасно, одавде следе оба дела тврђења.

Изаберимо сада тачку $\boldsymbol{v} \in V$. Она се не може представити као линеарна комбинација тачака из $V' = V \backslash \{\boldsymbol{v}\}$, те $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{conv} V'$. Одатле постоји линеарна неједнакост таква да $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} > b$, и $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}' \leq b$, за све $\boldsymbol{v}' \in V'$. Међутим то значи да је $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$ управо неједнакост која у полиедру $\mathcal{P}$ одређује страну $\{\boldsymbol{v}\}$. Дакле, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{vert} \mathcal{P}$.

Узмемо ли сада тачку $\boldsymbol{v} \in \operatorname{vert} \mathcal{P}$, можемо наћи неједнакост $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$ која је одређује као страну. Како за све остале тачке $\boldsymbol{x}$ полиедра важи $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$, да би се $\boldsymbol{v}$ добила као конвексна комбинација елемената скупа V, тај скуп мора садржати неку тачку $\boldsymbol{v}_1$ са својством $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}_1 \geq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$. Али читав полиедар $\mathcal{P}$ садржи само једну такву тачку, и то баш $\boldsymbol{v}$. Дакле, $\boldsymbol{v} \in V$. $\square$

Пример 13. На тетраедру са теменима у $V = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ из примера 5 илустроваћемо доказ овог тврђења. Ако бисмо узели да је $\boldsymbol{v} = (0,0,0)$, имали бисмо да $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{conv} V \backslash \boldsymbol{v}$, па је могуће раздвојити $\boldsymbol{v}$ и $V \backslash \boldsymbol{v}$ неједнакошћу $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{1}{2}$. То значи да неједнакости $x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$ одређује $\boldsymbol{v}$ као страну. Исту неједнакост бисмо користили и да покажемо $\boldsymbol{v} \in \operatorname{vert} \mathcal{P}$.

3.3 Поларност

У овом делу текста подразумеваћемо да је $\mathcal{P}$ пуне димензије, тј. $\dim \mathcal{P} = d$.

Дефиниција 3.9. За сваки полиедар $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, дефинисаћемо његов *поларни полиедар* $\mathcal{P}^\vee$ као скуп тачака $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ за које важи $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq 1$, за све $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$.[2]

Овде није сасвим јасно да је $\mathcal{P}^\vee$ уопште полиедар, на основу наше дефиниције полиедара.

Лема 3.4. Ако је $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ полиедар, онда је и $\mathcal{P}^\vee$ такође полиедар.

Доказ. За фиксно $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^d$, покушаћемо да одредимо да ли $\boldsymbol{y}_0 \in \mathcal{P}^\vee$. На основу наше дефиниције поларности, мора бити $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}_0 \leq 1$ за све $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$.

Стога ћемо посматрати функцију $f_{\boldsymbol{y}_0}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{y}_0$, за $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$. Ово је линеарна функција, па се њена максимална вредност на $\mathcal{P}$ достиже у неком од темена $\boldsymbol{v}_i$ полиедра $\mathcal{P}$.[3]

Ако је $f_{\boldsymbol{y}_0}(\boldsymbol{v}_i) \leq 1$ за сва темена $\boldsymbol{v}_i$, онда је $f_{\boldsymbol{y}_0}(\boldsymbol{x}) \leq 1$ за $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$. Међутим, ако је $f_{\boldsymbol{y}_0}(\boldsymbol{v}_k) > 1$, онда очигледно $\boldsymbol{y} \notin \mathcal{P}^\vee$, јер $\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{y} > 1$, а $\boldsymbol{v}_k \in \mathcal{P}$.

Дакле, довољно је проверити да за $\boldsymbol{y}_0$ важи $\boldsymbol{y}_0 \cdot \boldsymbol{v}_i \leq 1$ за $i = 1, ..., n$. Међутим, ово је систем линеарних неједначина, па је скуп решења $\mathcal{P}^\vee$ управо полиедар. $\square$

Пример 14. Сада ћемо срачунати поларан полиедар у најпростијем случају, и то када је $\mathcal{P} = \boldsymbol{x}$, само једна тачка. Онда услов $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \leq 1$ долази природно и

[2] У литератури се, уместо поларног, среће и израз *дуални* полиедар.

[3] На овом тврђењу се заснивају многи алгоритми максимизације линеарних функција на полиедрима. Област која се бави овиме зове се линеарно програмирање.

одређује један полупростор, „испод” хиперравни $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 1$, и то полупростор са оне стране те хиперравни са које се налази $\mathbf{0}$. Ево још једне корисне леме.

Лема 3.5. Ако $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, онда $\mathcal{Q}^{\vee} \subset \mathcal{P}^{\vee}$.

Доказ. Посматрајмо која се ограничења (у смислу линеарних неједначина које задовољавају) постаљају на $\mathcal{P}^{\vee}$, а која на $\mathcal{Q}^{\vee}$. Наравно, како је $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, свако ограничење које имамо на $\mathcal{P}^{\vee}$, сигурно важи и за $\mathcal{Q}^{\vee}$. Дакле, на $\mathcal{Q}^{\vee}$ имамо строжа ограничења него на $\mathcal{P}^{\vee}$, па је $\mathcal{Q}^{\vee} \subset \mathcal{P}^{\vee}$. $\square$

Поларну конструкцију можемо више пута за редом применити на полиедар, тј. можемо конструисати полар поларног полиедра. Формалније, полар поларног полиедра био би скуп $(\mathcal{P}^{\vee})^{\vee} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq 1 \ \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{P}^{\vee}\}$. Уз одређене услове, полар поларног полиедра је у ствари почетни полиедар, па се зато често поларност зове и дуалност.

Лема 3.6. Ако $\mathbf{0} \in \mathcal{P}$, онда је $(\mathcal{P}^{\vee})^{\vee} = \mathcal{P}$.

Доказ. Доказ овог тврђења састојаће се из два дела: $\mathcal{P} \subset (\mathcal{P}^{\vee})^{\vee}$ и $(\mathcal{P}^{\vee})^{\vee} \subset \mathcal{P}$.

За почетак, ако $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$, сигурно имамо да је $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq 1$ за све $\boldsymbol{y} \in \mathcal{P}^{\vee}$, по дефиницији полиедра $\mathcal{P}^{\vee}$. Међутим, то је управо услов да $\boldsymbol{x} \in (\mathcal{P}^{\vee})^{\vee}$, па смо управо доказали $\mathcal{P} \subset (\mathcal{P}^{\vee})^{\vee}$.

Остаје да се покаже да $(\mathcal{P}^{\vee})^{\vee} \subset \mathcal{P}$. Ово ћемо показати принципом контрапозиције, тј. показаћемо $\boldsymbol{x}_0 \notin \mathcal{P} \Rightarrow \boldsymbol{x}_0 \notin (\mathcal{P}^{\vee})^{\vee}$. Ако $\boldsymbol{x}_0 \notin \mathcal{P}$, онда постоји нека неједначина облика $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{a} \leq b$ таква да $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} \leq b$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$, али $\boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{a} > b$. Како $\mathbf{0} \in \mathcal{P}$, онда и $\mathbf{0}$ задовољава неједначину $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{a} \leq b$, па имамо $b > 0$. Тада имамо лако да $\frac{1}{b}\boldsymbol{a} \in \mathcal{P}^{\vee}$, јер $\boldsymbol{x} \cdot (\frac{1}{b}\boldsymbol{a}) \leq 1$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$. Међутим, онда $\boldsymbol{x}_0 \cdot (\frac{1}{b}\boldsymbol{a}) > 1$, па имамо $\boldsymbol{x}_0 \notin (\mathcal{P}^{\vee})^{\vee}$. $\square$

Са $F(\mathcal{P})$ означаваћемо скуп свих страна једног полиедра. Структура скупа страна полиедра $\mathcal{P}$ и њему поларног полиедра $\mathcal{P}^{\vee}$ јако су повезане, то јест структура скупа $F(\mathcal{P})$ потпуно одређује структуру скупа $F(\mathcal{P}^{\vee})$.

Лема 3.7. Ако је $\mathcal{F} \in F(\mathcal{P})$, онда скуп

$$\mathcal{F}^{\diamond} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 1 \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \wedge \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq 1 \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P} \backslash \mathcal{F}\}$$

представља страну полиедра $\mathcal{P}^{\vee}$.

