Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

-из предмета физике-

Електромагнетизам у N димензија са нагласком на $\mathrm{N}=2$

Ученик
Душан Ђорђевић, 4д

Ментор
др Бранислав Цветковић

Београд, јун 2017.

Садржај

1

Увод

Човек је кроз своју историју тежио што бољем разумевању појава око себе. Процесом разумевања тих појава он је интектуално напредовао и ширио своје знање. Но, човек је у својим размишљањима неретко ишао и иза граница света који познаје и размишљао о стварима изван њега. Старогрчки математичари Диофант и Херодот из Александије су разматрали објекат назван „динамокоцка”, квадрат помножен коцком. Овакав објект се може разматрати једино као плод маште, и није имао примена у пракси, те размишљање о њему и њему сличним стварима није наишло на одобравање целокупне јавности. Старогрчки математичар Папус из Александрије (300 година п.н.е) сматра да је дискусија оваквих објеката беспотребна и да не треба трошити време на непостојеће. Иако су многи научници кроз векове заступали овакво мишљење, немачки филозоф Имануел Кант (*Immanuel Kant*)разматра природу света и његове димензије. Кант у свом раду *Thoughts on the True Estimations of Living Forces* спекулише да је димензија света у којем живимо одређена законом гравитације, то јест чињеницом да гравитациона сила опада са квадратом растојања. Иако је доста тога рекао о димензијама у својим делима, Кант никада није до краја објаснио начин помоћу којег је дошао до овог закључка. Но, можемо претпоставити да је он до оваквог закључка дошао помоћу размишљања о нечему што је постављено након његове смрти, о Гаусовом закону. Наиме, користећи њега нама није тешко закључити следеће: посматрајући тачкасти објекат масе m и описавши две сфере око њега радијуса r_1 и радијуса r_2, при чему vажи $r_1 < r_2$, користећи чињеницу да је флукс кроз сферу полупречника r дат са

$$\Phi = \int_S g \mathrm{d}S,$$

где g представља гравитациону силу по јединици масе, као и претпоставку да је гравитационо поље радијално, добијамо да је $\Phi_1 = \int_S g\mathrm{d}S = g_1 \cdot S_1$ и $\Phi_2 = \int_S g\mathrm{d}S = g_2 \cdot S_2$ где је S површина сфере у димензији у којој се налазимо($S_1 = 4\pi r_1^2 \wedge S_2 = 4\pi r_2^2$, под претпоставком да је димензија нашег простора 3). Флукс по Гаусовом закону зависи од укупне масе обухваћене посматраном површином, те можемо тврдити да је флукс исти кроз сферу са полупречником r_1 и кроз сферу са полупречником r_2. Одавде, користећи закон гравитације лако налазимо да је површина сфере у нашем просто-

ру сразмерна квадрату полупречник исте. Дакле, оваква ситуација одговара свету са 3 димензије, јер би другачији број димензија захтевао сразмерност површине сфере неком другом степену, а то према закону гравитације није могуће.
Наравно, овај упрошћен класични модел стварности даје недовољан доказ тродимензионалности света у којем живимо. Пре свега, разматрање би се у многоме закомпликовало када бисмо анализирали ситуацију са становништва закривљених координата и нетривијалних топологија дозвољених у општој теорији релативности. Ту не можемо увести претпоставку хомогености и изотропности просора, нити да је метрика простора Еуклидска. Такође, Гаусов закон не би било могуће применити у уопштеној ситуацији. Чак и без ових тврдњи налазимо непотпуност доказа да је свет тродимензионалак, који лежи у томе да смо кренули од познатих физичких закона и на основу њих одредили димензију света, а не обрнуто. Образложење тврдње лежи вероватно у томе што је Кант веровао у то да су закони природе примарни и да они као такви одређују димензију света.
Јасно је, не улазећи чак ни у принцип деловања сила, да је наш доживљај свтеа тродимензионалан (Едвин Абот Абот је 1884. године објавио новелу *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, где је описао живот у дводимензионалном свету. Касније се јављају многе књиге и филмови испирисани овом идејом). Но ипак се у науци двадесетог века јављају значајни напреци у развоју топологија више димензија, пре свега од стране математичара Менгера и Урисона, као и теорије које користе више од три димензија (Калуца и Клајн формулишу јединствену теорију гравитације и електромагнетизма користећи пету димензију, вишедимензионални простори се користе у теорији струна...).Но све теорије које почивају на тој идеји у многоме превазилазе намене овог рада. Наше интересовање пре свега ћемо фокусирати на електромагнетизму, и анализираћемо електромагнетне појаве које се јављају у различитим димензијама.

Шкотски физичар и математичар Џејмс Клерк Максвел (*James Clerk Maxwell*) је у свом чувеном раду из 1865. године спојио два засебна, и до тад неспојива феномена, електрицитет и магнетизам. Његова теорија описује поашање два поља, електричног **E** и магнетног поља **B**, који зависе од густине наелектрисања ρ и густине електричне струје **J**. Када је објавио свој рад, Максвел није користио данас стандардну векторску нотацију, већ је своје једначине објавио у облику следећих 20 једначина:

$$e + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

$$\mu\alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$$

$$\mu\beta = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\mu\gamma = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$P = \mu(\gamma\frac{\partial y}{\partial t} - \beta\frac{\partial z}{\partial t}) - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$Q=\mu(\alpha\frac{\partial z}{\partial t}-\gamma\frac{\partial x}{\partial t})-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$R=\mu(\beta\frac{\partial x}{\partial t}-\alpha\frac{\partial y}{\partial t})-\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}=4\pi p' \qquad p'=p+\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}=4\pi q' \qquad q'=q+\frac{\partial g}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}=4\pi r' \qquad r'=r+\frac{\partial r}{\partial t}$$
$$P=-\xi p \quad Q=-\xi q \quad R=-\xi r$$
$$P=kf \quad Q=kg \quad R=kh$$
$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=0,$$

где важи веза између оригиналних и модерних промењивих $\mathbf{E} \leftrightarrow (P,Q,R)$; $\mathbf{D} \leftrightarrow (f,g,h)$; $\mathbf{H} \leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma)$; $\mathbf{B} \leftrightarrow \mu(\alpha,\beta,\gamma)$; $\mathbf{J} \leftrightarrow (p,q,r)$; $\rho \leftrightarrow e$; Ψ је електростатички потенцијал; (F,G,H) је магнетни потенцијал.

Примећујемо да је у првобитној верзији у Максвелове једначине био укључен Омов закон, као и Лоренцова сила и закон одржања наелектрисања. Тек је касније Оливер Хедвајс (*Oliver Heaviside*), самоуки енглески инжињер, математичар и физичар увео у употребу записе преко векторске анализе. Облици Максвелових једначина математички еквивалентни векторским су диференцијални и интегрални облици. У овом матурском раду најчешће ће бити коришћен диференцијални облик Максвелових једначина, о ком ће бити више речи у наредним поглављима. Надаље, биће речи о електромагнетним појавама у једној димензији, те у две, на којој се и највише задржавамо због тога што се у њој јављају први нетривијални примери електромагнетних појава, те завршавамо овај део матурског рада дискусијом о четвородимензионалном простору и уопштењем на $N>4$ диментија. Но пре него што кренемо у истраживање ових феномена, потребно је дефинисати одређене математичке појмове који нису по плану и програму Математичке гимназије.

2

Диференцијалне форме

Грубо речено, диференцијална форма представља било коју величину која се може интегралити, укључујући диференцијале. Идеја о диференцијалним формама проистекла је из радова два математичара. Први је немачки полимат Херман Грасман (*Hermann Günther Grassmann*) који је 1844. године у својој књизи *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* развио идеју алгебре где симболи представљају геометријске објекте. Он је овим увео у математику спољашњу алгебру, која се заснива на спољашем производу. Почетком двадесетог века Ели Картан (*Elie Cartan*) на основу Грасманове алгебре заснива спољашњу анализу. Спољашња анализа се показао као природан језик теорије поља, јер поједностављује решења проблема из ове области, а уједно даје једноставне и компактне математичарске формуле. Наравно, математички је могуће потпуно формално увести диференцијалне облике и спољашљу анализу, но то је пре свега обиман посао и захтевао би пре свега увођење многих других математичких појмова из линеарне алгебре те такав математички формализам неће бити предмет овог рада. Дакле, овде ће пре свега бити дат покушај објашњења диференцијалних форми не улазећи превише у математику која стоји иза њих.

