Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

ИЗ АНАЛИЗЕ СА АЛГЕБРОМ

БОЈЕЊЕ ГРАФОВА

Ученик	Ментор
Бојана Јевтић, 4д	Др Соња Чукић

Београд, јун 2011. године

Садржај

Увод

Основне заслуге за оснивање теорије графова као посебне математичке дисциплине, приписијумо швајцарском математичару Леонарду Ојлеру. Њему су током боравка у Кенингсбергу мештани поставили проблем да пређе преко свих седам мостова (који спајају обале реке Прегел међусобно, и са два острва), тако да преко сваког моста пређе тачно једном. Ојлер је рекао да је тако нешто немогуће. Године 1735, Ојлер је презентовао свој рад на овом проблему Санкт-Петерсбургшкој академији наука доказујући да је такав обилазак немогућ, уз напомену да се његов метод може проширити на произвољан распоред острва и мостова. Тачније, Ојлер је само формулисао потребне и довољне услове да такав обилазак постоји, али није сматрао да је потребно да покаже довољне услове у општем случају. Први потпуно коректан доказ овог тврђења је дао Хирхолцер (немачки математичар). Ојлер је 1736. године написао чланак Проблем кенингсбершких мостова (и стога се та година узима као година оснивања теорије графова) и он је први пут објављен 1741. године, али је тада пробудио мало интереса међу осталим математичарима. Овај проблем и резултат су остали мало познати до краја 19. века, када су га енглески математичари Лукас и Бол укључили у своје књиге о рекреативној математици. Појам Ојлеровог графа за граф који се може нацртати без подизања оловке са папира се убрзо одомаћио, захваљујући Кенигу, који га је искористио у својој пионирској књизи о теорији графова (1936. године).

Теорија графова се полако развијала. Многи математичари су дали свој допринос. Обимнији развој теорије графова је био вођен и инспирисан проблемом четири боје, који је годинама био нерешен.

Проблем четири боје тврди да се свака географска карта може обојити са четири боје тако да свака држава буде обојена једном од боја и да суседне државе не буду обојене истом бојом. Под суседним државама се подразумевају државе које имају заједничку граничну линију. Такође, сматра се да је свака држава састављена из једног дела. Овај проблем се односу не само на стварне геогарфске карте, него и за сваку карту која се може замислити, тј. треба га показати за произвољну карту.

Овај проблем су решили Кенет Апел и Волфганг Хекен 1976. године замршеном компјутерском анализом која је садржала анализу 1936 основних конфигурација. Њихов доказ је веома дуг и компликован и ослања се на теоријске резултате низа математичара претходника као и на значајан рад рачунара. Тада је утрошено око 1200 сати (око 50 дана) рачунарског времена.

Историјат проблема

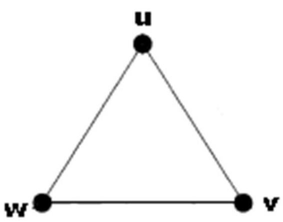
Енглески математичар Франсис Гутри је 1852. године, бојећи на карти енглеске грофовије, уочио да му за то није потребно више од четири боје. Запитао се јесу ли четири боје довољне за сваку карту и ако јесу, шта је узрок томе, али није могао доћи до решења. Послао је своје белешке млађем брату Фредерику који их је даље проследио свом професору Августу Деморгану. Пошто професор није знао одговор, саопштио је проблем Вилијаму Хамилтону код кога је проблем остао незапажен све до 1878. године, када је научна заједница упозната са проблемом четири боје, кроз саопштење Артура Кејлија на састанку Лондонског друштва математичара. Следеће, 1879. године, Кејли је формулисао проблем у првој свесци Радова краљевског друштва географа. Убрзо након тога је британски адвокат (и аматер математичар) Алфред Кемп дао доказ који није довођен у питање више од деценије. Ипак, 1890. године, британски математичар Хитвуд је пронашао грешку у Кемповом раду. Кемпов "доказ" је свакао најпознатији, али није једини. У литератури се у последњих стотинак година појавило више "доказа" који су се одмах или након неког времена показали нетачним. Овај доказ је битан јер се његовом прерадом показује слабије тврђење, проблем пет боја (да се свака карта може обојити са пет боја). Развој проблема четири боје је текао веома споро, а 1976. године је проблем коначно решен.

Решавање проблема четири боје после толико времена од поставке самог проблема је означило прекретницу у историји теорије графова. Тема је доживела експлозивни раст, захваљујући (у великој мери) својој улози основне структуре које лежи у основи савремене примењене математике. Информатика и комбинаторна оптимизација су се посебно ослониле на доприносе теорије графова. Штавише, у свету где је комуникација од примарног значаја, свестраност чини графове неопходним алатима за дизајн и анализу комуникационих мрежа. Главни разлог за овако велики распон примена лежи у јасној геометријској представи коју граф садржи и која је блиска интуитивној представи коју човек има о особинама и понашању објеката који га окружују. Теорија графова је постала позната и призната математичка дисциплина која је нашла примене и у хемији, лингвистици, генетици, електротехници, географији, архитектури, и многим другим областима које чак на први поглед немају никакве везе са математиком.

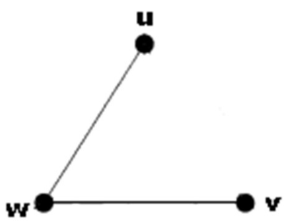
1. Основни појмови теорије графова

Графови су математички објекти које веома често срећемо у свакодневном животу. Ако посматрамо неку географску мапу са мноштвом градова који су повезани путевима, добијамо један граф. У скупу људи на неком месту неки се међусобно познају, а неки не - ако све људе представимо тачкама, а само оне који се познају спојимо линијама, добићемо један граф, који нам даје добру слику познанстава међу људима на том месту. Структурна формула неког молекула или једињења и шема електричног кола у теорији кола такође представљају графове.

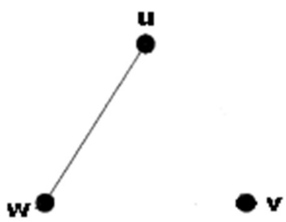
Илуструјмо један такав граф. Нека су , и три особе. Ако међу њима важи да свако сваког познаје, граф који одговара овом познанству је на слици 1.1(а), ако на пример особа не познаје особу , а познаје , и и се међусобно познају, одговарајући граф је као на слици 1.1(б), а ако се познају само и , онда је одговарајући граф на слици 1.1(в).



Слика 1.1(а)



Слика1.1(б)



Слика 1.1(в)

Наведимо сада дефиницију графа.

Дефиниција 1.1. (Прост) граф G=G(V, E) је уређени пар који се састоји од скупа чворова и скупа грана , где је , при чему је скуп двочланих подскупова од .

Када је јасно на шта се мисли, користићемо ознаку уместо .

Чворови су **суседни** ако је , тј. ако постоји грана која их спаја. Ако је , кажемо да грана има крајеве и , можемо писати и . Две гране у графу су **суседне** ако имају заједнички чвор.
На слици 1.1(б), чворови и нису суседни, а и јесу. Гране и су суседне.

Напомена: Овом дефиницијом смо обухватили само неоријентисане графове без петљи и вишеструких грана (између свака два чвора постоји највише једна грана).
Неоријентисани граф је граф код кога $\forall u, v \in V$ важи:

$$\{u, v\} \in E \ \textit{повлачи да} \ \{v, u\} \in E.$$

Графови код којих се између нека два чвора налази више од једне гране називају се ***мултиграфови**. **Петља** је грана која има оба краја у истом чвору.*
Овде ћемо се углавном бавити горе наведеним, простим графовима.

Графови се геометријски представљају тако што чворове означавамо тачкама (или кружићима), а гране линијама које повезују одређене тачке, суседне чворове, као на сликама 1.1.

Дефиниција 1.2. **Степен чвора $\boldsymbol{v}$** у графу $G(V,E)$, у ознаци $\boldsymbol{d(v)}$, представља број чворова суседних чвору v (или број грана које из њега излазе). Чвор који нема суседа назива се **изолован** чвор (степен му је нула).
Најмањи степен чвора у графу $G(V,E)$ означавамо са $\boldsymbol{\delta}$**(G)**, $\delta(G) = min\{d(u), u \in V\}$.
Највећи степен чвора у графу $G(V,E)$ означавамо са Δ**(G)**, $\Delta(G) = max\{d(u), u \in V\}$.
Граф G је $\boldsymbol{r}$**-регуларан** ако је $\delta(G) = \Delta(G) = r$, тј. ако је степен сваког чвора r.

Граф са слике 1.1(а) је 2-регуларан, а степени чворова u, v, w на слици 1.1(б) су редом 1, 1, 2.

Дефиниција 1.3. **Подграф** посматраног графа $G(V,E)$ је граф $G_1(V_1,E_1)$ такав да је $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E \cap \binom{V_1}{2}$. Уколико је $V_1 = V$ подграф G_1 називамо **разапињућим подграфом** графа G.
Уколико важи $V_1 \subseteq V$ и $E_1 = E \cap \binom{V_1}{2}$, тада G_1 називамо **индукованим подграфом** графа G, а означавамо са $G_1 = G[V_1]$.
Граф $\boldsymbol{G - v}$ представља граф који се добије када се из графа G уклони чвор v и све гране које га садрже (пример индукованог подграфа).
Граф $\boldsymbol{G - e}$ представља граф који се добије када се из графа G уклони грана e.