Доказ. Нека су $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k$ темена стране $\mathcal{F}$. Као и у доказу леме 3.4, закључујемо да је:

$$\mathcal{F}^{\diamond} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 1 \text{ када је } \boldsymbol{x} \text{ теме } \mathcal{F} \wedge \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq 1 \text{ када } \boldsymbol{x} \text{ није теме } \mathcal{F}\}$$

Ако су $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k$ темена стране $\mathcal{F}$ полиедра $\mathcal{P}$, посматраћемо скуп неједнакости облика $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{y} \leq 1$. Јасно, све оне важе за полиедар $\mathcal{P}^\vee$, па имамо да је $\mathcal{F}^\diamond$ управо одређена неједнакостима $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{y} \leq 1$. Конкретније, $\mathcal{F}^\diamond$ је одређена као пресек страна $\mathcal{F}_i$ које су одређене неједнакостима $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{y} \leq 1$. Како полеми 3.2 знамо да је пресек две стране полиедра и даље страна полиедра, добијамо да је и $\mathcal{F}^\diamond$ заправо страна $\mathcal{P}^\vee$. $\square$

4

Индикаторске функције

Индикаторске функције ће бити централни алат помоћу кога ћемо формулисати и доказати сва тврђења везана за представљање политопа као збир купа.

Дефиниција 4.1. Сваком (могуће неограниченом) полиедру $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ придружујемо *индикаторску функцију* $\mathbf{1}_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такву да $\mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x) = 1$ када $x \in \mathcal{P}$ и $\mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x) = 0$ иначе.

Индикаторске функције можемо сабирати на следећи начин: $(\mathbf{1}_{\mathcal{P}} + \mathbf{1}_{\mathcal{Q}})(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x) + \mathbf{1}_{\mathcal{Q}}(x)$. Такође, овакве функције можемо и множити реалним бројевима (скаларима) на следећи начин: $(\eta \mathbf{1}_{\mathcal{P}})(x) = \eta(\mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x))$. То значи да индикаторским функцијама можемо придружити структуру векторског простора над пољем $\mathbb{R}$. Детаљнији опис овог простора може се наћи у књизи [1]. Да бисмо стекли осећај за рад са индикаторским функцијама, а и као помоћ за каснији доказ Брионове теореме, доказаћемо следећу лему.

Лема 4.1. Нека су $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, ..., \mathcal{P}_n \subset \mathbb{R}^d$ полиедри и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ такви да важи $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{P}_i}(\boldsymbol{x}) = 0$ за све $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Тада важи и $\sum_i \lambda_i = 0$.

Доказ. Ову лему доказујемо индукцијом по d.
За $d = 0$, довољно је приметити $0 = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{P}_i}(\mathbf{0}) = \sum_i \lambda_i$, то јест срачунати функцију у тачки $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
Сада претпостављамо да у свакој афиној $(d-1)$-хиперравни тврђење леме важи. Конкретно, оно што ћемо користити јесте да како год пресечемо наш скуп полиедара $\mathcal{P}_i$ неком хиперравни H, сума коефицијената уз полиедре који секу H биће 0. Ово важи јер је $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{P}_i} = 0$ свуда на $\mathbb{R}^d$, па је нула и унутар H. Дакле, за свако H добијамо $\sum_{\mathcal{P}_i \cap H \neq \emptyset} \lambda_i = 0.$[1]

[1]Овде имплицитно користимо претпоставку да је пресек полиедра са неком хиперравни и даље полиедар. Ово јесте тачно, на основу дискусије о Фурије–Моцкиновој теореми из апендикса А

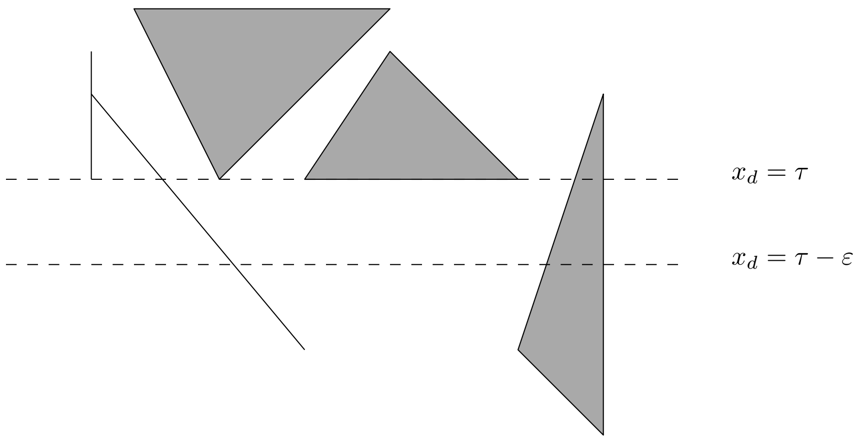
Идеја индукцијског корака јесте да направимо линеарну комбинацију неких хиперравни тако да се сваки $\mathcal{P}_i$ „појављује"у тачно једној равни. Конкретније, посматраћемо хиперравни H_τ облика $H_\tau = \{(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_d = \tau\}$. Из техничких разлога узећемо још $\varepsilon > 0$ које је јако мало. Конкретно, треба нам да је ε мање од најмање ненулте разлике међу x_d координатама темена неких од $\mathcal{P}_i$.

Примењујући индуктивну хипотезу на хиперравни H_τ и $H_{\tau-\varepsilon}$, добијамо следеће две једнакости:

$$\sum_{\mathcal{P}_i \cap H_\tau \neq \emptyset} \lambda_i = 0 \qquad \sum_{\mathcal{P}_i \cap H_{\tau-\varepsilon} \neq \emptyset} \lambda_i = 0$$

Ако узмемо да је τ минимална x_d координата неког од $\mathcal{P}_i$ и одузмемо горње једначине, добијамо

$$\sum_{\mathcal{P}_i \cap H_\tau \neq \emptyset \wedge \mathcal{P}_i \cap H_{\tau-\varepsilon} = \emptyset} \lambda_i = 0$$



Слика 4.1

Приметићемо да не постоје полиедри $\mathcal{P}_i$ који секу $H_{\tau-\varepsilon}$, а не секу H_τ, јер би онда то значило да неко њихово теме има x_d координату између $\tau - \varepsilon$ и τ, што је немогуће због дефиниције ε. Управо зато су минималне x_d координате свих полиедара који фигуришу у горњој суми једнаке баш τ. Стога, горњу једначину можемо преформулисати на следећи начин:

$$\sum_{\tau = \min_{x \in \mathcal{P}_i} x_d} \lambda_i = 0.$$

Ова једначина нам даје да је сума коефицијената уз полиедре са истом минималном x_d координатом једнака. На неки начин, успели смо да исфилтрирамо полиедре у зависности од њихове минималне x_d координате. Сада је лако наћи суму у којој се сваки полиедар појављује тачно једном.
Ако просумирамо ово по x_d координатама свих темена свих полиедара $\mathcal{P}_i$, сваки полиедар ће се рачунати тачно једном, јер сваки полиедар има јединствену минималну x_d координату. Добићемо да је сума коефицијената уз полиедре ограничене одоздо по x_d координати једнака 0.
Остаје да се у суму уврсте и они полиедри који могу имати произвољно мале x_d координате. Али то је лако, довољно је узети једначину за H_τ, где је τ мање од x_d координате свих темена свих полиедара $\mathcal{P}_i$. У ту суму ће ући тачно они полиедри који имају произвољно мале x_d координате, па то значи да је сума коефицијената уз све полиедре једнака 0, то јест $\sum_i \lambda_i = 0$.[2] □

4.1 Теорема о индикаторима и поларности

Следи једна јако интересантна и дубока лема, која повезује индикаторске функције и трансформацију поларности. Наиме, трансформација поларности пролази кроз збирове индикаторских функција. Прецизније, имамо следећу лему.