2.1 Диференцијална 1-форма

Електрично и магнетно поље су примери диференцијлних форми. Градијент, ротор и дивергенција се могу протумачити као различити аспекти деловања једног оператора d на диференцијалну форму. Основна теорема анализе, Стоксова теорема као и Гаусова теорема само су специјални случајеви једне теореме о диференцијалним облицима. Но, поред тога што су очигледно корисне, никада се током средње школе нисмо сусрели са појмом диференцијалних форми. Разлог томе је пре свега недовољно познавање математике да би успели да их разумемо. Ипак, понекад је могуће приступити проучавању теорије без удубљивања у њену математичку позадину.

Посматрајмо вектор електричног поља $\mathbf{E} = E_1\mathbf{e_x} + E_2\mathbf{e_y} + E_3\mathbf{e_z}$. Једна од интерпретација електричног поља која је општеприхваћена јесте да оно представља силу која делује на пробно наелектрисање. Са друге стране, електрично поље можемо постматрати са енергетског аспекта; енергија која је потребна да се у електричном пољу наелектрисање q пренело са позиције $\mathbf{r_1}$ на позицију $\mathbf{r_2}$ је дата са

$$W(t) = -q \int_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r_2}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

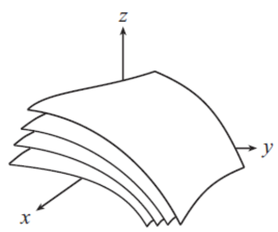
Ако у ову једнакост уведемо смену $\mathcal{E} = E_x(x,y,z,t)\mathrm{d}x + E_y(x,y,z,t)\mathrm{d}y + E_z(x,y,z,t)\mathrm{d}z$ долазимо до једначине

$$W(t) = -q \int_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r_2}} \mathcal{E}.$$

Величина $\mathcal{E}$ представља линеарну комбинацију диференцијала и има три независне компоненте, налик на вектор. Ова величина се назива 1-форма. Кључна разлика између ове величине и вектора је у томе што су ортови оса замењени диференцијалима $\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}y$ и $\mathrm{d}z$. Генерлно, било која величина која се може написати као линеарна комбинација ових доференцијала представља 1-форму. Сабирање две 1-форме наликује на сабирање вектора, то јест за дате две 1-форме $A = A_1\mathrm{d}x + A_2\mathrm{d}y + A_3\mathrm{d}z$ и $B = B_1\mathrm{d}x + B_2\mathrm{d}y + B_3\mathrm{d}z$ имамо да важи

$$A + B = (A_1 + B_1)\mathrm{d}x + (A_2 + B_2)\mathrm{d}y + (A_3 + B_3)\mathrm{d}z.$$

Када радимо са векторском репрезентацијом електричног поља често нам је од помоћи да имамо замишљену слику линија поља, то јест линија које имају особину да тангента на њих у свакој тачки простора има правац електричног поља у тој тачки. Слично и при раду са диференцијлним формама корисно је имати на уму њихову визуелну репрезентацију. Шта представља та визуелна интерпретација диференцијалних форми можда је најлакше утврдити на горепоменутом примеру електричог поља. Интеграл електричног поља по некој контури између две тачке одређује разлику потенцијала између њих. Тачке између којих је овај интеграл 0 одговарају тачкама на еквипотенцијалној површи. Заправо, вредност интеграла биће пропорционална броју еквипотенцијалних равни које линија која повезује две тачке пресеца.



Слика 2.1: 1-форма се графички може представиди површинама.

Дакле, 1-форму можемо најлакше замислити као површи. 1-форма $\mathrm{d}x$ се може графички представити као површи нормалне на x осу и удаљене за јединично растојање. Приметимо да овако дефинисане површине задовољавају тврдњу да је интеграл по путањи која пресеца 4 диференцајлне форме баш 4, или $\int_0^4 dx = 4$. Наравно, ово је само делимично тачно, јер би са променом горње границе интеграла на 4.25 интеграл добио вредност од 4.25, док би идаље путања пресекла само 4 површи. У овом случају морамо рећи да је могуће да путања не пресеца цео број површи, него четири површи са којима су пресеци очигледни и једну површ са уделом $\frac{1}{4}$. Важно је такође напоменути да је битна орјентација површи при продору замишљене линије кроз њу. Приметимо да у случају да два пута пресечемо исту раван она се неће бројати два пута, него ће се ова два продора поништавати, због очигледне разлике у орјентацијама равни при продорима. Орјентација површи се може означити стрелицама на цртежу.

Управо описана ситуацијама са еквипотенцијалним равнима одговара електростатичком случају. Када електрично поље није константно, него промењиво у времену ове равни могу бити коначне, или се могу сретати (узмимо за пример електрично поље у кондензатору где оно варира са временом; у том случају електрично поље је јаче што смо ближе центру кондензатора, те се са приближавањем центру „додају" нове површи).

Наравно, као што је напоменуто, овде није дата математичка дефиниција 1-форми. Покушај формалног увођења 1-форме биће детаљно анализиран у следећем подпоглављу.

2.2 Покушај математичке формализације 1-форме

Да бисмо успели да формално уведемо диференцијалну 1-форму, потребно је дефинисати пар математичких појмова. Прва ствар коју требамо дефинисати су *многострукости*. Многострукости представљају апстрактне тополошке просторе у којима свака тачка има околину која подсећа на еуклидски простор.

Дефиниција 1. Тополошки простор је уређени пар $(X, \mathcal{T})$ скупа X и подскупа $\mathcal{T}$ партитивног скупа скупа X са особинама:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. свака унија скупова из $\mathcal{T}$ је скуп из $\mathcal{T}$
3. пресек коначно много скупова из $\mathcal{T}$ је скуп из $\mathcal{T}$.

Ако желимо многострукости прецизније дефинисати морамо увести појам глатког мапирања. Мапирање f отвореног скупа $U \subset \mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}^m$ се назива глатко ако има континуалне парцијалне изводе свих редова. Међутим, ако је домен мапирања f није отворен скуп, није увек могуће говорити о парцијалним изводима, те морамо установити општију дефиницију.

Дефиниција 2. Мапирање $f : X \to \mathbb{R}^m$ дефинисано на произвољном подскупу X из $\mathbb{R}^n$ се назива глатким ако се може локално проширити на глатко пресликавање на отвореном скупу; тачније, ако око сваке тачке $x \in X$ постоји отворен скуп $U \subset \mathbb{R}^n$ и глатко мапирање $F : U \to \mathbb{R}^m$такво да вdefажи да је F једнако f на скупу $U \cap X$.

Дефиниција 3. Глатко мапирање $f : X \to Y$ два подскупа Еуклидских простора је дифеоморфизам ако је бијективно, и ако је инверзно мапирање $f^{-1} : Y \to X$ такође глатко. X и Y су дифеоморфни ако постоји пресликавање такво пресликавање f између њих.

Сада смо у могућности да дефинишемо многострукост.

Дефиниција 4. Претпоставимо да је X посдкуп неког Еуклидовог простора $\mathbb{R}^n$. Онда је X *к-димензионлна многострукост* ако је локално дифеоморфна са $\mathbb{R}^k$, одностно ако свака тачка x поседује околину V у X која је дифеоморфна са отвореним скупом U из $\mathbb{R}^k$. Скуп свих глатких мапирања на многострукости означаваћемо са $C^\infty(M)$.