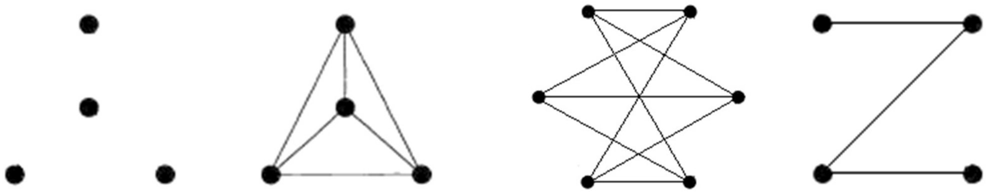
Разапињући подграф графа са слике 1.1(а) је нпр. граф са слике 1.1(б)

Ако се не нагласи другачије нека је број чворова у графу $\boldsymbol{n}$ и нека је $\boldsymbol{m}$ број грана.
У теорији графова често се појављују и издвајају следеће класе графова:

1) **Празан граф $\overline{K}_n$** је граф који нема ниједну грану.
2) **Комплетан граф K_n** је граф код кога између свака два чвора постоји грана.

3) **Комплетан бипартитан граф** је граф који има две компоненте (два непразна скупа чворова), тако да никоја два чвора из исте компоненте нису спојена граном, а између свака два чвора који нису из исте компоненте постоји грана. **Бипартитан граф** је било који подграф комплетног бипартитног графа. Овај појам се може проширити на **k-партитне** графове, са k компоненти уместо две.

4) **Пут** $_n$ са чворова је граф са скупом чворова $_1,\ _2$ $_n$ и скупом грана $_i,\ _{i+1}$.



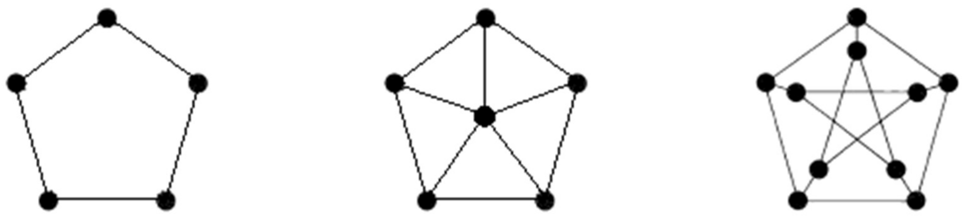
4 4 3,3 P_4

5) **Циклус (контура)** $_n$ са чворова је граф са скупом чворова , $_n$ и скупом грана $_i,\ _{i+1}$ $_n,\ _1$ Другим речима, циклус је затворен пут.

Контуре се могу дефинисати и у случају када нису прост граф. Петља и граф са два чвора између којих постоје две гране, представљају контуре.

6) **Точак** $_n$ је граф који се добија од контуре $_{n-1}$ додавањем једног чвора који спајамо гранама са свим осталим чворовима.

7) **Петерсонов граф** је пример 3-регуларног графа (сваки чвор му је степена три).



C_5 W_5 Петерсонов граф

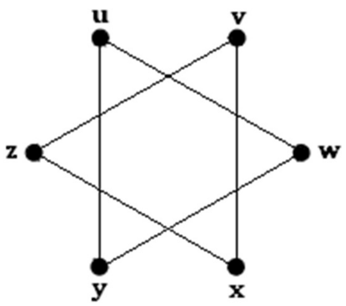
Дефиниција 1.4. Граф је **повезан** ако постоји пут између свака два његова чвора. У супротном, је неповезан.

(Повезане) компоненте графа су његови максимални повезани подграфови. Њихов број означавамо са .

У графу чвор је **везивни чвор** ако се његовим уклањањем повећава број компоненти, тј. ако

Грана је **мост** у графу ако се њеним уклањањем повећава број компоненти графа, тј. ак .

За пример повезаног графа можемо узети било који од горе наведених, осим празног графа. За граф са слике 1.1(б), чвор је везивни чвор (када уклонимо број компоненти се повећа на два), а за граф $_4$, грана $_2$ $_3$ је мост.
На слици 1.2 је приказан неповезан граф, јер не постоји пут између свака два његова чвора, нпр. између и не постоји пут. Овај граф садржи две компоненте повезаности, са слике је јасно да су то два троугаона графа.



Слика 1.2

Дефиниција 1.5. Под **околином чвора** графа се подразумева скуп чворова који су му суседни

Околина чвора са слике 1.2 је скуп .

Дефиниција 1.6. **Стабло** је повезан граф без циклуса. Граф који не садржи циклусе, тј. граф чија је свака компонента повезаности стабло, назива се **шума.**

Пример стабла је граф $_4$.

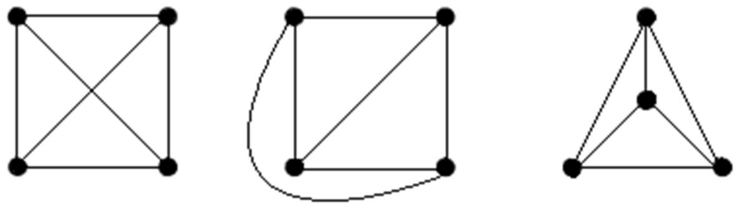
Дефиниција 1.7. Подскуп чворова графа је **клика** ако су свака два чвора , суседна у , тј. повезани су граном. Подскуп чворова графа је **независан скуп** ако никоја два чвора нису суседна у .

Клика графа са слике 1.2 је нпр. скуп , а независан скуп тог графа је скуп

Дефиниција 1.8. За графове $_1$ $_1$, $_1$ и $_2$ $_2$, $_2$) кажемо да су **изоморфни** ако постоји бијекција $_1 \rightarrow$ $_2$ тако да је $_1$ ако и само ако је $_2$. Функција се назива **изоморфизам** графова, а чињеницу да су графови $_1$ и $_2$ изоморфни означавамо са $_1$ $_2$.

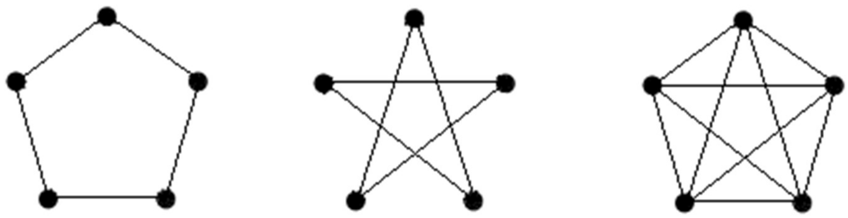
Дефиниција 1.9. Граф ‾ је **комплемент** графа ако је ‾ и два чвора су суседна у ‾ ако и само ако нису суседни у . Граф је **самокомплементаран** ако је изоморфан са својим комплементом.

Графови на слици 1.3 су међусобно изоморфни.



Слика 1.3

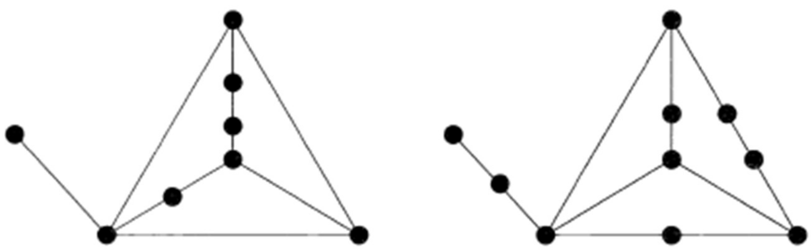
Граф $_5$ је пример самокомплементарног графа (слика 1.4(а)). На слици 1.4(б) је дат његов комплемент, који му је уједно и изоморфан граф. Ако узмемо све гране оба та графа, са истим скупом чворова, добијамо комплетан граф, слика 1.4(в).



Слика 1.4(а) Слика 1.4(б) Слика 1.4(в)

Дефиниција 1.10. Два графа су **хомеоморфна** ако се оба могу добити од истог графа убацивањем нових чворова степена два у његове гране.

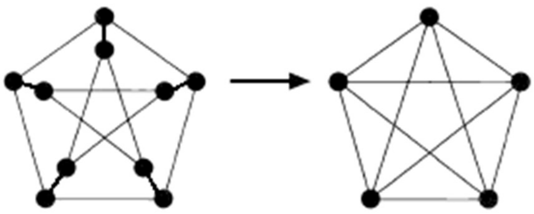
На пример, свака два циклуса су хомеоморфна, као и графови на слици 1.5.



Слика 1.5

Дефиниција 1.11. Граф се може **контраковати** на $_5$ или $_{3,3}$ ако можемо добити $_5$ или $_{3,3}$ тако што контракујемо неке од ивица графа .

На пример, Петерсонов граф се може контраковати на $_5$, као на слици 1.6. Ивице које се контракују су подебљане.