Лема 4.2. Нека су $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n \subset \mathbb{R}^d$ полиедри и $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ такви да важи $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{P}_i}(\boldsymbol{x}) = 0$ за све $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Тада важи и $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{P}_i^\vee}(\boldsymbol{x}) = 0$ за све $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

Доказ. Напишемо ли једначину $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{P}_i^\vee}(\boldsymbol{x}) = 0$, за фиксно $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, видимо да у њој фигуришу само чланови који потичу од полиедара $\mathcal{P}_i$, таквих да $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}_i^\vee$. Штавише, за оне $\mathcal{P}_i$ такве да $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}_i^\vee$, на основу леме 3.5 имамо да $\mathcal{P}_i \subset \boldsymbol{x}^\vee$.
Сада нам је циљ да одредимо $\boldsymbol{x}^\vee$. Записаћемо $H = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 1\}$, при чему H дели $\mathbb{R}^d$ на два отворена полупростора H^+ и H^-, тако да $\mathbf{0} \in H^-$. Сада је $\boldsymbol{x}^\vee$ затворени полупростор одређен са $\boldsymbol{x}^\vee = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq 1\}$, тј. $\boldsymbol{x}^\vee = H \cup H^-$.
Дакле, остаје да покажемо:

$$\sum_{\mathcal{P}_i \subset (H \cup H^-)} \lambda_i = 0.$$

Ово ћемо показати индукцијом по димензији d, користећи да је $\sum_i \lambda_i = 0$ кадгод важи $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{P}_i} = 0$.
Ово тврђење користићемо на следећи начин. Ако је G нека $(d-1)$-хиперраван, а $\mathcal{Q}_i = \mathcal{P}_i \cap G$, онда је $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{Q}_i} = 0$. Како је G у суштини исто што и $\mathbb{R}^{d-1}$(можемо

[2] Ова лема је заправо довољна за дефиницију Ојлерове карактеристике било које линеарне комбинације индикаторских функција, али то је ван опсега овог текста. Заинтересованог читаоца упућемо на [1].

афино сликати један у други), имамо да је $\sum_{\mathcal{P}_i \text{ сече } G} \lambda_i = 0$. Дакле, сума коефицијената уз оне полиедре који секу неку хиперраван једнака је нули.
Идеја је да се са услова $\mathcal{P}_i \subset (H \cup H^-)$ пребацимо на услов $\mathcal{P}_i \cap (H \cup H^-) \neq \emptyset$. Једини чланови које бисмо добили у суми са другим условом, а не појављују се у почетној суми, одговарају оним полиедрима $\mathcal{P}_i$ који секу и H^+ и H.
Довољно би било доказати да је сума коефицијената уз такве полиедре једнака нули. И заиста, постоји неко $\varepsilon > 0$ довољно мало тако да хиперраван $H_\varepsilon = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 1 + \varepsilon\}$ сече баш оне полиедре који секу истовремено H и H^+. Онда је по пређашној дискусији $\sum_{\mathcal{P}_i \text{ сече } H_\varepsilon} \lambda_i = 0$.
Сада ћемо доказати да

$$\sum_{\mathcal{P}_i \cap (H \cup H^-) \neq \emptyset} \lambda_i = 0.$$

Уместо сваког $\mathcal{P}_i$ посматраћемо $\mathcal{P}_i' = \mathcal{P}_i \cap (H \cup H^-)$. Сада наставља да важи $\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{P}_i'} = 0$, а у тој суми су индикаторске функције полиедара који не секу $(H \cup H^-)$ једнаки нули свуда. Онда преостаје да је збир коефицијената уз све оне полиедре који секу $(H \cup H^-)$ такође једнак нули, што смо и тражили. □

5

Брионова теорема

Надаље, сви полиедри које разматрамо биће целобројни, тј. имаће целобројна темена. Пре него што уведемо Брионову теорему, треба дефинисати нотацију којом ће она бити изражена, и то пре свега трансформацију ИПТ[1]. Основна идеја ИПТ-а је да свакој тачки $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ доделимо моном облика $z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_d^{a_d}$, где су $z_1, \dots, z_d$ променљиве. Тако ћемо произвољном полиедру доделити збир монома придружених целобројним тачкама које се налазе унутар њега. Уместо $z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_n^{a_n}$, писаћемо $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{a}}$.

5.1 ИПТ полиедра

Дефиниција 5.1. За полиедар $\mathcal{P}$, дефинишемо његову *ИПТ трансформацију* као функцију $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ за коју важи $\sigma_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{a}}$.
Пажљиви читалац ће сада сигурно приметити да сума у дефиницији може бити бесконачна. Ако имамо сабирање бесконачног броја монома, то значи да $\sigma_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{z})$ није полином. Још горе, може се десити да сума не конвергира аналитички ни за један избор $\boldsymbol{z}$. Међутим, наставићемо да радимо са овим сумама као формалним редовима, које можемо сабирати и одузимати, множити полиномима. За детаљније и формалније образложење, погледати апендикс Б.
Међутим, у случају да је полиедар коначан, $\sigma_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{z})$ нам даје пуно информација о $\mathcal{P}$. Простим убацивањем $\boldsymbol{z} = (1, 1, ..., 1)$ добијамо број целобројних тачака у полиедру. Ову везу ћемо касније искористити да повежемо ИПТ полиедра и његов Ерхартов полином.

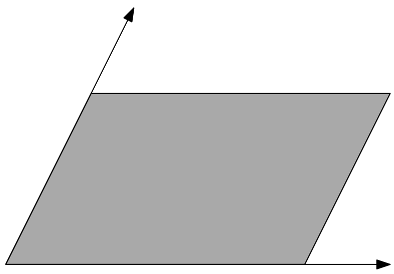
[1] Ова трансформација се под сличном скраћеницом среће и у страној литератури, јер ИПТ потиче од *integer point transform*.

5.2 Тангентне купе

Дефиниција 5.2. Нека је дата страна $\mathcal{F}$ полиедра $\mathcal{P}$. *Тангентну купу* над страном $\mathcal{F}$ полиедра $\mathcal{P}$ дефинишемо као

$$T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) = \{\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{P}, \lambda \in \mathbb{R}_0^+\}.$$

На први поглед, можда и није очигледно да $T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ заиста јесте купа.



Слика 5.1

Лема 5.1. Ако су $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ темена политопа $\mathcal{P}$, а $\boldsymbol{g}$ тежиште стране $\mathcal{F}$ (или било која друга њена унутрашња тачка), онда је $T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ купа са теменом у $\boldsymbol{g}$ и генераторима $\{\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{g}\}$.

Доказ. Ово није тешко доказати јер се за било коју тачку $\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ купе $T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$, разлика $\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}$ може представити као конвексна комбинација вектора $\{\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{g}\}$, а $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ се могу приказати као конвексне комбинације $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$. Нека су $\boldsymbol{x} = \sum_i \eta_i \boldsymbol{v}_i, y = \sum_i \zeta_i \boldsymbol{v}_i$, где је $\sum_i \eta_i = \sum_i \zeta_i = 1$ и $\eta_i, \zeta_i \in \mathbb{R}_0^+$. Онда имамо да је $\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g} = \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}) + (1 - \lambda)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}) = \lambda \sum_i \eta_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{g}) + (1 - \lambda) \sum_i \zeta_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{g})$. □

Иако ће следеће тврђење изгледати скоро тривијално, видећемо да ће нам бити од кључног значаја када касније будемо анализирали тангентне купе.

Лема 5.2. Ако је $\mathcal{F}$ страна полиедра $\mathcal{P}$, имамо да $\operatorname{aff} \mathcal{F} \subset T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$.

Доказ. За $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}$, имамо да $\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ пролази кроз цео $\operatorname{aff} \mathcal{F}$. □

Заправо, $T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ је најмања купа која садржи $\operatorname{aff} \mathcal{F}$ и $\mathcal{P}$.

5.3 ИПТ тангентних купа

У овом поглављу за задатак ћемо имати да сазнамо више о ИПТ-овима тангентних купа полиедра $\mathcal{P}$. Ако $\mathcal{P}$ има целобројна темена онда ће и све његове тангентне купе бити целобројно дефинисане. Међутим, тангентне купе страна позитивне димензије имаће ИПТ једнак нули. Ово тврђење звучи прилично невероватно самом чињеницом да сабирамо бесконачно сабирака и да добијамо резултат једнак нули. Зато ћемо прво доказати простији идентитет: $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x^i = 0$.

Иако нећемо улазити у детаље из апендикса Б, битно је појаснити шта тачно овде радимо. Идеја је да сваком степеном реду придружимо једну рационалну функцију. Ово смо већ радили кад смо сумирали редове попут $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$. Оно што тражимо је заправо линеарно пресликавање између степених редова и рационалних функција. Конкретно, ово значи да када саберемо две рационалне функције придружене двама редовима добићемо рационалну функцију придружену збиру тих редова.