Са овим сетом дефиниција увели смо појам многострукости. Следећи појам који требамо изучити пре увођења 1-форме јесу векторска поља на многострукостима. Опште је позната нотација вектора у којој се вектори изражавају преко својих координата $(v_1, ..., v_n)$. Међутим, представљање вектора на многострукостима у оваквом облику није тако једноставно. Ако посматрамо два вектора на сфери, покушај изражавања њих преко истог базиса довео би до непријатности. Трик у дефинисању вектора на многострукостима јесте у томе што за дато поље стрела (векторе можемо визуелизати као стреле) можемо наћи изводе неке функције f у правцу тих стрела. Ако је $\mathbf{v}$ векторско поље, а f функција у $\mathbb{R}^n$, извод функције f у правцу вектора $\mathbf{v}$ је

$$\mathbf{v}(f) = \sum_j v_j \partial_j f.$$

Како ово важи за било коју функцију f, можемо закључити да је $\mathbf{v} = \sum_j v_j \partial_j$. Дакле, вектоско поље $\mathbf{v}$ не треба поистовећивати са његовим компонентама v_j, већ са оператором $v_j \partial_j$. Комбинација векторског поља и функције је друга функција на многострукости која је повезана са изводом почетне функције. Овим смо постигли да нам је векторско поље независно од избора координата.

Дефиниција 5. Векторско поље $\mathbf{v}$ на многострукости M је дефинисано као функција из $C^\infty(M)$ у $C^\infty(M)$ која задовољава следеће аксиоме:

1. $\mathbf{v}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{v}(f) + \beta \mathbf{v}(g)$
2. $\mathbf{v}(fg) = g\mathbf{v}(f) + f\mathbf{v}(g)$

за све $f, g \in C^\infty(M)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Скуп свих вектора на многострукости M означаваћемо са $\mathfrak{F}(M)$. Приметимо да је извод функције у правцу вектора $\mathbf{v}$ дат са $\nabla f \cdot \mathbf{v}$, где ∇ представља генерализацију оператора градијента на многострукостима. На њима можемо дефинисати функцију $\mathrm{d}f$, која је веома слична ∇f на било којој многострукости.

Дефиниција 6. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција реалних промењивих из скупа C^∞. Дефинишемо диференцијал или 1-форму као линеарно мапирање $\mathrm{d}f : (M) \to C^\infty(M)$ дефинисано са

$$\mathrm{d}f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(f),$$

за све $\mathbf{v} \in \mathfrak{F}(M)$

Како је $\mathrm{d}f$ линеарно мапирање, оно мора да задовољава следећа својства:

1. $\mathrm{d}f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{v}+\mathbf{w})f = (\mathbf{v})f + (\mathbf{w})f = \mathrm{d}f(\mathbf{v}) + \mathrm{d}f(\mathbf{w})$
2. $\mathrm{d}f(g\mathbf{v}) = g\mathbf{v}(f) = g\mathrm{d}f(\mathbf{v})$.

Сада смо у могућности да користимо диференцијалне форме са математичког аспекта. Помоћу наведених дефиниција није тешко добити да су 1-фоме линерано независне, што показује да се било која 1-форма може написати као линеарна комбинација $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_i$.

2.3 p-форме

Иако је могуће формално увести принцип $p-$форме, то ће у овом раду бити изостављено, те ћемо исте увести кроз познате примере у физици. Сагласно са дефинисањем 1-форми, јачина мангетног поља предтсвља 1-форму. Извор магнетног поља јесте наелектрисање у покрету, то јест струје. Претпоставимо да имамо струју i која тече у потизивном смеру x осе. Ову струју налатимо као $\int_A J_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где је A површина у yz равни кроз коју тече струја. Оваквим интеграљењем струја ће очигледно бити позитивна ако је густина струје такође позитивна. Но, обртањем координата на такав начин да сада струја продире површину A са друге стране очигледно требамо добити негативну вредност струје. Да бисмо ово постигли, морамо увести оријентацију површи A.

Спољашње диференцијалне форме нам омогућавају да дефинишемо орјентацију координатног система. Према томе, уводимо спољашњи производ $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ са особином

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y.$$

Спољашња диференцијална форма представља спољашњи производ диференцијалних форми. Спољашње диференцијалне форме које се састоје од спољашњег производа два диференцијала или од суме таквих производа називају се 2-форме. Можемо одлучити да ли узимамо $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \mathrm{y}\mathrm{d}z$ или $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Ако се одлучимо за $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$, можемо писати $i = \int_A J_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

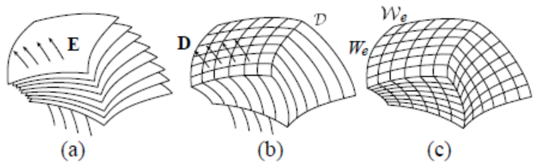
Посматрано са становништва физике, 2-форме представљају величине које интегралимо по површини. Ток флуида, флукс електричног поља, флукс магнетног поља само су неке величине које представљају 2-форму. Општи облик 2-фоме је :

$$C = C_1 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C_2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C_3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Коришћењем спољашњег производа можемо формирати диференцијалне форме реда већег од два. У $n-$димензионалном простору можемо имати диференцијалне форме реда од 1 до n. Спољашњи производ има и следећу особину

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0.$$

2-форме су графички представљене као фамилија цеви. На пример 2-форма $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ се може визуелизовати као скуп паралелних равних, нормалних на x и y осу које



Слика 2.2: Графички приказ 1-форме, 2-форме и 3-форме

се пресецају и тиме граде тубе које се простиру дуж z осе. 3-форме се састоје од коцкастих „кутијица" чије странице одговарају 1-формам dx,dy и dz. На слици 2.2 дат је графички приказ јачине електричног поља $\mathcal{E}$ као 1-форме, флукса електростатичке индукције $\mathcal{Q}$ као 2-форме и енергије електричног поља $\mathcal{W}_e$ као 3-форме. Густина наелектрисања је уобичајан пример 3-форме. Њу у овом облику можемо написати као $\mathcal{Q} = \rho dx \wedge dy \wedge dz$. Сходно томе, укупно наелектрисање унутар неке запремине налазимо интеграцијом

$$q = \int_V \mathcal{Q}.$$

При визуализацији 3-форме као на слици 2.2c треба имати на уму да је запремина „кутијице" инверзно пропорцијална густини наелектрисања.

Случај када 1-форма представља неконзервативно поље већ је био анализиран у раду. У том случају се додају нове површи. Ова особина се може локално анализирати уз помоћ оператора спољашњег извода дефинисаног на следећи начин

$$\mathrm{d} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{d}z\right] \wedge .$$

Овај оператор пресликава p-форму у $(p+1)$-форму. Ако је $\mathcal{E}$ неконзервативно поље, онда је 2-форма $d\mathcal{E}$ различита од 0. Две важне особине спољашњег извода су:

1. $\mathrm{d}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \mathrm{d}\mathcal{U} + \mathrm{d}\mathcal{V}$
2. $\mathrm{d}(\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}) = d\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} + (-1)^{stepen(\mathcal{U})}\mathcal{U} \wedge \mathrm{d}\mathcal{V}$

При повезивању интеграла диференцијалних форми и спољашњег извода користи се Стоксова теорема:

$$\int_M \mathrm{d}w = \oint_{\partial M} w,$$

где је M нека област у простору,а ∂M њена граница. Димензија ∂M треба да се подудара са степеном форме w. Ако је w скалар или такозвана 0-форма онда се стоксова теорема своди на основну теорему анализе. Ако је w 1-форма, Стоксова теорема се може графички протумачити чињеницом да нове површи w настају од туба dw. Када је w 2-форма, ова теорма говори да нове тубе настају и шире се од 3-форме.