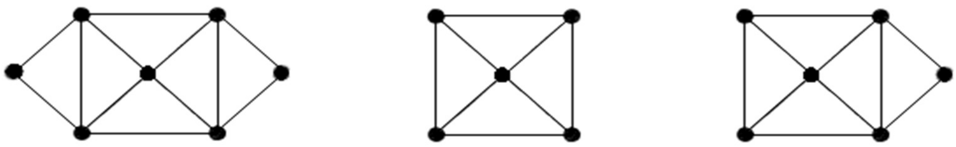


Слика 1.6

Дефиниција 1.12. Повезан граф је **Ојлеров** ако постоји затворен пут (циклус) који садржи сваку грану графа тачно једном. Такав пут се назива **Ојлерова контура.** Обрнуто, граф је **не-Ојлеров**, ако такав пут не постоји.

Дефиниција 1.13. Граф је **полу-Ојлеров** ако постоји пут који садржи сваку грану тачно једном. Такав пут се назива **Ојлеров пут.**

На слици 1.7 су приказани редом Ојлеров, не-Ојлеров и полу Ојлеров граф.

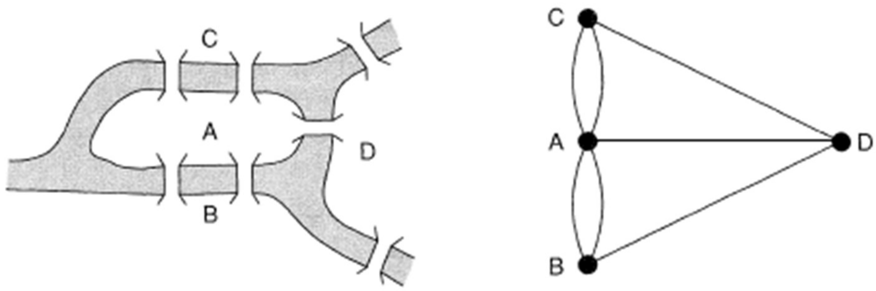


Слика 1.7

Више о Ојлеровим графовима можете прочитати у наредном одељку.

2. Ојлерови графови

Проблеми са Ојлеровим графовима су се првобитно појавили у књигама рекреативне математике. Типичан проблем је био нацртати неку фигуру у равни једним потезом без подизања оловке са папира. Проблем од кога је потекла читава прича о Ојлеровим графовима је Проблем кенингсбершких мостова, који поставља питање да ли је могуће преко сваког од седам мостова прећи тачно једном, тако да се вратимо у почетну тачку (о овоме смо говорили у уводном делу). Ово је еквивалентно питању да ли постоји затворен пут који садржи сваку грану графа тачно једном, за дати граф мостова. Пошто је Леонард Ојлер први човек који је тај проблем решио, такав пут је по њему добио назив Ојлеров, а граф у којем постоји такав пут је Ојлеров граф. На слици 2.1 су приказани скица кенингсбершких мостова и одговарајући граф, који је мултиграф, јер нпр. између A и C постоје две ивице.



Слика 2.1

Сада се намеће питање, који су потребни и неопходни услови да би граф био Ојлеров. Наведимо претходно помоћно тврђење, лему.

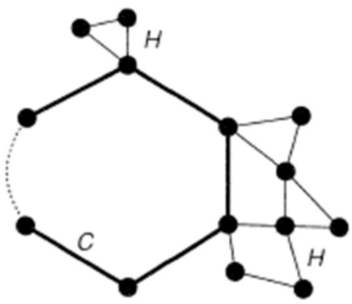
Лема 2.1. Ако је граф чије је свако теме степена бар два, тада садржи контуру.

Доказ. Ако садржи петљу или је мултиграф, јасно је да задовољава тражени услов. Претпоставимо да је прост граф. Нека је произвољан чвор графа. Конструисаћемо низ грана $_1$ $_2$ . . . на следећи начин: $_1$ је повезан са и за свако важи да је $_{i+1}$ повезан са $_{i,}$ и притом је $_{i+1}$ различито од $_{i-1.}$ Да је овај услов увек могуће задовољити гарантује нам претпоставка да је степен сваког чвора бар два. Пошто има коначно много чворова, јасно је да ће се неки чвор у низу поновити. Означимо чвор који се први понови са $_k$. Очигледно је да део низа између првог и другог појављивања $_k$ представља контуру. ■

Теорема 2.2 (Ојлер 1736). Повезан граф је Ојлеров ако и само ако је сваки чвор графа парног степена.

Доказ. (Претпоставимо да је Ојлерова контура графа Посматраћемо следећи поступак: редом ћемо брисати гране из . Очигледно је да при сваком проласку кроз неки чвор бришемо тачно две гране. На крају овог поступка степен сваког чвора ће бити нула. Дакле, сваки чвор графа је парног степена.

Доказ ћемо извести индукцијом по броју грана графа Пошто је повезан, степен сваког чвора је бар два, па по претходно доказаној леми следи да G садржи контуру . Ако садржи сваку грану од , доказ је завршен. У супротном, уклонићемо из сваку грану коју садржи и овим поступком формирати нови (могуће неповезан) граф који садржи мање грана него , али је сваки чвор и даље парног степена. По индукцијској хипотези, свака компонента графа је Ојлерова контура. Пошто свака компонента графа има бар један чвор заједнички са , посматрајући Ојлерове контуре сваке од компоненти и , лако формирамо Ојлерову контуру графа (слика 2.2). ■



Слика 2.2

Теорема 2.3. Повезан граф је полу-Ојлеров ако и само ако садржи нула или тачно два чвора непарног степена.

Доказ. Ако граф поседује Ојлеров пут (или контуру), тада аналогно као и у претходној теореми добијамо да сваки чвор (осим можда почетног и крајњег ако су различити) има паран степен.

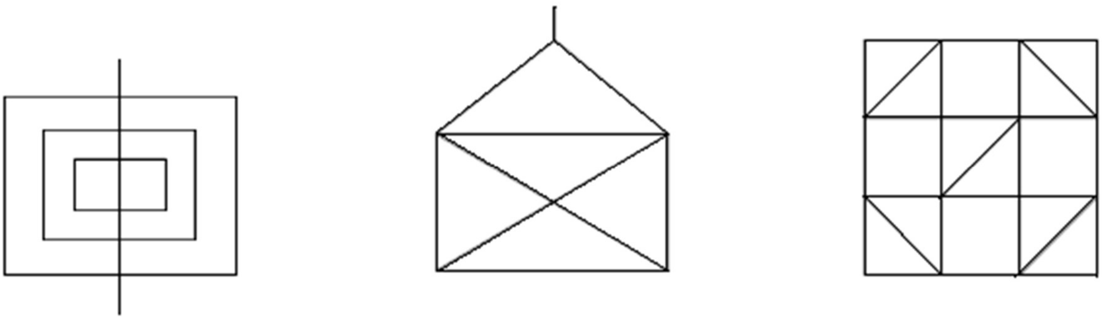
Ако граф има нула чворова непарног степена, онда задовољава услове теореме 2.2, па је Ојлеров граф, самим тим и полу-Ојлеров. Ако граф има тачно два чвора непарног степена, када убацимо у њега још једну грану, која повезује управо те чворове који су непарног степена, добијамо граф који има све чворове парног степена, па по теореми 2.2 тај граф садржи Ојлерову контуру. Избацивањем сада те нове гране из Ојлерове контуре добијамо Ојлеров пут, који има почетак и крај у чворовима непарног степена. Дакле, граф је полу-Ојлеров. ■

Дакле, када у неком графу треба да нађемо Ојлеров пут, увек треба да кренемо од неког од два могућа чвора непарног степена.

Пример 2.1. За које вредности су графови $_n$ и $_n$ Ојлерови графови?

Решење. Познато је да је код графа $_n$ свака грана степена , па је по теореми 2.2, тај граф Ојлеров када је паран, односно непаран број.
Пошто код графа $_n$ постоји чворова степена три када је , по теореми 2.2. граф није Ојлеров. ▲

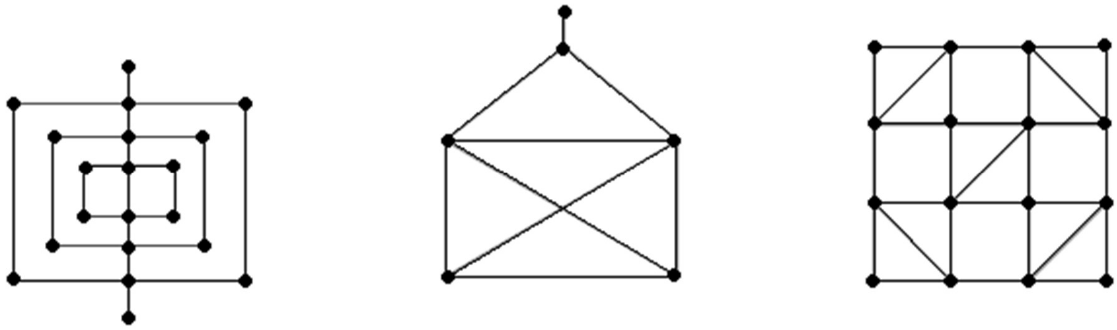
Пример 2.2. Да ли је могуће фигуре са слике 2.3. нацртати у једном потезу, без подизања оловке са папира?