Ако посматрамо рационалну функцију придружену степеном реду $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x^i$ имамо

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x^i = \sum_{i=-\infty}^{-1} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 0.$$

Другачији начин да се иста ствар докаже је $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x^i = R(x)$, одакле имамо $R(x) = xR(x)$, односно $(1-x)R(x) = 0$. Онда мора бити $R(x) = 0$.

Узмимо сада целобројну купу $\mathcal{K}$ која садржи праву p. То значи да када транслирамо $\mathcal{K}$ по тој правој за неки вектор $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^n$ купа остаје иста, тј. $\mathcal{K} = \mathcal{K} + \boldsymbol{v}$ (ако $\boldsymbol{v}$ има исти правац као p). Наравно, важи онда и $\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z}) = \sigma_{\mathcal{K}+\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{z}) = \sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{v}}$, па је $\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z}) = 0$.

Када претходни пасус применимо на купу $T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$, где је $\dim \mathcal{F} \geq 1$, добијамо да $T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ садржи праву по леми 5.2, а одатле имамо да је $\sigma_{T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})}(\boldsymbol{z}) = 0$.

5.4 Брионова теорема

Теорема 5.1. (Брион) Нека је дат полиедар $\mathcal{P}$, са скупом темена V. Тада важи:

$$\sigma_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{v} \in V} \sigma_{T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{z}).$$

Дакле, ИПТ једног, могуће коначног, полиедра можемо представити као збир ИПТ-ова неколико бесконачних купи. Чак и више, ИПТ целог полиедра је представљив локалним доприносима, тј. сабрицима који су везани само за темена.

Идеја доказа Брионове теореме који ћемо овде приказати јесте да бесконачне купе поларном трансформацијом пренесемо у коначне објекте с којима је лакше радити. Ова трансформација заснива се на чињеници да се поларизацијом објеката не губи једнакост индикаторских функција (на основу леме 4.1), а самим тим ни једнакост ИПТ-ова.

Доказ Брионове теореме. За почетак, транслираћемо $\mathcal{P}$ тако да $\mathbf{0} \in \mathcal{P}$. Сада ћемо одредити фигуре поларне тангентним купама. Дефинисаћемо $\boldsymbol{v}^\diamond = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{P}^\vee \mid \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y} = 1\}$ (ово је дефиниција из леме 3.7). Како је $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y} \le 1$ кадгод $\boldsymbol{y} \in \mathcal{P}^\vee$, закључујемо да је $\boldsymbol{v}^\diamond$ страна полиедра $\mathcal{P}^\vee$.

Лема 5.3. $T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})^\vee = \operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \boldsymbol{v}^\diamond\}$

Доказ леме. Напишимо израз за $\boldsymbol{y} \in T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})^\vee$:

$$(\boldsymbol{v} + \lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}))\cdot\boldsymbol{y} \le 1.$$

Ово је линеарна функција по λ, а неједнакост мора бити задовољена за $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, \lambda \in \mathbb{R}_0^+$. Напишимо ову неједнакост у згоднијем облику:

$$\lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y} \le 1.$$

Закључујемо да мора бити $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{y} \le 0$ (ово добијамо када пустимо $\lambda \to \infty$) и $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y} \le 1$(ово добијамо када је $\lambda = 0$). Заправо, ова два услова су довољна да неједнакост увек важи. Даље је ово еквивалентно са $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y} \le 1$ за све $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$. Из претходне једначине, јасно је да $\boldsymbol{y} \in \mathcal{P}^\vee$.

Сада ћемо узети $\boldsymbol{y}' = \mu\boldsymbol{y}$ такво да $\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{v} = 1$, $\mu > 1$. И даље имамо $\boldsymbol{y}' \in \mathcal{P}^\vee$, али добијамо и $\boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{v}^\diamond$, из дефиниције $\boldsymbol{v}^\diamond$. Дакле, $\boldsymbol{y} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{y}' \in \operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \boldsymbol{v}^\diamond\}$. С друге стране, јасно је да је свака од претходних операција инвертибилна, тј. да свако $\boldsymbol{y} \in \operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \boldsymbol{v}^\diamond\}$ можемо добити овако, па имамо тражену једнакост. □

Овде ваља напоменути да је $\boldsymbol{v}^\diamond$ заправо фацет полиедра $\mathcal{P}^\vee$.[2] При томе, важи и да за сваки фацет F полиедра $\mathcal{P}^\vee$ постоји теме $\boldsymbol{v}$ полидера $\mathcal{P}$ такво да $F = v^\diamond$. Дакле, постоји бијекција између темена полиедра $\mathcal{P}$ и фацета полиедра $\mathcal{P}^\vee$.

Сада видимо да је $T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})^\vee$ заправо пирамида над фацетом полиедра $\mathcal{P}^\vee$ са врхом у нули. Тврђење које ћемо у наставку користити јесте да се полиедар $\mathcal{P}^\vee$ може разложити на збир индикаторских функција облика $\operatorname{conv}\{\mathbf{0}, v^\diamond\}$, при

[2] Ово је тачно јер постоји d линеарно независних линеарних функција облика $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ које се максимизују баш у $\boldsymbol{v}$, а $\operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \boldsymbol{v}^\diamond\}$ садржи управо оне функције које се максимизују у $\boldsymbol{v}$, па закључујемо да је $\dim\operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \boldsymbol{v}^\diamond\} = d$, тј. $\dim \boldsymbol{v}^\diamond = d - 1$.

чему ће се неки $(d-1)$-димензиони региони (пресеци горе описаних пирамида) могуће бројати више пута. Одузећемо све пирамиде мање димензије да добијемо идентитет

$$\mathbf{1}_{\mathcal{P}^\vee} = \sum_{\boldsymbol{v}\in V} \mathbf{1}_{\mathrm{conv}\{\mathbf{0},v^\diamond\}} \pm \text{полиедри нижих димензија.}^3$$

Када поларизујемо претходну једначину имамо

$$\mathbf{1}_{\mathcal{P}} = \sum_{\boldsymbol{v}\in V} \mathbf{1}_{T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})} \pm \text{полари полиедара нижих димензија.}$$

Сада можемо узети ИПТ обе стране да добијемо

$$\sigma_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{v}\in V} \sigma_{T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})} \pm \text{ИПТ полара полиедара нижих димензија.}$$

Сада нам остаје да покажемо да је ИПТ полара полиедара нижих димензија једнак нули. Заправо, показаћемо да свака од полара тих полиедара јесте купа која садржи праву. Посматрајмо неки целобројни полиедар $\mathcal{Q}$ димензије мање од d. Тада он лежи у некој хиперравни одређеној целобројним вектором нормале $\boldsymbol{a}$. Ако тачка $\boldsymbol{y}$ припада полару $\mathcal{Q}^\vee$, онда имамо и $\boldsymbol{y}+\lambda\boldsymbol{a} \in \mathcal{Q}^\vee$, јер је $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}+\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{x}$ за све $\boldsymbol{x}\in\mathcal{Q}$. Дакле, $\mathcal{Q}^\vee$ има структуру полиедра који је транслиран по једној правој. Али онда се наше резоновање из дела 6.2 примењује и лако добијамо $\sigma_{\mathcal{Q}^\vee} = 0$. Дакле, израз за $\sigma_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{z})$ постаје:

$$\sigma_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{v}\in V} \sigma_{T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{z}).$$

□

Релација којом смо изразили $\mathbf{1}_{\mathcal{P}}$ преко $\mathbf{1}_{T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}$ може се записати и у егзактнијој форми, тачно описујући полиедре нижих димензија. Та формула зове се *Бријаншон–Грамова.*

Теорема 5.4.1. (Бријаншон–Грам) Ако је $F(\mathcal{P})$ скуп страна политопа $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^d$, онда имамо следећу формулу:

$$\mathbf{1}_{\mathcal{P}} = \sum_{\mathcal{F}\in F(\mathcal{P})} (-1)^{\mathrm{codim}(\mathcal{F})} \mathbf{1}_{T_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})}. \tag{5.1}$$

Нажалост, доказ ове формуле далеко је ван домашаја овог рада јер користи напредна својства Ојлерове карактеристике. Заинтересованог читаоца упућујемо на књигу [1].

[3] Полиедри који се овде помињу заправо су сви пирамиде с теменом у нули, али то није кључно за наш доказ.