2.4 Хоџов оператор дуалности

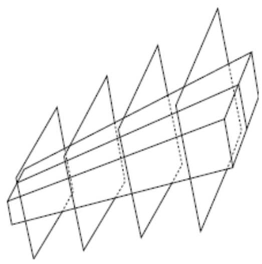
У тродимензионалном простору , 1-форме и 2-форме имају по три независна диференцијал, тако да су простори 1-форми и 2-форми изоморфни. Хоџов оператор дуалности ($\star$) је пресликавање између два изоморфна простора. У Еуклидској метрици имамо:

$$\star \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \qquad \star\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \mathrm{d}x$$

$$\star \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \qquad \star\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$$

$$\star \mathrm{d}z = dx \wedge \mathrm{d}y \qquad \star\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}z.$$

Векторска величина која је дуална са 1-формом α дуална је и са 2-формом $\star\alpha$. Између 0-форми (скалара) и 3-форми овај оператор делује тако што од функције f прави 3-форму $\star f = f\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$. У тродимензионалном простору важи да је $\star\star\alpha = \alpha$, за било коју форму α. Графички дејство овог оператора можемо приказати на следећи начин: посматрајмо 1-форму $\mathrm{d}x$, површи које она образује су нормалне на x осу. Применом Хоџовог оператор дуалности добијамо $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, односно тубе које се простиру дуж x осе, тако да су површи 1-форме $\mathrm{d}x$ нормалне на ове тубе. У општем случају, Хоџов оператор дуалности делује на 1-форму и 2-форму тако што претвара површи у на њу нормалне тубе и тубе у на њу нормалне површи, као што је илустровано на слици 2.3.



Слика 2.3: Графички приказ деловања Хоџовог оператора дуалности на 1-форму

Стриктно говорећи, за произвољну p-форму α, $\star\alpha$ је јединствена $(n-p)$-форма таква да једначина

$$\alpha \wedge \beta = \langle \star\alpha, \beta \rangle \sigma$$

важи за било коју $(n-p)$-форму β. У овој једнакости, σ је јединични део запремине , а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означава унутрашњи (скаларни) производ увден уз помоћ одговарајуће метрике, која је у нашем случају еуклидска.

3

Максвелове једначине

Најпознатији облик Максвелових једначина је њихов векторски облик

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

где је $\mathbf{D}$ електростатичка индукција, $\mathbf{H}$ јачина магнетног поља, $\mathbf{E}$ јачина електричног поља и $\mathbf{B}$ магнетна индукција. Овај систем једначина се показао одличним при испитивању електромагнетних појава у три димензије у одсуству везаних наелектрисања, но проблем настаје у интуицији његове примене у другим димензијама. На основу ових једначина не можемо лако доћи до појава које се дешавају у дводимензионалном електромагнетизму пре свега јер нам је појам векторског производа у две димензије нејасан. Да би смо то превазишли, користићемо већ разрађен материјал диференцијалних форми и спољашњег произода који нам служи као уопштење векторског производа.

3.1 Диференцијални облик Максвелових једначина

Коришћењем Стоксовог идентитета и Максвелових једначина у интегралном облику могуће је добити следећи сет једначина:

$$\mathrm{d}\mathcal{D} = \mathcal{Q}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{B} = 0$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}.$$

Приметимо најпре предности оваквог записа. У векторској нотацији Гаусов закон је записан преко оператора дивергенције. Овај оператор можемо лако визеализовати. Када векторско поље има ненулту дивергенцију мора постојати или извор поља или његово потонуће. Одговарајућа слика при раду са диференцијалним обликом Гаусовог закона подједнако је интуитивна. Кутијице 3-форме производе тубе 2-форме које су орјентисане или од нелектрисања или ка наелектрисању.

Са друге стране, при векторској нотацији оператор ротора је мање интуитиван. Магнетно поље бесконачно дугог проводника су концентричне кружнице, и лако би се могло погрешно закључити да је ротор тог поља у свакој тачки ненулти (заправо је 0 у свакој тачки ван проводника). При раду са диференцијалним обликом Маквелових једначина коришћењем оператора спољашњег изводад можемо закључити да тубе 2-форме $\mathcal{J}$ формирају површи 1-форме $\mathcal{E}$. Ван изора магнетног поља (жице) нема додавања нових површи, те је ротор 0.

Иако смо са ове четири једначине већински покрили 20 оригиналних једначина, остају нам још неке. Закон одржања наелектрисања, Омов закон и Лоренцову силу изостављамо јер нису у директном контакту са електричним и магнетним пољем, али нам зато требају једначине везе између $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$, као и између $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$. Вектор електричног поља $\mathbf{E}$ дуалан је и 1-форми $\mathcal{E}$ и 2-форми $\mathcal{D}$. Одавде можемо закључити да су $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$ повезани преко Хоџовог оператора дуалности. Користећи везу између вектора електричног поља и вектора електростатичке индукције можемо писати

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \star \mathcal{E}$$

као и аналогну везу

$$\mathcal{B} = \mu_0 \star \mathcal{H}.$$

Наравно, у случају да је посматрана средина линерни диелектрик морали би да заменимо ϵ_0 са ϵ и μ_0 са μ, но како радимо са вакуумом, можемо оставити ове једначине у датом облику.

3.2 Енергија ЕМ поља

Опште је познат појам густинске енергије електричног и магнетног поља, односно енергији по јединици запремине. У диференцијалном облику ове енергије су:

$$\mathcal{W}_e = \frac{1}{2}\mathcal{E} \wedge \mathcal{D} = \frac{1}{2}(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

$$\mathcal{W}_m = \frac{1}{2}\mathcal{H} \wedge \mathcal{B} = \frac{1}{2}(H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

Помножимо (у смислу спољашњег производа) са леве стране Амперов закон (четврту Максвелову једначину) са $\mathcal{E}$, а Фарадејев закон (трећу Максвелову једначину) са леве стране са $\mathcal{H}$.Добијамо

$$-\mathcal{E} \wedge \mathrm{d}\mathcal{H} = -\mathcal{E} \wedge (\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J})$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E} \wedge \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \wedge \mathcal{H}.$$

Сабирањем ове две једначине, њиховим сређивањем и коришћењем друге особине спољашњег извода добија се

$$\mathrm{d}(\mathcal{E} \wedge \mathcal{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\mathcal{E} \wedge \mathcal{D} + \frac{1}{2}\mathcal{H} \wedge \mathcal{B}) - \mathcal{E} \wedge \mathcal{J}.$$

Након увођења смене $\mathcal{S} = \mathcal{E} \wedge \mathcal{H}$ добијени израз се може записати као

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = -\frac{\partial \mathcal{W}_e}{\partial t} - \frac{\mathcal{W}_m}{\partial t} - \mathcal{E} \wedge \mathcal{J}.$$

Величина $\mathcal{S}$ одговара диференцијалној Поинтиговој форми. Интеграљењем последње једначине по запремини V добијамо интегрални облик Поинтигове теореме

$$\oint_{\partial V} \mathcal{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathcal{W}_e - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathcal{W}_m - \int_V \mathcal{E} \wedge \mathcal{J}.$$

Овим смо издискутовали сву потребну тематику пре анализе конкретног предмета овог рада. До сада је било речи, сем ако то није било директно наглашено, о тродимензионалном случају. У наставку бавићемо се случајевима у којима димензија простора није три. Посебно морамо обратити пажњу да анализирајући ситуације у другим дименијама ми не анализирамо случајеве где се у систему из симетрије може у разматрању искључити једна од оса, већ посамтрамо случајеве где се целокупан феномен, заједно са свим изворима налази у тој димензији. Дакле,ући ћемо у један крајње неинтуитиван свет и потрудићемо се да откријемо законе електромгнетизма у њему.

Од сада па надаље реч ће бити о појавама из електромагнетизма у димензијама различитим од три. Иако наизглед бескорисна анализа, због очигледног мањка примене, њом стичемо интуицију о електромангнетизму генерално. Могућност потпуног разумевања електромагнетизма у једној или у две димензије свакако нам отвара могућности у разумевање истог у три. Но, морамо видети у коликој мери се концепт електромагнетизма мења са променом димензије простора. При будућим анализирањима ће се сматрати, ако другачије наглашено, да се ради о n-димензионалном простору где се време посматра одвојено од просторних координата. Такође, као што се и до сада могло приметити, ако то није другачије наглашено, постојање магнетних монопола неће бити узимано у разматрање.