Слика 2.3

Решење: Ако представимо ове фигуре као графове, проблем се своди на налажење Ојлеровог пута. По теореми 2.3, граф мора да садржи или нула или два чвора непарног степена. Дакле, само треба да пребројимо колико ови графови имају чворова непарног степена. Ако уочимо чворове графа као на слици 2.4, лако пребрајамо.
Први граф има тачно два чвора непарног степена, полазећи од једног од њих лако формирамо Ојлеров пут. Други граф има четири чвора непарног степена, па није могуће формирати Ојлеров пут. Трећи граф има, као и први, тачно два чвора

непарног степена, па је и у овом случају могуће формирати Ојлеров пут.



Слика 2.4

Дакле, одговори су: да, не, да. ▲

Пример 2.3. Граф кенингсбершких мостова има чворове степена 5, 3, 3, 3, па по теореми 2.2 не постоји Ојлерова контура (затворен пут), а по теореми 2.3 не постоји чак ни Ојлеров пут. ▲

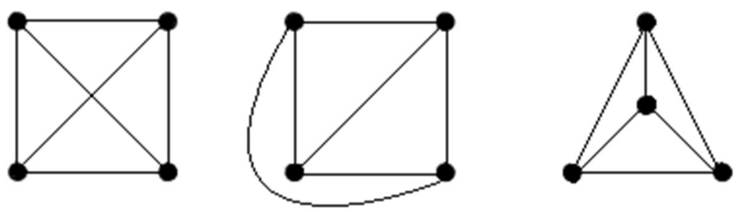
3. Планарни графови

У овој глави ћемо се бавити важном и доста изучаваном класом графова. Проблем планарних графова је био један од најзанимљивијих отворених проблема двадесетих година прошлог века. Пољски математичар Куратовски је 1930. године класификовао планарне графове и доказао (касније по њему названу) теорему о планарним графовима (теорема 3.2 у даљем тексту).

Дефинишимо сада шта представља планаран граф.

Дефиниција 3.1. Граф је **планаран** ако се може нацртати у равни тако да му се никоје две гране не секу у унутрашњој тачки, тј. гране немају других заједничких тачака осим евентуално у чворовима графа.

Пример 3.1. Граф K_4 је планаран зато што се може нацртати у равни тако да му се гране не секу, али није свака његова интерпретација планарна.



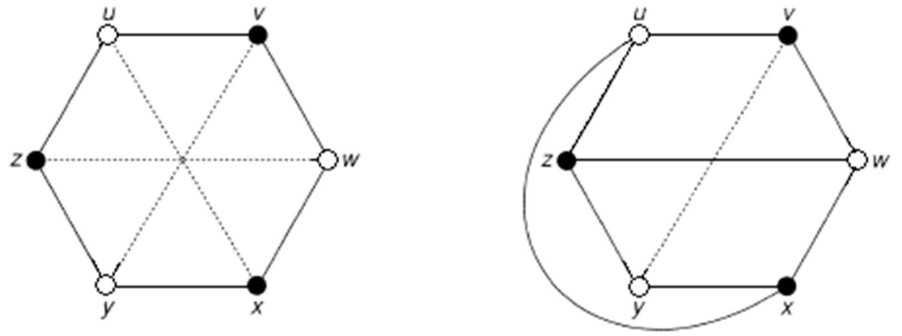
Слика 3.1(а) **Слика 3.1(б)** **Слика 3.1(в)**

На слици 3.1(а) је граф $_4$ представљен тако да постоји пресецање грана, али га је могуће представити у равни без тог пресецања, као што је приказано на сликама 3.1(б) и 3.1(в).

Убудуће ћемо сматрати да су сви графови који су планарни дати у својој планарној интерпретацији. Намеће се питање, када је граф планаран, тј. које услове треба да задовољава граф да би био планаран. Наредне теореме нам дају неке одговоре.

Теорема 3.1. Графови $_5$ и $_{3,3}$ нису планарни.

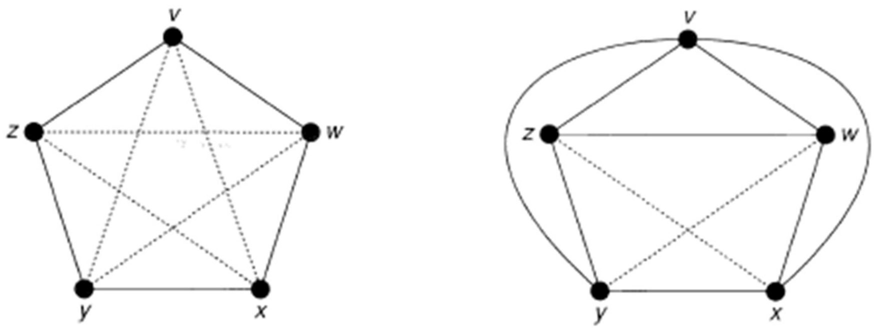
Доказ. Посматрајмо граф $K_{3,3}$. То је комплетан бипартитан граф и садржи циклус дужине 6. Обележимо чворове. Нека су у првој компоненти а у другој (црни кружићи). Тада је контура . Сваки планаран цртеж овог графа мора садржати овакву контуру, дакле шестоугао (слика 3.2).



Слика 3.2

Пошто је овај граф комплетан бипартитан граф, морамо повезати чворове Само једна од тих грана може лежати унутар шестоугла, преостале две морају ван, јер у супротном долази до пресецања. Не умањујући општост можемо узети да је грана унутар шестоугла. Ако сада спојимо , видимо да је немогуће спојити тако да грана не сече грану . Дакле, граф $_{3,3}$ није планаран.

Посматрајмо сада граф K_5. Он садржи циклус дужине пет, па свака његова планарна репрезентација мора да садржи петоугао. Нека су његови чворови и нека је циклус



Слика 3.3

Пошто је граф комплетан мора имати гране . Само две од тих грана могу бити унутар петоугла, контуре. Без умањења општости нека су унутар
Ван контуре исто можемо без пресецања нацртати две гране, опет можемо претпоставити да су то . Преостала је једна грана , а њу не можемо ни унутра ни ван, јер у сваком случају долази до пресецања са неком од грана. Дакле, граф $_5$ није планаран.

Да би читаоци стекли бољи увид о важности претходне теореме, наведимо (без доказа) две веома битне теореме које се на њу ослањају.

Теорема 3.2. (Куратовски 1930) Граф је планаран ако и само ако не садржи као подграф ниједан граф хомеоморфан са $_{3,3}$ или $_5$.

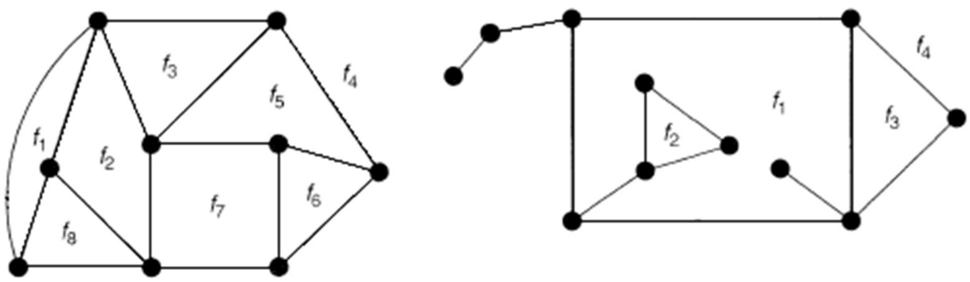
Теорема 3.3. Граф је планаран ако и само ако не садржи подграф који се може контраковати на $_5$ или на $_{3,3}$.

Обе теореме дају потребан и довољан услов за планарност графова.

Јасно је да је сваки подграф планарног графа планаран, а да сваки непланаран граф садржи подграф који није планаран. Дакле, граф који садржи $_{3,3}$ или $_5$ као подграфове не може бити планаран.

Ојлерова формула

Ако имамо планаран граф , он дели раван у којој је представљен на области (број тих области обично означавамо са). На пример, графови на слици 3.4 деле раван на осам, односно четири области. Област $_4$ је у оба случаја неограничена област.



Слика 3.4

Ојлерова формула, која следи у даљем тексту, нам говори да при ма каквом планарном представљању неког графа у равни, број области на које он дели раван је исти, и у потпуности зависи од броја чворова и грана тог графа.