6

Ерхартови полиноми

У овом поглављу ћемо извести чувену Ерхартову теорему, која описује број целобројних тачака у целобројним полиедрима.
Нека је $\mathcal{P}$ ограничени полиедар са целобројним теменима. Дефинишемо његову t-дилатацију $t\mathcal{P}$ као његову слику при хомотетији са коефицијентом t и центром у $\mathbf{0}$. Формалније, $t\mathcal{P} = \{t\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}\}$. Приметићемо да за $t \in \mathbb{Z}$, полиедар $t\mathcal{P}$ има целобројна темена.

Дефиниција 6.1. Нека је $\mathcal{P}$ полиедар са целобројним теменима. Онда дефинишемо $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ као број целобројних тачака које припадају полиедру $\mathcal{P}$[1]. Формалније:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d} 1.$$

Идеја Ерхартове теорије јесте да посматрамо функцију $L_{\mathcal{P}}(t) = \mathcal{L}(t\mathcal{P})$. Она представља број целобројних тачака унутар t-дилатације полиедра $\mathcal{P}$.

Теорема 6.1. (Ерхарт) Ако је $\mathcal{P}$ полиедар са целобројним теменима, онда је $L_{\mathcal{P}}(t)$ полином по t, за $t \in \mathbb{Z}$.

Пре него што приступимо доказу ове теореме, морамо још мало прецизније одредити машинерију ИПТ-а развијену у прошлом поглављу. Конкретније, даћемо начин да се ИПТ тангентних купа експлицитно одреде.

6.1 Основни паралелепипед купе

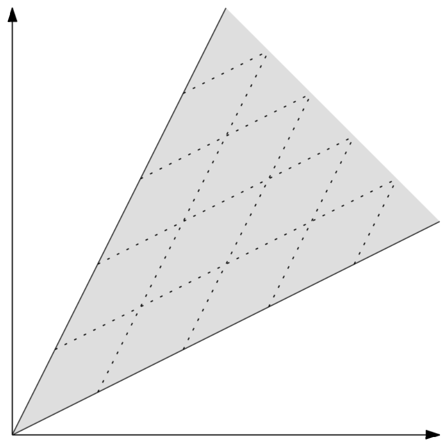
Дефиниција 6.2. За купу са линеарно независним генераторима кажемо да је *симплицијална*.[2]

[1] У $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ бројимо и тачке на граници полиедра.

[2] Пресек овакве купе са било којом хиперравни је или симплицијална купа или симплекс.

Дефиниција 6.3. За симплицијалну купу $\mathcal{K}$ са теменом 0 и генераторима $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_d \in \mathbb{Z}^d$, дефинисаћемо *основни паралелепипед* купе $\mathcal{K}$ као

$$\Pi = \{\lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{w}_n \mid \lambda_i \in [0,1)\}.$$



Слика 6.1

Транслацијама паралелепипеда Π може се без преклапања поплочати цела купа $\mathcal{K}$. Наиме, за тачку $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$, имамо $\boldsymbol{x} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{w}_i = \sum_i \lfloor \lambda_i \rfloor \boldsymbol{w}_i + \sum_i \{\lambda_i\} w_i$. Прва сума представља линеарну комбинацију генератора $\boldsymbol{w}_i$ са ненегативним целим коефицијентима, тј. вектор за који треба транслирати основни паралелепипед да би му x припадао. С друге стране, друга сума представља ону тачку унутар основног паралелепипеда Π која се слика у $\boldsymbol{x}$ при овој транслацији.

6.2 ИПТ симплицијалних купа

Нека нам је дата симплицијална купа $\mathcal{K}$ са теменом $\boldsymbol{a}$ и генераторима $\{\boldsymbol{g}_i\}$. Ако су генератори целобројни вектори, можемо лако срачунати ИПТ целе купе.

Да бисмо стекли осећај, прво ћемо израчунати ИПТ дводимензионалне купе K са теменом у $(0,0)$ и генераторима $(1,3)$ и $(3,2)$. Идеја је да целу купу поплочамо транслацијама основног паралелограма ове купе. Основни паралелограм Π има темена у $(0,0),(1,3),(4,5)$ и $(3,2)$. За сваку његову транслацију можемо лако израчунати ИПТ јер $\sigma_{\Pi+\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{v}} \sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z})$, за $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^n$. Дакле написаћемо $\mathcal{K}$ као унију транслација Π, тј.

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i,j=0}^{\infty} (\Pi + i(3,1) + j(2,3)).$$

Како се свака целобројна тачка појављује тачно једном и са леве и са десне стране горње једначине, имамо једнакост ИПТ-ова:

$$\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \sigma_{\Pi+i(3,1)+j(2,3)}(\boldsymbol{z}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z}) z_1^{3i+2j} z_2^{i+3j} =$$

$$\sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z}) \sum_{i=0}^{\infty} (z_1^3 z_2)^i \sum_{j=0}^{\infty} (z_1^2 z_2^3)^j = \sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z}) \frac{1}{1 - z_1^3 z_2} \cdot \frac{1}{1 - z_1^2 z_2^3}.$$

Дакле, да бисмо срачунали $\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z})$, која је бесконачна сума, довољно је само да израчунамо $\sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z})$, што је једна коначна сума.

И у вишим димензијама, слична идеја и рачун ће довести до формуле $\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z}) = \frac{\sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z})}{\prod_i (1 - \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{g}_i})}$. Формалније, написаћемо

$$\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k=0}^{\infty} \sigma_{\Pi+\sum_i \lambda_i \boldsymbol{g}_i}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k=0}^{\infty} \sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z}) \boldsymbol{z}^{\sum_i \lambda_i \boldsymbol{g}_i} =$$

$$\sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z}) \prod_{i=1}^{k} \sum_{\lambda_i=0}^{\infty} \boldsymbol{z}^{\lambda_i \boldsymbol{g}_i} = \sigma_{\Pi}(\boldsymbol{z}) \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{g}_i}}.$$

6.3 Триангулације тангентних купа

У циљу да искористимо једноставне формуле за ИПТ симплицијалне купе које смо малопре добили, разложићемо сваку купу на унију симплицијалних купа. Посматрајмо купу $\mathcal{K}$ која, без умањења општости, има врх у $\mathbf{0}$. Она у пресеку с неком рационалном хиперравни[3] формира полиедар са рационалним теменима. Дилатацијом таквог полиедра, можемо добити полиедар $\mathcal{P}$ са целобројним теменима.

По теореми из апендикса B, $\mathcal{P}$ можемо поделити на симплексе $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_n$ са теменима из $\operatorname{vert} \mathcal{P}$, при чему важи да су пресеци тих симплекса управо њихове стране (које су такође симплекси). Сада, сваки од $\mathcal{Q}_i$ дефинише симплицијалну

[3] Хиперраван је *рационална* ако је одређена са $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = b$, где су $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}^d, b \in \mathbb{Q}$.

купу са врхом у $\mathbf{0}$ на следећи начин: ако су $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_d$ темена овог симплекса, имамо да је симплицијална купа $\mathcal{K}_i$ купа са врхом у $\mathbf{0}$ која се генерише управо векторима $\boldsymbol{v}_i$. Ови вектори јесу линеарно независни јер је $\mathcal{Q}_i$ симплекс. Приметићемо да је унија купа $\mathcal{K}_i$ управо $\mathcal{K}$.
Сада можемо представити $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ као збир $\mathbf{1}_{\mathcal{K}_i}$ по принципу укључења и искључења:

$$\mathbf{1}_{\mathcal{K}} = \sum_i \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i} - \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j} + \cdots$$

Занимљиво је приметити да је пресек две симплицијалне купе са истим теменом и даље симплицијална купа, јер је пресек свака два симплекса $\mathcal{Q}_i$ и даље симплицијална купа. Наравно, ово важи и за пресеке коначно много симплицијалних купа. Стога, функцију $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ можемо представити као збир индикаторских функција симплицијалних купа. Онда је $\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z})$ такође збир ИПТ-ова симплицијалних купа, па закључујемо да је $\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z})$ рационална функција по $\boldsymbol{z}$, за сваку купу $\mathcal{K}$.