4

Електромагнетизам у различитим димензијама

4.1 Електромагнетизам у једној димензији

Почнимо са разматрањем електромагнетних појава у једној димензији. Као што смо већ напоменули, максимална димензија диференцијалне форме не може да пређе димензију простора, те у овом случају постоје само 1-форме. Дакле, величина $\mathcal{Q}$ представља 1-форму и одговара наелектрисању по јединици дужине. Такође, у случају електромагнетизма у једној димензији нема магнетног поља (ако искључимо претпоставку о магнетним монополима), што природно проистиче из чињенице да не постоје 2-форме $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ и 1-форма $\mathcal{H}$. Но, иако $\mathcal{D}$ не постоји као 2-форма, морамо имати везу која ће нам помоћи да повежемо електрично поље са наелектрисањима.

4.1.1 Електрично поље

И без удубљивања у било какву математику можемо стећи увид у појаве и законитости које важе у овом свету. Овај свет би одговарао ситуацији када би целокупни наш тродимензионални простор сместили у уску цев. У оваквој ситуацији можемо рећи да је електрично поље константно, јер је густина линија поља које потичу од једног тачкастог наелектрисања константна за све тачке у протору. Како магнетно поље не утиче на наелекрисања која се крећу дуж исте осе у овој ситуацији оно не постоји. Сет једначина који би описао посматрану ситуацију је

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = 0$$

$$\mathrm{d}\mathcal{D} = \mathcal{Q}$$

где $\mathcal{D}$ представља 0-форму. Из друге једначине применом Стоксовог закона, где област M представља праву, а њену границу представљају њене крајње тачке добијамо да је поље тачкастог наелектрисања

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0}.$$

Како нема магнетног поља нема ни зрачења, те брзина светлости не игра никакву улогу у оваквом свету. Сила између два тачкаста наелектрисања је очигледно $F = \frac{q_1 q_2}{2\epsilon_0}$. Јачина поља у тачки са координатом x је $E = \frac{q_+ - q_-}{2\epsilon_0}$, где је q_+ укупно наелектрисање које има x координату већу него посматрана тачка, а q_- укупно наелектрисање које има x координату мању него она, и оно је независно од кретања наелектрисања (докле год она не прелазе тачку са координатом x).

4.2 Електромагнетизам у две димензије

Да бисмо могли приступити анализи проблема морамо развити прво спољашњу анлизу у $\mathbb{R}^2$. У две димензије 0-форма представља тачку и њен основни облик је 1, 1-форма представља линију и основни облици су $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$, а 2-форма представља површ са основним обликом $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Оператор спољашњег извода је

$$\mathrm{d} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\wedge$$

4.2.1 Хоџов оператор дуалности у две димензије

Начин на који оператор звезде делује на 0-форму се може наслутити на основу тродимензионалног случаја. Он шаље 0-форму у 2-форму тако да је

$$\star_2 1 = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$\star_2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 1,$$

где двојка у индексу означава да се ради о оператору у две димензије. При деловању овог оператора на 1-форму морамо кренути од дефиниције Хоџовог оператора дуалности. Како је димензија нашег простора $n = 2$, видимо да оператор звезде слика простор 1-форми у 1-форме. Посматрајмо 1-форму $\alpha = \mathrm{d}x$. Морамо имати да важи

$$\mathrm{d}x \wedge \beta = \langle \star_2 \mathrm{d}x, \beta \rangle \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

где је β произвољна 1-форма. У Еуклидској метрици имамо да је $\langle \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \rangle = \langle \mathrm{d}y, \mathrm{d}y \rangle = 1$ и $\langle \mathrm{d}x, \mathrm{d}y \rangle = 0$. Ако у последњој једначини заменимо $\beta = \mathrm{d}x$ имамо

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0 = \langle \star_2 \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \rangle \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

што показује да $\star_2 \mathrm{d}x$ не може имати $\mathrm{d}x$ компоненту, јер је вредност унутрашњег производа $\langle \star_2 \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \rangle$ нула, док би вредност унутрашњег производа $\mathrm{d}x$ са неком диференцијалном формом која садржи $\mathrm{d}x$ била ненулта. Као последицу овога морамо имати да важи $\star_2 \mathrm{d}x = ady$, где је a нека константа. Узимајући да је $\beta = \mathrm{d}y$ имамо да је

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = a\langle \mathrm{d}y, \mathrm{d}y \rangle \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

одакле следи да је $a = 1$. Сличним поступком добијмо да важи да је $\star_2 \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$. За произвољну 1-форму α важи $\star_2 \star_2 \alpha = -\alpha$. У две димензије 1-форма се може графички представити као фамилија линија. Из претходних једначина видимо да овај оператор пресликава 1-форму у 1-форму нормалну на њу.

4.2.2 Максвелове једначине у две димензије

Максвелове једначине у две димензије су веома сличне онима у три димензије, једина разлика је у томе што је Хоџов оператор дуалности дефинисан на малопре поменут начин. Сет ових једначина је следећи:

$$\mathrm{d}\mathcal{D} = \mathcal{Q}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{B} = 0$$
$$\mathrm{d}\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

са додатним једначинама:

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \star_2 \mathcal{E}$$

$$\mathcal{B} = \mu_0 \star_2 \mathcal{H}.$$

Максвелове једначине у две димензије се могу извести из аналогних у три димензије расписавши једначине по компонентама, те онда формирањем унутрашњег производа са $\hat{z}$ да би се уклонио $\mathrm{d}z$ диференцијал и применом дефиниције спољашњег извода у две димензије и Хоџовог оператора дуалности.

При раду у две димензије интезитет електричног поља $\mathcal{E}$ остаје 1-форма, јер мора представљати потенцијално поље за наелектрисање које је слободно кретати се у xy равни. $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$ представљају скаларна поља која одговарају z компоненти тродимензионалне величине. Из Фарадејевог закона, пошто је $\mathcal{E}$ 1-форма,следи да је $\mathcal{B}$ 2-форма, а онда је самим тим због везе са $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$ је 0-форма.

Посматрајмо густину електричног флукса. Из дејства Хоџовог оператора дуалности можемо закључити да су линије 1-форме $\mathcal{D}$ нормалне на линије 1-форме $\mathcal{E}$. Ако су D_x и D_y компоненте 2-форме у три димензије онда је $\mathcal{D} = -D_y\mathrm{d}x + D_z\mathrm{d}y$. Зато што је физички смер флукса дуж линија 1-форме $\mathcal{D}$ а не нормалан на њу, $\mathcal{D}$ је такозвана испреплетена форма (*eng. Twisted forms*). 1-форма $\mathcal{J}$ је ткође испреплетана форма и њене компоненте су повезане са 3D случајем на исти начин као и код $\mathcal{D}$.

Иако је у тродимензионалном случају могућа анализа проблема без увода појма *twisted form*, форме овог типа постоје и у 3D случају. 3-форма $\mathcal{Q}$ је пример *twisted form* која је оријентисана помоћу знака наелектрисања. Уз њу, *twisted form* представљају и $\mathcal{H}$,$\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$.