Теорема 3.4 (Ојлерова формула). Нека је G повезан планаран граф, и нека су n, m, f редом број чворова, број грана и број области на које граф дели раван. Тада важи:

$$n - m + f = 2.$$

Доказ. Доказујемо индукцијом по броју ивица графа, m.
Ако је $m = 0$, граф има један чвор, тј. $n = 1$(пошто је повезан не може имати више), а број области на које дели раван је један, $f = 1$. Видимо да ови бројеви задовољавају једнакост, $1 - 0 + 1 = 2$. Овим је задовољена база индукције.
Сада претпоставимо да теорема важи за све графове који имају $m - 1$ грану. Ако је G дрво (повезан граф без контура), тада је $m = n - 1$ и $f = 1$ (важи за дрво, може се доказати индукцијом), па важи $n - m + f = 2$. Ако G није дрво, тада садржи бар једну контуру. Нека је е нека грана у том циклусу. Када избацимо ту грану, добија се граф са $m - 1$ грана и са $f - 1$ области, за кога по индукцијској претпоставци важи формула, тј. $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$, а из тога следи да је $n - m + f = 2$, шта је требало и доказати. ∎

Последица 3.5. Нека је G повезан планаран граф, и нека су n, m, f и k редом број чворова, број грана, број области на које граф дели раван и број компоненти графа. Тада важи:

$$n - m + f = k + 1.$$

Доказ. Посматрајмо сваку компоненту посебно и применимо на сваку од њих Ојлерову формулу. Сабирањем свих k једначина са леве стране добијамо $n - m + f' = 2k$, где је n број свих чворова, m број свих грана, а у f'(кад саберемо све области) смо област која раздваја компоненте рачунали k пута, а потребно је само једном. Због тога, број области f' треба да се смањи за $k - 1$ ($f' = f + k - 1$), па самим тим треба да смањимо и десну страну. Сада имамо једначину $n - m + f = 2k - (k - 1)$, што је требало и доказати. ∎

Теорема 3.6.
(i) Нека је G повезан прост планаран граф са n чворова ($n \geq 3$) и m грана, тада је $m \leq 3n - 6$.
(ii) Ако дати граф нема троугаоне контуре, тада је $m \leq 2n - 4$.

Доказ. (i) Посматрајмо овај граф у равни. Пошто је свака грана заједничка за две области, а свака област садржи најмање три гране, то пребројавањем свих грана око сваке области добијамо неједнакост $3f \leq 2m$ (за планарне графове важи формула

, где је дужина контуре која ограничава област). Заменом ове неједнакости у Ојлерову формулу, добијамо тражену неједнакост.

Разматрањем као у претходном доказу, закључујемо да је , тј. , па заменом ове неједнакости у Ојлерову формулу добијемо тражену неједнакост.

Напомена: Теорема 3.1 се може добити као последица ове теореме:
Ако претпоставимо да је граф $_5$ планаран, по теореми мора да важи За овај граф је . Тада би требало да важи , што није тачно, па је претпоставка погрешна, $_5$ није планаран.
Слично се добија за граф $_{3,3}$. Пошто овај граф нема троугаоне контуре, применићемо други део теореме. У овом случају је о теореми 3.6 треба да важи тј Опет смо добили контрадикцију, па граф $_{3,3}$ није планаран.

Теорема 3.7. Сваки прост планаран граф садржи бар један чвор степена највише пет.

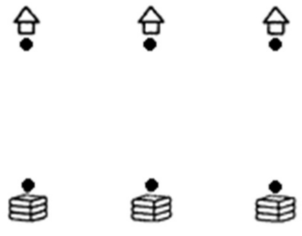
Доказ. Без умањења општости претпоставимо да је граф повезан и да има најмање три чвора. Ако сваки чвор има степен најмање шест, тада важи (по ознакама из теореме 3.6) , што је у контрадикцији са теоремом 3.6(. ■

Претходна теорема ће нам бити од велике користи за доказивање **теореме о пет боја**, и других теорема везаних за бојење графова, а о томе ће бити речи у наредном одељку.

Пример 3.2. Петерсонов граф није планаран.

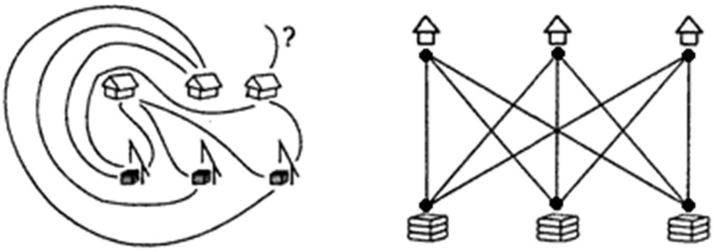
Решење. Петерсонов граф се може контраковати на граф $_5$ (слика 1.6), па по теореми 3.3 он не може бити планаран. ▲

Пример 3.3. На слици су дате три куће и три бунара. Повезати сваку кућу са сваким бунаром тако да не дође до пресецања путева.



Слика 3.5

Решење.
Приметимо да је граф чија су темена куће и бунари, а гране тражени путеви, комплетан бипартитни граф $_{3,3}$ (слика 3.6). Пошто тај граф по теореми 3.1 није планаран, то није могуће повезати сваку кућу са сваким бунаром, а да се путеви не секу. ▲



Слика 3.6

Дуални графови

Због бојења мапа у наредном поглављу, потребно је увести појам дуалног графа за дати граф .

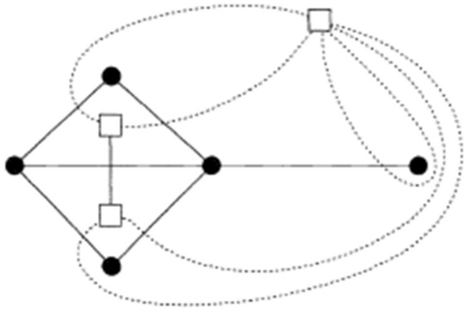
Дефиниција 3.2. Ако нам је дат планаран граф , конструишимо граф *, следећи наредне две етапе:

1) Унутар сваке области $_i$ графа , бирамо тачку $_i$*. Ове тачке су чворови новог графа *.
2) Свакој грани графа додељујемо * тако да она сече , али не сече ни једну другу грану графа и повезује чворове * који припадају областима које ограничава .

Овако добијен граф *се назива **(геометријски) дуал** графа .

На пример, дуалан граф за граф географске карте се може добити тако што за чворове тог дуалног графа узмемо главне градове представљених држава, а повежемо гранама само градове суседних држава, тј. оних које имају заједничку ивицу.

Поступак за добијање дуалног графа неког графа G је илустрован на слици 3.7, где су чворови графа * представљени квадратићима, а његове гране испрекиданим линијама.



Слика 3.7

Лема 3.8. Нека је планаран граф са чворова, грана и области и нека је његов дуални граф * код кога је број чворова *, број грана * и број области *. Тада важи:

$$* \qquad * \qquad *$$

Доказ. Прве две релације следе непосредно из дефиниције графа , док трећу релацију доказујемо применом Ојлерове теореме на графове и *, следи директно из ње. ■

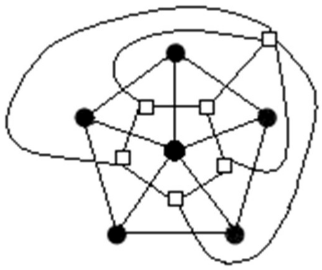
Пошто је дуалан граф * планарног графа такође планаран, можемо поновити описану конструкцију и добити граф дуалан графу * (означаваћемо га са **). Ако је G повезан извешћемо релације које важе између и **.

Теорема 3.9. Нека је G планаран повезан граф, тада је ** изоморфан са .

Доказ. Тврђење је еквивалентно тврђењу да је граф дуалан графу *. Пошто нам је познато да свака грана графа G сече тачно једну грану графа * и да је при томе свака грана графа * пресечена, остаје нам да проверимо да ли свака област графа * садржи тачно један чвор графа . Очигледно је из поступка конструкције да свака област мора да садржи бар један чвор, а из релације * закључујемо да свака област садржи тачно један чвор, што је требало и доказати. ■

Пример 3.4. Доказати да је точак $_n$ сам себи дуал.

Решење. $_n$ има тачно коначних и једну бесконачну област. Његов дуалан граф ће очигледно бити повезан. Посматрајмо чвор који припада бесконачној области. Он је повезан са сваким од чворова који припадају коначним областима. Посматрајмо граф који добијамо искључивањем из дуалног графа чвора који припада бесконачној области и свих грана којима припада. Граф који остаје је повезан и има чвор од којих је сваки степена два, дакле то је $_{n-1}$. Дакле, граф дуалан графу $_n$ је $_n$, што је и требало доказати (слика 3.8). ▲



Слика 3.8

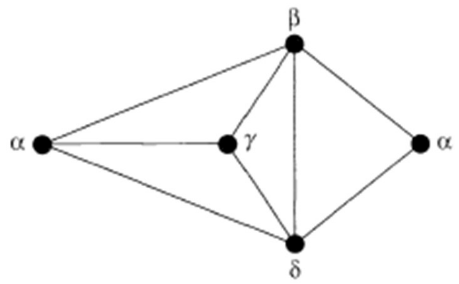
4. Бојење графова

Граф се може бојити тако што додељујемо боје његовим чворовима или његовим гранама, па тако можемо говорити о бар две врсте бојења графова. У овом поглављу ћемо се бавити бојењем чворова графа и показати аналогност између проблема бојења мапа и проблема бојења чворова графа.

Уведимо дефиницију.