6.4 Доказ Ерхартове теореме

Доказ. Број целобројних тачака у полиедру можемо изразити као вредност његовог ИПТ-а у $\boldsymbol{z} = \mathbf{1}$. Међутим, ИПТ политопа можемо изразити као збир коначно много рационалних функција што ће нам дати добру контролу над целим изразом. Имамо:

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \mathcal{L}(t\mathcal{P}) = \sigma_{t\mathcal{P}}(\mathbf{1}) = \sum_v \sigma_{T_{t\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}(\mathbf{1}).$$

Сада ћемо срачунати $\sigma_{T_{t\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}(\mathbf{1})$. Имамо:

$$\begin{aligned} T_{t\mathcal{P}}(\boldsymbol{v}) = t\{\boldsymbol{v} + \lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{w}_n \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0\} = \\ \{t\boldsymbol{v} + t\lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + t\lambda_n \boldsymbol{w}_n \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ако сада уведемо смену $\mu_i = t\lambda_i$, једначина постаје:

$$\begin{aligned} T_{t\mathcal{P}}(\boldsymbol{v}) = \{t\boldsymbol{v} + \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{w}_n \mid \mu_1, ..., \mu_n \geq 0\} = \\ (t-1)\boldsymbol{v} + \{\boldsymbol{v} + \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{w}_n \mid \mu_1, ..., \mu_n \geq 0\} = \\ (t-1)\boldsymbol{v} + T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

Ова једнакост имплицира и једнакост ИПТ-ова:

$$\sigma_{T_{t\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^{(t-1)\boldsymbol{v}} \sigma_{T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}(z).$$

Ако се вратимо на једнакост $L_{\mathcal{P}}(t) = \sum_v \sigma_{T_{t\mathcal{P}(\boldsymbol{v})}}(\mathbf{1})$, видимо да заправо нема смисла убацити $\boldsymbol{z} = \mathbf{1}$ у функције $\sigma_{T_{t\mathcal{P}(\boldsymbol{v})}}(\boldsymbol{z})$, јер оне могу бити недефинисане у тој тачки (може се десити да делимо нулом). Онда ћемо уместо израза $\sum_v \sigma_{T_{t\mathcal{P}(\boldsymbol{v})}}(\mathbf{1})$ посматрати граничну вредност те функције када $\boldsymbol{z} \to \mathbf{1}$. Сада имамо идентитет:

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \lim_{\boldsymbol{z}\to\mathbf{1}} \sum_v \sigma_{T_{t\mathcal{P}(\boldsymbol{v})}}(\boldsymbol{z}) = \lim_{\boldsymbol{z}\to\mathbf{1}} \sum_v \boldsymbol{z}^{(t-1)\boldsymbol{v}} \sigma_{T_{\mathcal{P}(\boldsymbol{v})}}(\boldsymbol{z}).$$

Да бисмо срачунали крајњи израз користићемо Лопиталово правило. Наиме, можемо све рационалне функције свести на заједнички именилац. Онда ћемо узимати извод и имениоца и бројиоца све док бројилац има вредност 0 у $\boldsymbol{z} = \mathbf{1}$. Приметимо да све време знамо да ова гранична вредност постоји, јер знамо да је једнака броју $L_{\mathcal{P}}(t)$. У овом процесу узимања извода, чланове облика $\boldsymbol{z}^t$ имамо само у бројиоцу, па ћемо сваки пут кад узмемо извод бројиоца добити чланове који се множе са t само у бројиоцу, па стога имамо да је оно што нам остане на крају полином по t. □

Сада ћемо поступак описан у доказу претходне теореме применити да одредимо Ерхартов полином хиперкоцке $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$. Прво ћемо одредити ИПТ-ове њених тангентних купа.
Како је $\mathcal{C}$ хиперкоцка, све ивице из датог темена $\boldsymbol{v}$ имају правац координатних оса. Смер ивица, тј. генератора тангентне купе у правцу координатне осе x_i зависи само од $\boldsymbol{v}_i$: ако је $\boldsymbol{v}_i = 0$, онда је смер од $x_i = 0$ ка позитивним бројевима, а иначе је смер од $x_i = 1$ ка негативним бројевима. Зато имамо следећи израз за ИПТ тангентне купе:

$$\sigma_{T_{\mathcal{P}(\boldsymbol{v})}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d\cap T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{w}} = \sum_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d\cap T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})} \prod_i z_i^{w_i} = \prod_i \sum_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d\cap T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})} z_i^{w_i}.$$

Сада сваку од сума које су чиниоци у овом производу можемо независно израчунати. Ако је $\boldsymbol{v}_i = 0$, онда одговарајућа сума има облик $z_i^0 + z_i^1 + z_i^2 + \cdots = \frac{1}{1-z_i}$. Ако је ипак $\boldsymbol{v}_i = 1$, онда сума износи $z_i^1 + z_i^0 + z_i^{-1} + \cdots = z_i \frac{1}{1-z_i^{-1}} = \frac{-z_i^2}{1-z_i}$. Сада ћемо ове изразе убацити да добијемо коначан израз за ИПТ тангентне купе:

$$\sigma_{T_{\mathcal{P}(\boldsymbol{v})}}(\boldsymbol{z}) = \prod_{\boldsymbol{v}_i=0} \frac{1}{1-z_i} \prod_{\boldsymbol{v}_i=1} \frac{-z_i^2}{1-z_i} = \prod_i \frac{1}{1-z_i} \prod_{\boldsymbol{v}_i=1} (-z_i^2).$$

Време је да израчунамо $L_{\mathcal{P}}(t)$, по формули из доказа претходне теореме:

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{1}} \sum_{v} \boldsymbol{z}^{(t-1)\boldsymbol{v}} \sigma_{T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{z}) = \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{1}} \sum_{v} \prod_{i} \frac{1}{1-z_i} \boldsymbol{z}^{(t-1)\boldsymbol{v}} \prod_{\boldsymbol{v}_i=1} (-z_i^2).$$

Ако искористимо да је $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{v}} = \prod_{\boldsymbol{v}_i=1} z_i$, онда се претходна формула своди на:

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{1}} \prod_{i} \frac{1}{1-z_i} \sum_{v} \prod_{\boldsymbol{v}_i=1} (-z_i^{t+1}).$$

Применићемо Лопиталово правило тако што ћемо по једном диференцирати по сваком z_i и бројилац и именилац. Ово смемо да урадимо јер знамо да је $L_{\mathcal{P}}(t)$ коначан, па тражени лимес увек постоји. Неопходно је диференцирати по сваком i јер $1 - z_i$ фигурише у имениоцу за све i. Само један члан суме у бројиоцу неће бити нула након диференцијације по сваком z_i: то је управо онај члан који садржи све z_i. Његов извод биће $(t+1)(-z_1^t)\cdots(t+1)(-z_d^t) = (-1)^d(t+1)^d \prod_i z_i^t$. Извод имениоца биће $(-1)^d$, па је коначно тражени лимес $L_{\mathcal{P}}(t) = (t+1)^d$.

Наравно, до овог резултата може се доћи на много различитих начина, али сматрамо да је ово врло илустративна примена ИПТ-а.

7

Закључак

Теореме представљене у овом раду налазе своју примену у како у теорији политопа, тако и шире. Један од начина на које се овде развијена теорија примењује дат је у поглављу 6, где смо доказали Ерхартову теорему и одредили Ерхартов полином хиперкоцке прилично лако користећи генераторне функције.

Независно од Брионове теореме, постоји и другачији начин да се идеја ИПТ-а примени у доказу Ерхартове теореме. Заинтересовани читалац детаље може пронаћи у књизи [3].

На сличан начин као у овом раду могу се извести формуле аналогној Брионовој, на пример формула Лоренса и Варченка. Рад [2] доказује и ову теорему.

На крају, Брионова теорема основ је ефикасног алгоритма за рачунање Ерхартових полинома политопа. Из самог тврђења теореме, имамо представљање целе ИПТ функције политопа као збир локалних доприноса у теменима. Међутим, оно што и даље може представљати препреку за ефикасно рачунање Ерхартовог полинома јесте чињеница да се ИПТ основног паралелепипеда купе може састојати од великог броја монома. Зато се уводи појам унимодуларне купе, као купе чији основни паралелепипед садржи само једну тачку.

Овакво разлагање може се искористити да се ИПТ политопа представи као релативно малог броја рационалних функција. На сличном разматрању заснива се и Барвиноков алгоритам за израчунавање броја целобројних тачака у политопу.