Анализирајмо сада проблем силе у 2D електромагнетизму. При овој анализи јављају се два круцијална проблема. Један је одређивање електричног и магнетног поља у некој тачки простора, а други је одређивање зависности силе од ових вектора. Први проблем решавамо аналогно случају у 1D. Коришћењем Максвелових једначина можемо добити једначину електричног поља тачкастог наелектрисања. Користећи чињеницу да је $\mathrm{d}\mathcal{D} = \mathcal{Q}$ коришћењем Стоксове теореме добијамо да је $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{2r\pi\epsilon_0}\hat{\mathbf{r}}$. Сила која потиче од електричног поља ће очигледно бити $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Но, као што је већ напоменуто, магнетно поље у 2D је скаларно поље и уобичајна тродимензионална дефиниција силе преко векторског производа у 2D пада у воду из више разлога. У овом случају, Лоренцова сила која делује на наелектрисање q које се креће брзином $\mathbf{v}$ у електричном пољу $\mathbf{E}$ и магнетном пољу B има облик

$$\mathbf{F} = q\big(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_\perp}{c} B\big).$$

4.2.3 Проток енергије у 2D

У дводимензионалном случју имамо постојање промењивог и електричног и магнетног поља, те самим тим имамо могућност постојања електромагнетног зрачења. Поинтонгов вектор у 2D представљен је 1-формом $\mathcal{S} = \mathcal{E} \wedge \mathcal{H}$. Као и код $\mathcal{D}$ правац простирања је дуж линија 1-форме $\mathcal{S}$. Дакле, математички, Поинтингова форма је *twisted form*. Зато што је $\mathcal{H}$ испреплетена форма, она проузрукује да и $\mathcal{E} \wedge \mathcal{H}$ буде *twisted form*. Јасно је да је овим постигнуто да је физичка орјентација флукса енергије дуж линија 1-форме уместо нормална на њих, као што је случај при неиспреплетаним формама. Због ове разлике у формулацији 2D Поинтигове теореме интеграл вектора који је дуалан $\mathcal{S}$ није уобичајан интеграл по контури са диференцијалним тангентним вектором, већ укључује дифернцијални вектор који је нормалан на путању. Са друге стране , у случају да се изрзи преко диференцијалних форми

$$\oint_{\partial P} \mathcal{S} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \mathcal{H} \wedge \mathcal{B} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \mathcal{E} \wedge \mathcal{D} - \int_A \mathcal{E} \wedge \mathcal{J},$$

где је P контура која ограничава површину .

4.2.4 Таласна једнчина

Као што смо видели у претеходном одељку, проток енергије у две димензије је могућ (присетимо се да то није био случај у једној димензији). Стога, покушајмо добити таласну једначину електричног поља. Оваква једначина описује простирање електричног поља и извешћемо је из Максвелових једначина. За почетак, делујмо на обе стране Фарадеевог закона оператором $\mathrm{d}\star_2$ добијамо

$$\mathrm{d} \star_2 \mathrm{d}\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{d} \star_2 \mathcal{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{d}\mathcal{H}.$$

Коришћењем Амперовог закона изражавамо $\mathcal{H}$, и заменом у претходну једначину добијамо

$$\mathrm{d} \star_2 \mathrm{d}\mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial^2 t}\mathcal{D} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{J}.$$

Применом Хоџовог оператора дуалности на обе стране једнакости и коришћењем везе између $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ ($\star_2\mathcal{D} = -\epsilon_0\mathcal{E}$)добијамо

$$\star_2 \mathrm{d} \star_2 \mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \star_2 \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}.$$

Оператор Лаплас-де Рама дефинисан је на следећи начин:

$$\Delta\alpha = (-1)^{n(p+1)}[(-1)^n \star_2 \mathrm{d} \star_2 \mathrm{d} + \mathrm{d} \star_2 \mathrm{d}\star_2]\alpha.$$

Заменом $n = 2$ добијамо да су сви степени парни, те важи да је

$$\Delta\alpha = [\star_2 \mathrm{d} \star_2 \mathrm{d} + \mathrm{d} \star_2 \mathrm{d}\star_2]\alpha.$$

Рачунањем компонената овог оператора (посматравши његово дејство на произвољну форму чији је степен мањи од три и применом дефиниције спољашњег извода и Хоџовог оператора дуалности) добијамо да овај оператор делује на добро познат начин

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

на компоненте диференцијалне форме. Коришћењем оператора Лаплас-де Рама, везе $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c$ и под претпоставком да је густина наелектрисања 0 добијамо таласну једначину

$$\Big[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big]\mathcal{E} = -\mu_0 \star_2 \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}.$$

Добијена таласна једначина веома подсећа на таласну једначину у 3D случају. Наиме, таласна једначина електричног поља у три димензије има леву страну једнакости исту, док десна страна у 3D случају има предзнак $+$ уместо $-$.

4.2.5 Потенцијал и кретање у дводимензионалној електродинамици

Са датим обиком електричног поља интеграцијом можемо добити изглед електростатичке потенцијалне енергије наелектрисања у том пољу. Она је $W = -\frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0}\ln(r) + C$. Размотримо сада кретање наелектрисане честице наелектрисања q_1 у пољу тачкастог наелектрисања $-q_2$ (супротног знака) које мирује (при овој анализи занемарићемо ефекте зрачења). Ако се честица креће по кружној путањи изједначавањем њеног центрипеталног убрзања са силом интеракције са статичним тачкстим наелектрисањем добијамо

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow mv^2 = \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0}$$

Овим увиђамо да је услов за кретање по кружници независтан од радијуса исте. Размотримо сада ситуацију у којој се наелектрисање q_1 креће не по кружници него по некој другој путањи. Приметимо најпре да је облик електростатичког потенцијала такав да је бесконачан за $r \to +\infty$. Одавде следи да је кретаље наелектрисања у бесконачност немогуће у две димензије. За овакво кретање важи закон одржања енергије (губици услед зрачења се занемарују) и закон одржања момента импулса (сила елекреостатичке интеракције је централна). Ова два закона записана преко једначина у поларним координатама су:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + W(r) = E = const$$

$$mr^2\dot{\varphi} = L = const.$$

Изражавајући $\dot{\varphi}$ из друге једначине и заменом у прву добијамо

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E.$$

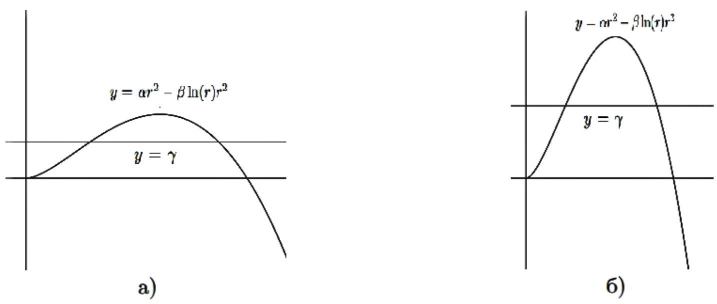
Одавде, изражавањем $\dot{r}$, добијамо

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2}}.$$

Заменом израза за потенцијал при чему узимамо да је константа $C = 0$, добијамо

$$\dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2E}{m}r^2 - \frac{q_1q_2\ln(r)}{\pi\epsilon_0 m}r^2 - \frac{L^2}{m^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{\alpha r^2 - \beta\ln(r)r^2 - \gamma},$$

где су α, β и $\gamma > 0$ одговарајуће смене. Анализирајмо функцију под кореном. Да би постојала орбита у којој се вредност r креће између неке две вредности потребно је да она има две реалне позитивне нуле такве да је вредност те функције у тачкама између њих позитивна. То значи да је потребно да графици функција $y = \alpha r^2 - \beta\ln(r)r^2$ и $y = \gamma$ имају две пресечне тачке, при чему је у области између те две тачке задовољен услов да је график прве функције изнад графика друге. Цртањем графика ових двеју функција за различите вредности параметра α и β примећујемо да је то случај, односто да су у 2D електростатици дозвољене орбите између две вредности растојања r. Но, испоставља се да такве орбите нису затворене.



Слика 4.1: Графици функција $y = \alpha r^2 - \beta\ln(r)r^2$ и $y = \gamma$ у случајевима када је а) $\alpha > 0$ и б) $\alpha < 0$

4.2.6 Квантни Холов ефекат

Холов ефекат је појава када у материјалу чврстог агрегатног стања кроз који је пропуштена струја и који је постављен у спољашње попречно магнетно поље, долази до појаве попречног напона. Вредност овог напона лако се може добити коришћењем чињенице да се наелектрисања не крећу у попречном смеру, то јест да је Лоренцова сила која потиче од магнетног поља изједначена са електричном силом која се јавља усред Холовог напона. Холов напон одавде износи

$$U = \frac{jlB}{ne} = \frac{B}{ned} I = R_H I,$$

где је j густина струје, I јачина струје, l димензија проводника у правцу појаве Холовог напона,d његова димнзија у правцу нормалном на правац простирања струје и на правац појаве Холовог напона, B јачина вектора магнетне индукције, n концентрација електрона у проводнику а e наелектрисање електрона. Холов ефекат је појава која се јавља у 3D свету и откривена је 1879.