Дефиниција 4. 1. Нека је прост граф (без петљи и вишеструких грана). Кажемо да је **-обојив** ако можемо доделити једну од боја сваком чвору тако да су суседни чворови обојени различитим бојама. Ако је -обојив, али није -обојив, кажемо да је граф **-хроматски**, или да је његов **хроматски број** , и пишемо .

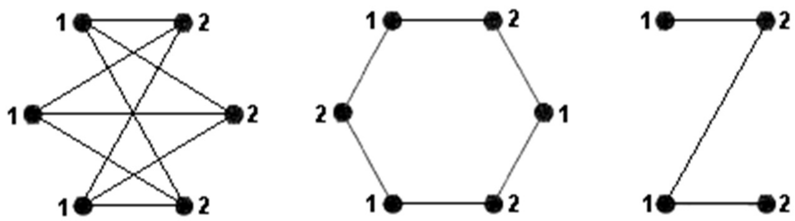
На слици 4.1 је граф за кога је , боје су означене грчким словима.



Слика 4.1

Јасно је да је Kn , па постоје графови са произвољно великим хроматским бројем. Са друге стран ако и само ако је празан граф.

Ако је непразан бипартитан граф тада ј . Приметимо да је и свако стабло 2-обојиво, као што је и сваки цикличан граф са парним бројем чворова (слика 4.2, боје су означене бројевима).

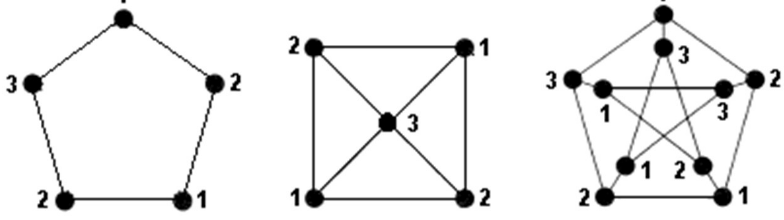


Слика 4.2

Пример 4.1. Наћи хроматске бројеве за циклус, точак са непарним бројем чворова и за Петерсонов граф.

Решење: Узмимо циклус C_5 за представника циклуса са непарним бројем чворова. Ако покушамо да га обојимо у две боје, не успева нам управо због непарног броја чворова (обојимо најпре једну тачку произвољном бојом, а затим њене суседе бојом која је различита од претходне, итд, слика 4.3, боје су означене бројевима). Уочавамо да га није могуће обојити са мање од три боје, па је $_5$. Аналогно је и $_{2k+1})$.

Посматрајмо сада точак са непарним бројем чворова, узмимо $_4$ (слика 4.3). Ако занемаримо централну тачку, добијамо контуру са парним бројем чворова која се може обоијити у две боје. Сада, пошто је централна тачка повезана са свима осталима, она мора бити обојена неком трећом бојом, па је $_4$. Аналогно се добија и за све остале точкове са непарним бројем чворова $_{2k}$. Можемо на исти начин закључити и да точкови са парним бројем чворова имају хроматски број једнак четири.

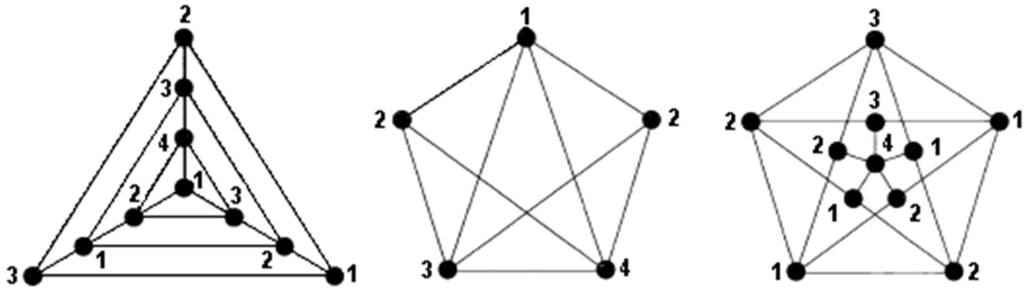


Слика 4.3

Посматрајмо сада Петерсонов граф. Он садржи контуру са непарним бројем чворова, па не може бити обојен са мање од три боје. Како је једно његово 3-бојење приказано на слици 4.3, добијамо да је и његов хроматски број једнак 3. ▲

Пример 4.2. На слици 4.4 су приказана бојења за одређене графове. Хроматски број сваког од њих је 4.

Објашњење. Први граф садржи K_4 као подграф, па не може бити обојен са мање од четири боје. У другом графу постоје само два чвора која нису суседна, па само они могу бити исте боје. Дакле потребно нам је бар четири боје за његово бојење. Трећи граф садржи непарну контуру као подграф. Посматрајмо спољашњу контуру графа дужине пет. За њено бојење је потребно бар три боје. Нека су то 1, 2 и 3. Неке две од њих ће се јављати два пута, а једна једном. Без умањења општости нека је ситуација као на слици 4.4. Између свака два несуседна чвора (од тих пет) постоји чвор. Постоји пет таквих чворова. Чворови који се налазе између чворова различитих боја, морају бити обојени трећом бојом, па пошто имамо три таква пара (1 и 2, 1 и 3, 2 и 3) то морамо да искористимо три боје за бојење тих пет чворова који се налазе око централног. Пошто је централни чвор суседан са свих тих пет, он мора бити обојен четвртом бојом. Дакле, најмање је четири боје. Граф је 4-хроматски. Бојења представљена на слици 4.4 показују да се сваки од графова може обојити са четири боје. ■



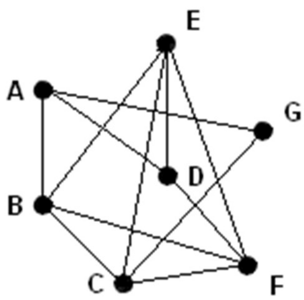
Слика 4.4

Пример 4.3. На неком универзитету се организују предавања и треба да се одржи седам предавања, по један из сваког од предмета A, B, C, D, E, F и G.

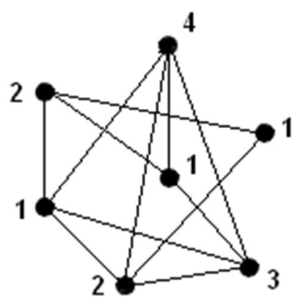
	A	B	C	D	E	F	G
A		+		+			+
B	+		+		+	+	
C		+			+	+	+
D	+				+	+	
E		+	+	+		+	
F		+	+	+	+		
G	+		+				

У табели је плусевима представљено који од предмета се не могу држати у исто време. Одредити најмање могуће време за које се могу одржати свих седам предавања.

Решење. Податке дате табелом можемо представити графом, тако што ћемо предмете представити чворовима, а суседни чворови ће бити само они који представљају предмете који се не могу држати у исто време (слика 4.5(а)). Часови из предмета у чворовима који нису повезани могу се одржавати у исто време, тј. чворови који нису суседни могу бити исте боје. Због тога се проблем налажења најмањег времена за које се могу одржати сва предавања (часови) своди на проблем налажења хроматског броја за граф предмета. Дакле сада треба наћи минимално бојење за граф са слике.



Слика 4.5 (а)



Слика 4.5(б)

Граф предмета, назовимо га , садржи као подграф $_4$ (BCFE), па је за његово бојење потребно најмање четири боје. На слици 4.5(б) је приказано једно 4-бојење, боје су означене бројевима (предмети исте боје су они који се могу одржавати у исто време). Дакле, хроматски број графа је четири. Најкраће време за које се могу одржати свих седам предавања је четири часа. ■

Постоји мало ствари које можемо рећи о хроматском броју за произвољан граф. Ако граф има чворова тада његов хроматски број не може прекорачити , и ако граф садржи $_r$ као подграф , тада његов хроматски број не може бити мањи од . Ове чињенице не дају баш велики допринос решавању општих проблема, али ако знамо степене чворова тада можемо доћи до значајнијих резултата.

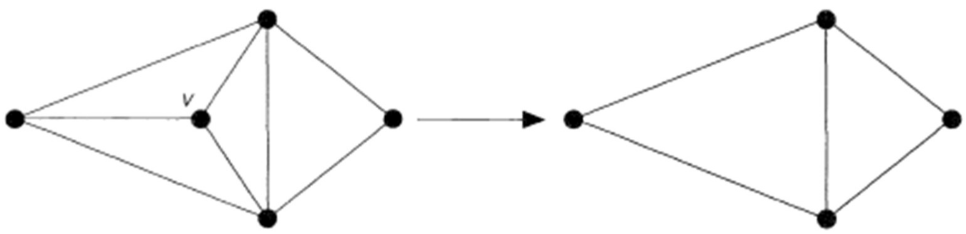
Теорема 4.1 (Кенигова теорема). Непразан граф је 2-хроматски ако и само ако не садржи контуру са непарним бројем чворова (непарну контуру) као подграф.

Доказ. Приметимо најпре да је хроматски број непарне контуре једнак три. Самим тим, граф чији је хроматски број највише два, не може имати непарних контура.