8

Апендикс А – Фурије–Моцкинова теорема

Теорема 8.1. (Фурије–Моцкин) Нека је дат скуп $X \subset \mathbb{R}^d$. Онда је X $\mathcal{H}$-полиедар ако и само ако се може представити у облику $\operatorname{conv} V + \mathcal{K}$, где је V коначан скуп вектора, а $\mathcal{K}$ нека купа. Оне скупове X који се могу тако представити зваћемо полиедрима.

Доказ. Уведимо нотацију коју ћемо користити у доказу: за скуп неједнакости $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} \leq b_i$ писаћемо $A\boldsymbol{x} \leq b_i$, при чему с леве стране имамо множење матрице и вектора, а на векторима дефинишемо релацију $\leq$ ако су све компоненте једног вектора мање или једнаке од одговарајућих компоненти другог вектора. Купу са врхом у $\mathbf{0}$ генерисану скупом вектора $V = \{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ означаваћемо са $\operatorname{cone} V$.

Да бисмо технички упростили доказ, посматраћемо простор $\mathbb{R}^{d+1}$ и у њега, у хиперраван $x_{d+1} = 1$, сместити скуп X. Тада ћемо дефинисати његову *хомогенизацију* као скуп $\operatorname{cone} X$.

Ако је X $\mathcal{H}$-полиедар, онда је $\operatorname{cone} X$ могуће представити у облику $A\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$, а ако је X $\mathcal{V}$-полиедар, онда добијамо да је $\operatorname{cone} X$ заправо обична, коначно генерисана купа, са врхом у $\mathbf{0}$. Ако покажемо да су ова два облика еквивалентна, лако можемо то пренети на обичне полиедре у $\mathbb{R}^d$. Купе настале као хомогенизација $\mathcal{H}$-полиедра зваћемо $\mathcal{H}$-купе, а оне настале хомогенизацијом $\mathcal{V}$-полиедара зваћемо $\mathcal{V}$-купе.

Идеја доказа је следећа: прво ћемо доказати да се свака $\mathcal{V}$-купа може представити и у облику пројекције $\mathcal{H}$-купе из неке више димензије на простор $\mathbb{R}^d$, а затим ћемо показати да је пројекција сваке $\mathcal{H}$-купе и даље $\mathcal{H}$-купа, па одатле налазимо један смер теореме. Други смер теореме добићемо из својства поларности, јер је полар сваког $\mathcal{V}$-полиедра ($\mathcal{V}$-купе) управо $\mathcal{H}$-полиедар ($\mathcal{H}$-купа) и обратно.

Посматрајмо $\mathcal{V}$-купу $\mathcal{K} = \operatorname{cone} V \subset \mathbb{R}^d$. Ако скуп вектора V посматрамо као матрицу са колонама $\boldsymbol{v}_i$, можемо писати $\mathcal{K} = \{\sum_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_0^+\} = \{\boldsymbol{\lambda} V \mid \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\}$, за вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_d)$. Тада је

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \ \exists \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda} V\}.$$

Овако записана, купа $\mathcal{K}$ је пројекција скупа $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{d+n} \mid \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda} Y\}$ на првих d координата. Ову пројекцију можемо постепено добити, тако што редом пројектујемо по само једној координати. Зато ћемо показати да пројекцијом по k-тој координати не губимо $\mathcal{H}$ опис купе.

Лема 8.1. Нека је $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ купа одређена са $A\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$, онда су и $\mathrm{elim}_k(\mathcal{K}) = \{\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{e}_k \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{K}, t \in \mathbb{R}\}$ и $\mathrm{proj}_k(\mathcal{K}) = \mathrm{elim}_k(\mathcal{K}) \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_k = 0\}$ такође $\mathcal{H}$-купе, при чему је $\mathrm{elim}_k(\mathcal{K})$ описана скупом неједнакости $A'\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$, где је

$$A' = \{\boldsymbol{a}_i \mid a_{ik} = 0\} \cup \{a_{ik}\boldsymbol{a}_j + (-a_{jk})\boldsymbol{a}_i \mid a_{ik} > 0, a_{jk} < 0\}.[1]$$

Доказ леме. За почетак, ако са $\mathcal{K}_1$ означимо купу одређену са $A'\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$, јасно је да $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$ јер је свака од неједнакости у A' линеарна комбинација неједнакости из A с позитивним коефицијентима. Како се у неједнакостима из A' k-та координата не појављује, лако имамо и $\mathrm{elim}_k(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}_1$.

Сада остаје да покажемо да ће за све $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}_1$ постојати неко $t \in \mathbb{R}$ такво да $\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{K}$. Посматраћемо ово као систем неједначина по t и одредити када он има решења. Када је $a_{ik} > 0$ имамо неједнакости типа $a_{ik}t \geq \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}$, па је довољно да имамо $t \geq \max_i \frac{1}{a_ik}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}$. Слично, за $a_{jk} < 0$ нам треба $t \leq \min_j \frac{1}{-a_{jk}}\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{x}$. Дакле, ако имамо $\max_i \frac{1}{a_ik}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} \leq \min_j \frac{1}{-a_{jk}}\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{x}$, тражено t постоји. Међутим, овај услов важи очигледно јер $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}_1$. Дакле, за свако $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}_1$ имамо $\boldsymbol{x} \in \mathrm{elim}_k(\mathcal{K})$, па је $\mathrm{elim}_k(\mathcal{K})$ управо одређена са A'.

Како је $\mathrm{elim}_k(\mathcal{K})$ $\mathcal{H}$-купа, онда је то очигледно и $\mathrm{proj}_k(\mathcal{K})$, јер у неједнакостима из A' не фигурише k-та координата. □

На основу претходне леме, имамо да је сваки $\mathcal{V}$-полиедар уједно и $\mathcal{H}$-полиедар. Сада ћемо применом поларности доказати други смер ове теореме.

Потпуно исто као у доказу леме 3.4 имамо да је полар сваког $\mathcal{V}$-полиедра управо $\mathcal{H}$-полиедар. Сада ћемо доказати и обратно, да је полар сваког $\mathcal{H}$-полиедра управо $\mathcal{V}$-полиедар.

Наиме, ако је $\mathcal{P}$ описан неједнакостима $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} \leq 1$, онда ћемо показати да је $\mathcal{P}^\vee = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{a}_i\}$. Јасно је да $\mathrm{conv}\, \boldsymbol{a}_i \subset \mathcal{P}^\vee$ јер

$$\left(\sum_i \lambda_i \boldsymbol{a}_i\right) \cdot \boldsymbol{x} = \sum_i \lambda_i (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x}) \leq \sum_i \lambda_i = 1.$$

[1] Овде је са a_{ik} означена k-та координата i-тог вектора у матрици A.

Остаје још $\mathcal{P}^\vee \subset \operatorname{conv} \boldsymbol{a}_i$. Уместо њега, доказаћемо тврђење $\operatorname{conv}\{\boldsymbol{a}_i\}^\vee \subset \mathcal{P}$, па ћемо по леми 3.5 лако добити и тражено тврђење[2]. Међутим, за све $\boldsymbol{x}$ из $\operatorname{conv} \boldsymbol{a}_i{}^\vee$ важи $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} \leq 1$, па очигледно $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$. Сада, по леми 3.5, имамо $\mathcal{P}^\vee \subset \operatorname{conv} \boldsymbol{a}_i$, па заправо важи $\mathcal{P}^\vee = \operatorname{conv} \boldsymbol{a}_i$. Дакле, полар сваког $\mathcal{H}$-полиедра је $\mathcal{V}$-полиедар.

Узмимо сада произвољан $\mathcal{H}$ полиедар $\mathcal{P}$. Његов полар $\mathcal{P}^\vee$ је $\mathcal{V}$-полиедар, и стога је и $\mathcal{H}$-полиедар. Али, онда је $(\mathcal{P}^\vee)^\vee$ $\mathcal{V}$-полиедар, па је, по леми 3.6 и $\mathcal{P}$ $\mathcal{V}$-полиедар. Овиме смо коначно доказали еквиваленцију између наше две дефиниције полиедра, те их надаље можемо користити упоредо.