Иако је дискусија око 2D света вођена до сада изгледала као чисто теоријска, без практичне примене, показало се као нетачним то тврдити. 1960-их су научници успели формирати дводимензионални електронски гас. Слојеви овог гаса формирани су у одређеним врстама транзистора (Мосфет). Слој електрона је свега $50nm$ танак, док његова друга димензија може ићи до реда величине милиметра. Ово је у многоме допринело открићу квантног Холовог ефекта (1980. година). При успостављању КХЕ температура се снижава до јако ниских температура (између $25mK$ и $500mK$),а магнетно поље које се укључује је јако велико (између $5T$ и $15T$). Тада проводни електрони због (квантномеханичког) процепа екстинкције не могу да се крећу дуж z осе, те су везани за xy раван. Овим је постигнут скоро идеалан дводимензионални електронски гас. Холова проводност $(= 1/\textit{отпорност})$ у овом случају је целобројни умножак елементарне проводности $\frac{e^2}{h}$.

4.3 Електромагнетизам у четири димензије при чему се време не третира одвојено од просторних координата

Следећа анлиза покриће Максвелове једначине при чему време третирамо не као до сада одвојену димензију, већ као компоненту четворовектора у простору Минковског. У четвородимензионалном простору Минковског Максвелове једначине попримају веома компактан облик. Да бисмо утврдили њихов облик почнимо од разматрања интегралне верзије Фарадејевог закона у три димензије. Овај закон је

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathcal{B} = - \int_{\partial A} \mathcal{E}.$$

Интеграљењем ове једначине по времену у временсном интервалу $T = [t_1, t_2]$, и посматрањем времена као четврте координане у додатку са три просторне добијамо

$$\int_A \mathcal{B}\bigg|_{t_2} - \int_A \mathcal{B}\bigg|_{t_1} + \int_{\partial A \times T} \mathcal{E} \wedge \mathrm{d}t = 0.$$

Домен интеграције у четвородимензионалном простору који је формиран помоћу x, y, z и t је дводимензионална површина тродимензионалног цилиндра генерисана транслирањем површи A дуж временске осе од координате t_1 до координате t_2. У првом и другом члану последње једначине интеграција се врши по базама цилиндра, док се код трећег члана интеграција врши по омотачу цилиндра.

Уведимо сада Фарадејеву 2-форму $\mathcal{F}$ у четвородимензионалном простору дефинисану на следећи начин

$$\mathcal{F} = E_x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t + E_y \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + E_z \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + B_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

За ову форму важи

$$\int_{\partial V} \mathcal{F} = 0,$$

где је површина цилиндра ∂V одређена са $\partial A \times t_1 \cup \partial A \times t_2 \cup A \times [t_1, t_2]$. Дакле, флукс Фарадејеве форме увек нула. При интеграљењу исте чланови који садрже електрично поље доприносе интегралу по омотачу цилиндра, док чланови које садрже магнетно доприносе интегралу по базама. Ако за простор интеграције изаберемо површину запремине која се креће дуж временске осе добићемо Фарадејев закон. Ако, са друге стране, изаберемо запремину која се простире кроз све три просторне али не и кроз временку координату добићемо да је флукс магнетног поља нула. На сличан начин можемо конструисати Максвелову форму

$$\mathcal{G} = D_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + D_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + D_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - H_x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t - H_y \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t - H_z \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t.$$

Но, пре него што наставимо са формулацијом четвородимензионалног електромагнетизма у простору Минковског морамо се позабавити са још пар математичких појмова. Најпре, простор Минковског нема Еуклидску метрику. У овом простору растојање између две 1-форме $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ је

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \star_4(\mathcal{A} \wedge \star_4 \mathcal{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z - \frac{A_t B_t}{c^2},$$

где је c брзина простирања електромагнетних таласа у вакууму. Са овом метриком можемо лако увидети на који начин Хоџов оператор дуалности делује на форме у четвородимензионалном простору. Тако, деловање овог оператора на 0-форму описано је једначином $\star_4 1 = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge c\mathrm{d}t$, на 1-форму $\star_4 \mathrm{d}x = -c\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, на 2-форму $\star_4(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = -\mathrm{d}z \wedge c\mathrm{d}t$, на 3-форму $\star_4(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = -c\mathrm{d}t$ и на 4-форму $\star_4(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge c\mathrm{d}t) = -1$. Такође, битно је напоменути и следећа својства Хоџовог оператора дуалности :$\star_4 \star_4 = 1$, $\star_4 \star_4 \star_4 \star_4 = 1$, $\star_4^{-1} = \star_4 \star_4 \star_4$. Оператор спољашњег извода је

$$\mathrm{d} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial z} \mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{d}t \right] \wedge .$$

Применом Стоксове теореме на Фарадејеву форму имамо да важи

$$\mathrm{d}\mathcal{F} = 0.$$

У четворо димензионалном простору важи релација $\mathcal{G} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \star_4 \mathcal{F}$, при чему величина $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ нема никаквог физичког смисла (овде се налази само због изабраног систеема јединица).

Поенкареова лема нам говори да ако је спољашњи извод неке p-форме 0, онда се у simply conected space може представити као спољашњи извод неке (p+1)-форме. Користећи ово, имамо

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A},$$

где је $\mathcal{A} = A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z + c\Phi \mathrm{d}t$, где су A_x, A_y, A_z компоненте магнетног векторског потенцијала,а Φ представља скаларни електрични потенцијал. Уведимо даље диференцијалну форму

$$\mathcal{J}_4 = -J_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t - J_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t - J_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

где су J_x, J_y, J_z компоненте густина струје, а ρ је густина наелектрисања. Четвородимензионална варијанта Амперовог закона гласи

$$\mathrm{d}\mathcal{G} = \mathcal{J}_4.$$

Коришћењем претходних релација добијамо

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathrm{d} \star_4 \mathrm{d}\mathcal{A} = \mathcal{J}_4,$$

одакле видимо да у четвородимензионалном простору $\mathcal{J}_4$ извор Максвелових форми. Ако уведемо оператор $\widehat{\mathrm{d}}$ на следећи начин $\widehat{\mathrm{d}} = (-1)^k \star_4^{-1} \mathrm{d}\star_4$, где је k степен фомре на коју оператор делује, можемо увести таласни оператор као

$$\diamondsuit = \mathrm{d}\widehat{\mathrm{d}} + \widehat{\mathrm{d}}\mathrm{d}.$$

Са слободом избора гејџа за $\mathcal{A}$ у којем радимо узећемо да је $\mathrm{d} \star_4 \mathcal{A} = 0$ (Лоренцов гејџ). Сада можемо записати таласну једначину као

$$\diamondsuit \mathcal{A} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \star_4 \mathcal{J}_4}.$$

У четвородимензионалном просторвремену са координатама x, y, z и t имамо да оператор $\diamondsuit$ испуњава услов

$$\diamondsuit f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

4.4 Уопштење на $n+1$ просторвреме

Приметили смо још раније да један те исти сет Максвелових једначина описују електромагнетне појаве у различитим димензијама. Стога, тај сет можемо употребити у описивању генералног случаја када се ради о n-димензионалном простору. У n-димензионалној електродинамици постоји и електрично и магнетно поље, она могу бити промењива у времену, те стога постоји ефекат електромагнетног зрачења.