Претпоставимо сада да граф не садржи ни једну непарну контуру и докажимо да је граф 2-хроматски. Извршићемо ефективно бојење графа са две боје. Обојимо најпре произвољан чвор на пример плавом бојом. Све његове суседне чворове обојимо црвеном, а њихове суседе опет плавом бојом итд. Кад завршимо са једном компонентом повезаности, прелазимо на другу. Ако на овај начин обојимо све чворове графа, граф је 2-хроматски. У супротном случају, наићићемо у процесу бојења на чвор који треба обојити на пример црвеном, при чему је неки његов сусед већ обојен црвеном бојом. Међутим, тада од почетног чвора у овај чвор воде два пута, од којих је један парне дужине, а други непарне. Ако објединимо ова два пута, добијамо контуру непарне дужине, што је контрадикција са условом теореме. ■

Теорема 4.2. Ако је G прост граф са највећим степеном чвора , тада је G +1)-обојив.

Доказ. Доказујемо индукцијом по броју чворова. Нека је G прост граф са чворова. Ако избришемо неки чвор и гране које га садрже, тада је добијен граф са чворова и највећи степен чвора је максимално (слика 4.6). На основу индукцијске хипотезе, овај граф је -обојив. -бојење за G добијамо бојењем чвора v бојом која се разликује од боја чворова са којима је он повезан. Оваква боја постоји јер има највише суседа. Овим је доказ завршен. ■



Слика 4.6

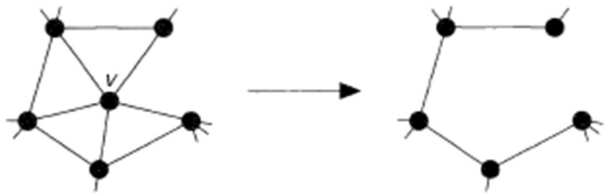
Претходна теорема се пажљивијим рарazматрањем може ојачати, тако добијамо Бруксову теорему. Овде ћемо је навести без доказа.

Теорема 4.3(Брукс 1941). Нека је прост повезан граф, који није комплетан граф, и нека је највећи степен чвора у том графу , тада је G -обојив.

Ако се усмеримо само на планарне графове, долазимо до значајнијих резултата.

Теорема 4.4. Сваки прост планаран граф је 6-обојив.

Доказ. Доказујемо теорему индукцијом по броју чворова. Тривијално је за просте планарне графове са највише шест чворова. Претпоставимо да је G планаран граф са n чворова и да су сви прости планарни графови са чворова 6-обојиви. По теореми 3.7, G садржи чвор чији је степен највише пет. Ако избришемо чвор и гране које га садрже, тада граф који се добије на тај начин има чвор, па је 6-обојив по индуктивној хипотези (слика 4.7). Сада 6-бојење графа G добијамо тако што чвор обојимо бојом која је различита од боја чворова који су му суседни (овде их има пет, па је шест боја довољно).



Слика 4.7

Ова теорема такође може да се ојача. Добија се теорема о пет боја.

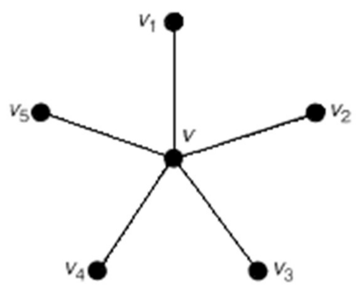
Теорема 4.5 (Теорема о пет боја). Сваки прост планаран граф је 5-обојив.

Доказ. Као и у претходној теореми, доказ ће бити индукцијом по броју чворова. Тривијално је за просте планарне графове са строго мање од шест чворова.

Претпоставимо да је прост планаран граф са чворова, и да је сваки прост планаран граф са строго мање од чворова 5-обојив. По теореми 3.7, садржи чвор степена највише пет. Као и у претходној теореми, бришемо чвор , и добијемо граф са чворова, који је 5-обојив. Наш циљ је да обојимо чвор једном од пет боја и тако довршимо бојење графа .

Ако је , онда v можемо обојити било којом бојом различитом од боја њему суседних чворова, чиме довршавамо доказ теореме.

Претпоставимо сада да је , и да су њему суседни чворови 1, 2, 3, 4, 5 распоређени око у смеру казаљке на сату (слика 4.8).



Слика 4.8

Ако су свака два од чворова $_1$, $_2$, $_3$, $_4$, $_5$ узајамно суседни, тада садржи непланаран граф $_5$ као подграф, што није могуће, јер је планаран. Следи да најмање две чвора, рецимо $_1$ и $_3$, нису суседни. Сада ћемо контраковати гране $_1$ и $_3$. Резултујући граф је планаран граф са мање од чворова, и он је по индукцијској претпоставци 5-обојив. Чворови $_1$ и $_3$ су при овом бојењу обојени истом бојом као , јер су идентификовани са . Сада вратимо две контраковане гране. Сви чворови, осим су обојени и то је постигнуто са пет боја. Суседи од су обојени са највише четири боје (јер су $_1$ и $_3$ исте боје).Сада чвору можемо доделити преосталу боју која није употребљена. Постигнуто је бојење у пет боја. Тиме је доказ завршен.

Сада се намеће питање како бисмо могли да ојачамо претходну теорему, и то води ка једном од најпознатијих дуго нерешених проблема у математици - **проблем четири боје.** Овај проблем је у својој алтернативној формулацији био првобитно постављен 1852, а коначно су га решили K. Appel и W. Haken 1976. године.

Теорема 4.6 (Appel и Haken, 1976). Сваки прост планаран граф је 4-обојив.

Бојење мапа

Теорема о четири боје је историјски у директној вези са бојењем мапа. Ако нам је дата мапа која садржи неколико земаља, можемо се запитати колико најмање боја нам је потребно да бисмо је обојили тако да су суседне земље, које имају заједничку граничну линију, обојене различитим бојама. Једна од најуобичајенијих формулација теореме о четири боје је управо тврђење да је сваку мапу могуће обојити са четири боје. Да бисмо прецизирали формулацију овог тврђења, морамо објаснити шта подразумевамо под мапом.

Пошто две боје са разних страна ивица које раздвајају суседне земље морају бити различите, морамо да искључимо постојање мостова у графу. Такође можемо искључити чворове степена два, пошто лако могу бити уклоњени (слика 4.9).

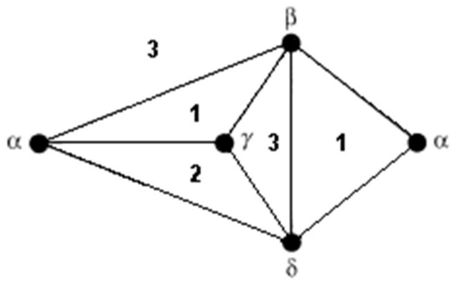
Слика 4.9

Да бисмо покрили ове и сличне случајеве дефинисаћемо мапу као 3-повезан граф који не садржи чворове степена један и два ни једночлане или двочлане скупове грана чијим би се уклањањем добио неповезан граф (cutsets).

Сада можемо дефинисати обојивост мапе.

Дефиниција 4.2. Мапа је k-обојива( ) (као , што представља области на које граф дели раван) ако се њене области могу обојити у боја, тако да суседне области (са заједничком ивицом) буду обојене различитим бојама.

Да бисмо избегли мешање са уобичајеном нотацијом и дефиницијом обојивости графа, користимо k-обојивост( ) као ознаку за уобичајено бојење чворова графа (од -чвор). На пример, мапа са слике 4.10 је 3-обојива( ) и 4-обојива( ).

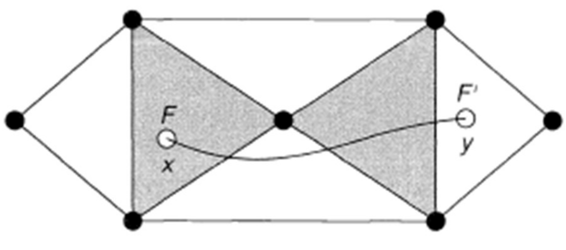


Слика 4.10

У даљем тексту, доказаћемо еквиваленцију између два облика теореме о четири боје. За то су нам потребне и следеће теореме.

Теорема 4.7. Мапа је 2-обојива ако и само ако је Ојлеров граф.

Доказ. ( ) За сваки чвор у , број области око мора бити паран, пошто морају бити обојене у две боје. Због тога сваки чвор мора имати паран степен, па је по теореми 2.2 граф Ојлеров.