$\square$

[2] Овде ваља приметити да користимо $(\operatorname{conv}\{\boldsymbol{a}_i\}^\vee)^\vee = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{a}_i\}$, али то знамо по леми 3.6 јер можемо $\mathcal{P}$ препроцесирати тако да $\mathbf{0} \in \operatorname{conv}\{\boldsymbol{a}_i\}$. Битно је још напоменути да смо лему 3.6 заправо доказали за $\mathcal{H}$-полиедре, али знамо да је сваки $\mathcal{V}$-полиедар истовремено и $\mathcal{H}$-полиедар, па је $\operatorname{conv}\{\boldsymbol{a}_i\}$ $\mathcal{H}$-полиедар.

9

Апендикс Б – Алгебра степених редова

Дефиниција 9.1. *Формалан степени ред* је колекција бројева $a_{\boldsymbol{n}}$, индексираних d-торкама целих бројева $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$. Такав ред записујемо као

$$\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}} = \sum_{(n_1,\ldots,n_d) \in \mathbb{Z}^d} a_{(n_1,\ldots,n_d)} z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}.$$

Ред $\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}$ можемо посматрати као функцију промењљиве $\boldsymbol{z}$ када та сума конвергира. Редове $\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}$ и $\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}$ можемо сабрати да добијемо ред $\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d} (a_{\boldsymbol{n}} + b_{\boldsymbol{n}}) \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}$. Слично, формални степени ред можемо и множити мономом $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{v}}$ да добијемо $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{v}} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{v}}$. Множење формалног степеног реда полиномом дефинисаћемо тако да задовољава дистрибутивни закон и претходну релацију у специјалном случају када је полином којим множимо у ствари моном.

Сада је јасно да сваки $\sigma_{T_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{z})$ представља степени ред који је у сагласности с дефиницијом 8.0.1. Да бисмо могли ове редове да интерпретирамо као рационалне функције, имамо следећу теорему. Нека је зато S векторски простор генерисан редовима облика $\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z})$ где је $\mathcal{K}$ купа, а $\mathbb{R}(\boldsymbol{z})$ векторски простор свих рационалних функција по $z_1, \ldots, z_d$ са реалним коефицијентима.[1]

Теорема 9.0.1. Постоји јединствени хомоморфизам $\varphi : S \to \mathbb{R}(\boldsymbol{z})$ такав да је $\varphi(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{v}}$.[2]

Доказ. Како је φ хомоморфизам, имамо да је $\varphi(f) = f$ за сваки полином $f \in R[\boldsymbol{z}]$.

[1] Оба векторска простора су над пољем реалних полинома.

[2] Пресликавање $\varphi : S \to \mathbb{R}(\boldsymbol{z})$ је хомоморфизам ако чува сабирање и множење мономима и константама у датим скуповима.

Да бисмо описали $\varphi(\sigma_{\mathcal{K}})$, применићемо сличну технику као у поглављу 6. Наиме, индикаторску функцију $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ представићемо као $\sum_i \pm\mathbf{1}_{\mathcal{K}_i}$, где су $\mathcal{K}_i$ симплицијалне купе. Онда ће важити $\varphi(\sigma_{\mathcal{K}}) = \sum_i \pm\mathbf{1}_{\mathcal{K}_i}$.

Када је $\mathcal{K}_i$ симплицијална купа генерисана са $\boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_d$, лако се показује да важи $(1 - \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{w}_1}) \cdots (1 - \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{w}_d})\varphi(\sigma_{\mathcal{K}_i}(\boldsymbol{z})) = \sigma_{\Pi_i}(\boldsymbol{z})$.

Сумирајући ове идентитете по свим купама K_i, добијамо идентитет облика $g(\boldsymbol{z})\varphi(\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z})) = f(\boldsymbol{z})$. Онда дефинишемо $\varphi(\sigma_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{z})) = \frac{f(\boldsymbol{z})}{g(\boldsymbol{z})} \in \mathbb{R}(\boldsymbol{z})$. Оваква функција ϕ може се линеарно проширити на цео скуп S. φ јесте јединствена јер је јединствено дефинисана на симплицијалним купама, а након тога се само линеарно проширује на цео скуп. □

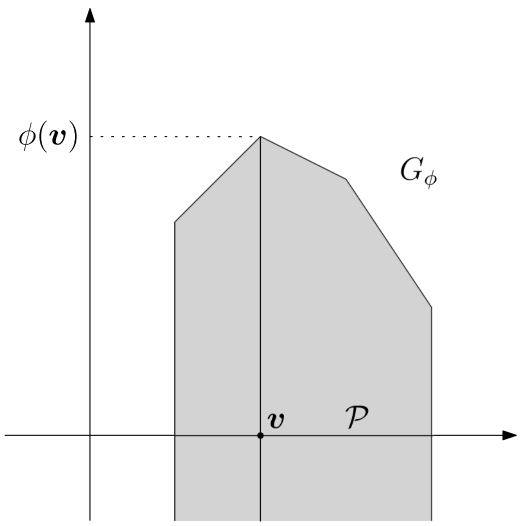
Када бисмо раније у овом раду „рачунали” или „сумирали” неки степени ред, ми бисмо заправо примењивали φ на њега да бисмо добили рационалну функцију којој је он еквивалентан. Вреди приметити да се при овом пресликавању све купе које садрже праву сликају у 0.

10

Апендикс В – Триангулације полиедара

Теорема 10.0.1. Нека је дат коначан полиедар $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^d$. Тада постоје симплекси $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, ..., \mathcal{Q}_n$ такви да су њихова темена из $\operatorname{vert}\mathcal{P}$, и такви да је пресек било која два симплекса страна оба симплекса.

Доказ. Посматраћемо произвољну функцију $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Полиедар $\mathcal{P}$ посматраћемо као да се налази у хипперравни $x_{d+1} = 0$ простора $\mathbb{R}^{d+1}$. Сваком темену $\boldsymbol{v}$ полиедра $\mathcal{P}$ придружићемо полуправу $A_{\boldsymbol{v}} = \{(\boldsymbol{v}, x) \mid x \leq \phi(\boldsymbol{v})\}$, и посматраћемо G_ϕ, конвексни омотач свих тих правих. Овако смо дефинисали полиедар G_ϕ који када пројектујемо на хиперраван $x_{d+1} = 0$ добијамо $\mathcal{P}$.



Слика 10.1

Сада, G_ϕ има коначне и бесконаче стране, при чему ћемо се ми фокусирати на оне коначне. Коначне стране су управо оне које чине горњи део границе полиедра G_ϕ. Ако су све те стране симплекси, онда ћемо, када их пројектујемо на $\mathcal{P}$ управо добити поделу $\mathcal{P}$ на симплексе. Довољан услов да ниједна од коначних страна G_ϕ не буде симплекс јесте да сваких $k+1$ темена G_ϕ буду линеарно независни[1].

Приметићемо да су темена G_ϕ управо тачке $(\boldsymbol{v}, \phi(\boldsymbol{v}))$, где су $\boldsymbol{v}$ темена $\mathcal{P}$. Услов линеарне зависности за неких $k+1$ темена гласи:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \phi(\boldsymbol{v}_1) \\ \boldsymbol{v}_2 & \phi(\boldsymbol{v}_1) \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{v}_{k+1} & \phi(\boldsymbol{v}_1) \end{vmatrix} = 0$$

Међутим, овакав услов јесте линеаран услов по ϕ, тј. услов да ϕ не припада некој хиперравни у простору функција. Како бисмо прецизније дефинисали простор функција као векторски простор, можемо посматрати простор полинома ограниченог степена, тј. векторски простор генерисан мономима $\{1, x, x^2, ..., x^{N-1}\}$. Димензија овог простора је N. За довољно велико N, знамо да постоји функција ϕ овог простора за коју ниједан од $\binom{n}{k+1}$ линеарних услова не важи, па имамо да је свака ограничена страна G_ϕ заправо симплекс. Сада пројектовањем ових страна на хиперраван $x_{d+1} = 0$ добијамо тражену поделу $\mathcal{P}$ на симплексе. $\square$

[1] Овде су симплекси димензије $\leq k-1$, јер су на странама G_ϕ, па садрже $\leq k$ темена.

Литература

[1] A. Barvinok, *A course in convexity*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2002.

[2] M. Beck, C. Haase, F. Sottile *Theorems of Brion, Lawrence, and Varchenko on rational generating functions for cones*, Math. Intelligencer 31 (2009), no. 1, 9–17, arXiv:math/0506466v4 , 2009.

[3] M. Beck, S. Robins *Computing the Continuous Discretely*, Springer–Verlag, 2009.

[4] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Springer–Verlag, 1994.

[5] G. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, 1995.