Процес налажења једначине поља тачкастог наелектрисања на растојању r од њега сличан је истом поступку у две или у једној димензији. Добијени облик зависности јачине поља од растојања је

$$E(r) = \frac{q}{S_n \epsilon_0 r^{n-1}},$$

где је S_n фактор који зависи од површине n-димензионе сфере. При томе важи следећа релација:

$$S_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

при чему је $\Gamma(x)$ гама функција дефинисана рекурентном везом $\Gamma(t) = \Gamma(t-1)\cdot(t-1)$, а важи да је $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ и $\Gamma(1) = 1$. Примећујемо да важи $S_1 = 2$, $S_2 = 2\pi$, $S_3 = 4\pi$, $S_4 = 2\pi^2$...

4.4.1 Потенцијал и кретање у n-димензионалној електродинамици

Сагласно формули за електрично поље тачкастог наелектрисања имамо да је енергија електростатичке интеракције два наелектрисања $W = \frac{q_1 q_2}{S_n \epsilon_0 r^{n-2}(n-2)}$. Посматрајмо сада ситуацију у којој се тачкасто наелектрисање q_1 може слободно кретати у пољу статичног тачкастог наелектрисања супротног знака $-q_2$. Ако занемаримо ефекте зрачења, имамо да се закон одржања енергије може записати у истом облику као у 2D

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + W(r) = E = const.$$

Уз одговарајуће смене можемо записати

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C^2}{r^{n-2}}.$$

Приметно је да у случају $n \geq 3$ електростатичка енергија у $+\infty$ кончна (са нашим избором константи 0), те се наелектрисање може бесконачно удаљити од тачкастог извора поља. Надаље можемо поступати аналогно дводимензионалном случају, тражећи једначину за $\dot{r}$. Тражена једначина

$$\dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2},$$

са одговарајућим сменама. Цртањем графика као у делу 4.2.5 добијамо да за $n = 3$ постоји стабилна орбита, то јест орбита у којој вредност r осцилује између две вредности r_{min} и r_{max}, док за $n \geq 4$ не постоји таква орбита. Но, до датог аргумента можемо доћи и на мало другачији начин, пратећи рад који је написао немчки научник W.Büchel. Он је своје извођење урадио на примеру гравитационог потенцијала у n димензија, но како се облик гравитационог потенцијала поклапа са електростатичким потенцијалом можемо применити цео формализам дат у овој анализи ситуације на наш случај. Он је узео апроксимацију у којој је члан енергије који садржи $\dot{r}$ занемарљиво мали у односу на остатак енергије. Ово је оправдана апроксимација у случају када је растојање од извора поља до наелектрисања у покрету јако велико. Дакле, укупна енергија која се одржава се може написати као

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C^2}{r^{n-2}}.$$

Ако се r креће између r_1 и r_2 iz З.О.Е следи:

$$\frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{C^2}{r_1^{n-2}} = \frac{L^2}{2mr_2^2} - \frac{C^2}{r_2^{n-2}}.$$

Центрипетална сила износи $F_{cp} = \frac{L^2}{mr^3}$. Приметимо сада да за ексцентричну орбиту вредност центрипеталне силе у перихелу мора бити већа од силе електростатичке интеракције, иначе би се наелектрисања сударила, а вредност центрипеталне силе у афелу мора бити мања од силе електростатичке интеракције, иначе би наелектрисање отишло у бесконачност. Узимајући ово у обзир долазимо до неједнакости:

$$\left(\frac{L^2}{mr_{min}^2}\right)\left[\frac{1}{2} - (n-2)^{-1}\right] < \left(\frac{L^2}{mr_{max}^2}\right)\left[\frac{1}{2} - (n-2)^{-1}\right].$$

Како је $r_{min} < r_{max}$, добијамо да је претходни услов није испуњен за $n \geq 4$. Дакле, у електромагнетизму са $n \geq 4$ нема стабилних орбита. Овај аргумент примењен на гравитациони потенцијал служио је многим ауторима као још један доказ да је димензија нашег света мања од 4. Са друге стране да наш свет није дводимензионалан коришћен је биолошко-тополошки аргумент. Вишећелијски организам је, као што и само име каже, саграђен од већег броја ћелија и те ћелије су нервним влакнима повезане. Када би наш свет био дводимезионалан та влакна би се међуобно укрштала као што се улице укрштају у градовима. Као последица тога, нервни импулси би међусобно интерферирали. Стога, постојање високо развијених организма са неинтеферирајучим нервима могуће је у световима са димензијом већом од два.

5

Закључак

У овом раду пре свега смо показали предност коришћења диференцијалних форми у решавању проблема из електромагнетизма. У односу на векторску нотацију, Максвелове једначине у диференцијалном облику пружају високу интуитивност и омогућавају визуелизацију оператора ротора, што је много теже у векторској нотацији. Такође, Максвелове једначине записане у диференцијабилном облику остаји инваријантне при промени димензија простора, једино се мењају степени форми које фигуришу у њима и дејство Хоџовог оператора дуалности. Анализирали смо проблем дводимензионалног света и закључили да дата анализа није само узбудљива за нас који њу анализирамо, већ се закључци које повлачимо из ње користе у неким другим областима. Такође смо прошли кроз површну анализу електричног поља у n димензија и закључили да за $n > 3$ не постоје стабилне орбите. Запловили смо и филозофским водама разматрајући проблем димензионалности света у којем живимо.

Поставља се питање да ли је корисно разматрати једнодимензионални и дводимензионални електромагнетизам пре разматрања електромагнетизма у три димезије. Такво разматрање је се очигледно показало корисним у геометрији, најпре смо радили са геометријским објектима у равни а тек касније прешли на геометријске објекте у простору. Међутим, разлика у електромагнетним појавама у једној димензији и у истим у три димензије сувише је велика да би помогла разумевању ситуације у три димензије. Са друге стране, разлика у дводимензионалном електромагнетизму и у тродимензионалном је сувише мала да би довољно олакшала анализу 3D света.

Било како било, анализа физичких феномена, били они од суштинске важности или маргинални увек представља изузетно задовољство и уживање. Самим тим, физика представља најлепшу природну науку којом се човек икада бавио и којом ће се икада бавити.

6

Захвалност

Овим путем бих се желео захвалити најпре свом ментору Браниславу Цветковићу на свој помоћи при изради овог матурског рада. Онда бих желео да се захвалим свим професорима који су ми икада предавали математику и физику, а пре свега својој разредној Наташи Чалуковић која ми је предавала у Математичкој гимназији и која ми је у највећој мери усадила љубав према физици и која ме је уверила да је физика прелепа.

Литература

[1] M. Damnjanović, Hilbertovi prostori i grupe Fizički fakultet, Beograd (2015).

[2] Ehrenfest, P. (1917) In What Way Does It Become Manifest in the Fundamental Laws of Physics that Space Has Three Dimensions? Proceedings of the Amsterdam Academy 20, 200-209.

[3] K.T. McDonald, Electrodynamics in 1 and 2 Spatial Dimensions (September 23, 2014; updated October 16, 2014).

[4] http://ethw.org/Maxwell%27s_Equations.

[5] C. Callender, Answers in search of a question: 'proofs' of the tri-dimensionality of space, Studies Hist. Phil. Mod. Phys. 36, 113 (2005).

[6] Two, Three and Four-Dimensional Electromagnetics Using Diferential Forms,Karl F. WARNICK, Peter RUSSER,Department of Electrical and Computer Engineering, Brigham Young University.

[7] Maxwell's Equations in Terms of Differential Forms, Solomon Akaraka Owerre,AIMS, 20 May 2010.

[8] Differential Forms and Electromagnetic Field Theory,Karl F. Warnick and Peter Russer.

[8] Hehl, F.W. and Obukhov, Yu.N.: Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric (Birkhauser, Boston, 2003).

[9] Why is Space Three-Dimensional? Based on W. Büchel: "Warum hat der Raum drei Dimensionen?," Physikalische Blätter 19, 12, pp. 547–549 (December 1963), Ira M. Freeman, American Journal of Physics 37, 1222 (1969).

[10] Differential Topology, Guillemin, Victor, Pollack, Alan,Prentice-Hall Inc. (1974).