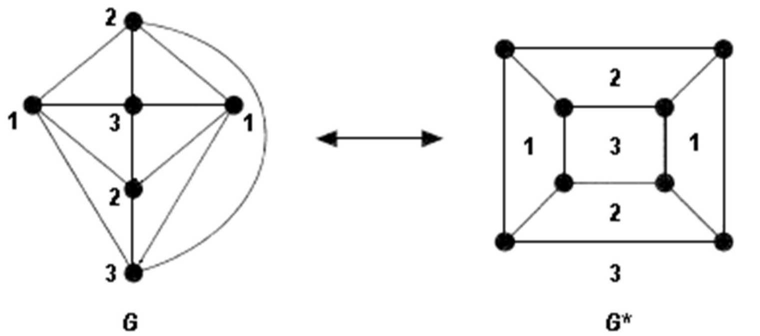


Слика 4.11

) Ако је граф Ојлеров, бојимо његове области у две боје као што следи. Изаберимо неку област и обојимо је црвено. Спојимо кривом тачку из са тачкама у свим осталим областима тако да не пролазимо кроз чворове. Ако крива пресеца паран број грана обојимо ту област у црвено, у супротном обојимо је у плаво (слика 4.11). Ово бојење је добро дефинисано, јер ако обиђемо цикл око неког чвора број грана које тада пресечемо је паран (због тога што је степен сваког чвора по теореми 2.2 паран), па чвор од кога кренемо треба да има исту боју као чвор после пресека криве са парним бројем грана. Исто тако, суседи су разних боја, а број пресека је један, непаран број. Тиме је доказ завршен.

Теорема 4.8. Нека је планаран граф без петљи, и нека је * геометријски дуал од . Тада је -обојив( ) ако и само ако је * -обојив( ).

Доказ. (Можемо претпоставити да је прост повезан граф, тако да је * мапа. Ако имамо -бојење за , тада свака област наслеђује боју јединственог чвора кога садржи (слика 4.12). Не постоје две суседне области од * које имају исту боју јер су чворови од које те области садрже суседни у , па су различито обојени. Овако је * -обојив.



Слика 4.12

Претпоставимо сада да имамо -бојење за *. Тада можемо -обојити чворове од тако што сваки чвор наследи боју области која га садржи. Не постоје две суседне области обојене истом бојом, па тада не постоје ни два суседна чвора у обојена истом бојом. Овако добијено бојење за је тражено -бојење.

Из свега тога следи да свака теорема за бојење чворова за планаран граф даје теорему за бојење области за мапу, и обрнуто. Пример тога је наредна последица.

Последица 4.9. Теорема о четири боје за мапе је еквивалентна теореми о четири боје за планарне графове.

Доказ. (⇒) Можемо претпоставити да је G прост планаран граф. Његов геометријски дуал G^* је мапа, па је његова 4-обојивост(v) директна последица 4-обојивости(f) графа G по теореми 4.8.

(⇐) Обрнуто, нека је G мапа, а G^* је њен геометријски дуал. Тада је G^* прост планаран граф и он је 4-обојив. Директно следи да је и G 4-обојив. ■

Још нека својства хроматског броја

Теорема 4.10. Нека је $|V(G)| = n$ и нека је $V(G)$ дисјунктна унија скупова $V_1, V_2, \dots, V_k$ ($V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \{\}$, $i \neq j$). Уколико важи да за сваке $1 \leq i < j \leq k$ постоје $x \in V_i$ и $y \in V_j$ тако да x и y нису суседни. Показати:

$$\chi(G) \leq n - k + 1.$$

Доказ. Докажимо неједнакост индукцијом по k. Ако је $k = 1$ неједнакост је тривијално испуњена. Претпоставимо сада да теорема важи за сваки граф G', ако се $V(G')$ може разложити на $k - 1$ скуп као у формулацији теореме, и нека је $V(G)$ дисјунктна унија скупова V_1, $V_2, \dots, V_k$ који задовољавају услове тврђења. По индукцијској претпоставци, важи да је

$$\chi(G - V_k) \leq n - |V_k| - (k - 1) + 1.$$

Обојимо граф $G - V_k$ бојама $1, 2, 3, \dots, n - |V_k| - k + 2$, и проширимо ово бојење до бојења графа G додељујући сваком темену из V_k неку од $|V_k|$ боја $n - |V_k| - k + 3, n - |V_k| - k + 4, \dots, n - k + 2$. Хоћемо да другачије обојимо граф да се ослободимо једне од боја. По претпоставци задатка, сваки скуп V_i, за $1 \leq i < j \leq k$, садржи тачку y_i која није повезана ивицом са неком тачком $x_i \in V_k$. Како је број елемената скупа $V(G) \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$ једнак $n - k + 1$, а користили смо $n - k + 2$ боје за бојење графа, следи да постоји нека боја која је коришћена само за бојење неког од темена из скупа $\{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$. Не умањујући општост, нека је то боја 1. Променимо сада бојење тако да сваком темену y_i коме је била додељена боја 1, доделимо боју коју има теме x_i. Овим поступком смо очигледно добили добро бојење које користи $n - k + 1$ боју. ■

Теорема 4.11. Неко је G прост граф са n темена. Тада важи:

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1.$$

Доказ. Претпоставимо да је и обојимо темена графа са k боја {1, 2, . . . ,k}. Нека је $_j$ за скуп свих темена графа који су обојени бојом . Следи да за постоје темена $_i$ и $_j$ која су повезана ивицом у (у супротном бисмо могли да доделимо исту боју теменима из та два скупа, што би било у контрадикцији са тиме да је хроматски број графа једнак k). Из дефиниције графа следи да таква два темена нису повезана ивицом у , па скупови $_1$, $_2$ $_k$ задовољавају услове теореме 4.10. Одатле следи да је , па је тврђење доказано. ■

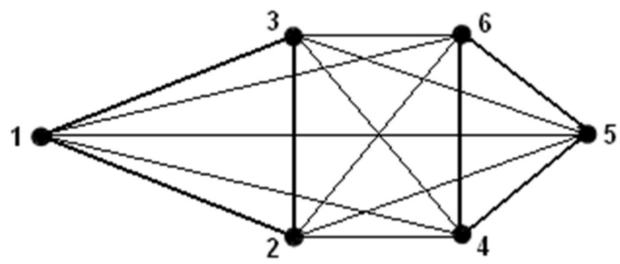
Дефиниција 4.3. Граф G је критично -обојив ако је и .

Пример 4.4. Који графови су критично 3-обојиви?

Решење. Нека је тражени граф. За њега треба да важи да ако избришемо било коју ивицу добијамо граф који се може обојити са две боје. По Кениговој теореми(теорема 4.1) ново добијени граф не садржи контуре непарне дужине. Дакле, или не садржи контуре уопште(дрво) или садржи само контуре парне дужине. Ако садржи контуре парне дужине, када посматрамо видимо да, брисањем неке гране графа различите од која је у саставу контуре парне дужине, хроматски број остаје исти. Дакле, преостаје други случај, не садржи контуре. Пошто је G 3-хроматски, мора садржати контуру непарне дужине. То значи да управо грана коју бришемо прекида контуру. То важи за сваку грану, па је свака грана у саставу контуре. Из тога следи да је тражени граф управо контура непарне дужине. ▲

Пример 5.5. Конструисати критично 6-хроматски граф на тачака тако да је степен сваког чвора бар , где је непаран број.

Решење. Познато нам је да је критично 3-хроматски граф контура непарне дужине. Пошто је непаран то је контура са тачака критично 3-хроматски граф. Ако посматрамо две такве контуре (пошто нам је дато тачака), обе су критично 3-хроматске, уочавамо да ако свако теме једне спојимо са сваким теменом друге добијамо критично 6-хроматски граф, а степен сваког чвора је . На слици 4.13 је представљен један такав граф за ▲



Слика 4.13

Закључак

Овај рад је концентрисан искључиво на бојење графова у смислу да се граф обоји правилно са што мање боја. Важно је напоменути да постоји још једно, ништа мање битно, питање у вези са бојењем графа. А то је: На колико начина се то може учинити? Одговор на такво питање даје хроматски полином, а тај појам је у теорију графова увео *G. D. Brikhoff* 1912. године дефинисавши га само за планарне графове (са циљем да уз помоћ њега реши проблем четири боје). *H. Whitney* је генералисао хроматски полином за општи случај графа 1932. године. Данас, хроматски полином заузима централно место у алгебарској теорији графова и незаобилазан је део теорије графова уопште.

Поред бојења чворова графа наведеног у овом раду, постоје и многа друга бојења од којих су најпопуларнија *list-colouring* (за сваки чвор постоји листа дозвољених боја и чворови се боје тако да су суседни различите боје) и бојење грана графа(боје се тако да су суседне гране различите боје). Сви начини бојења графова се на неки начин могу свести на бојење чворова, стога бојење чворова служи као основа за остала бојења.

У овом раду наведене теореме и особине бојења графова су само скроман али веома битан увод у велику област теорије графова која из дана у дан све више напредује и налази своју примену у све више области. Због те ненадмашне вредности сам и одлучила да овај рад посветим управо бојењу графова. Овом приликом се захваљујем свом ментору Др Соњи Чукић на великој подршци и помоћи приликом писања овог рада.

Литература

1. *R. J. Wilson*: *Introduction to Graph Theory* , четврто издање, Лондон 1996.
2. *J. A. Bondy, U. S. R. Murty: Graph Theory* , *San Fancisco, Berkeley* 2008.
3. Владимир Балтић, Драган Стевановић, Марко Милошевић: Дискретна математика, Београд 2004.
4. Часопис Квант
5. *О. И. Мельников*: *Занимательные задачи по теории графов*, друго издање, Минск 2001.
6. *L. Lovasz*: *Combinatorial Problems and Exercises*, AMS 1993.