Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из анализе са алгебром -

Подструктуре у густим графовима

Ученик:
Игор Медведев IVд

Ментор:
др Соња Чукић

Београд, јун 2018.

Садржај

1

Увод

> Екстремална теорија графова, у свом најужем смислу, је грана теорије графова која је развијена и вољена од стране Мађара.
>
> *Béla Bollobás*

У овом раду анализирамо како глобални параметри графа, као што су густина ивица, или хроматски број, могу утицати на постојање неких локалних подструкура. На пример, колико ивица мора да има граф, тако да невезано за то како су оне распоређене граф увек садржи троугао? Или четвороугао?

Питања овакве природе су међу најприроднијим у теорији графова, и она воде до много занимљивих резултата. Заједнички, називају се *екстремална теорија графова.*

Екстремална теорија графова је релативно млада област. За њен почетак се узима 1941. година, када је Туран доказао своју теорему, којом ћемо се ми бавити у овом раду. Још једна битна година за ову област математике била је 1975. година, када је Шемереди доказао свој резултат који је главни део решења многих екстремалних проблема.

С обзиром на то да је ово још млада област, њене примене нису потпуно истражене. Ипак, постоје примене у области криптографије, дирекнте примене у неким алгоритмима као и у заштити информација.

Туранова теорема је служила као модел за многе друге теореме ове области, и једна од њих је и теорема Ердош Стоун. То је још један класичан резултат екстремалне теорије графова којим ћемо се бавити у овом раду.

2

Уводни појмови

2.1 Граф

Дефиниција 2.1.1. *Прост граф* је пар $G = (V, E)$ скупова који задовољавају $E \subseteq [V]^2$, где са $[V]^2$ означавамо скуп двоелементних подскупова скупа V. Надаље нећемо наглашавати да је граф прост, већ ће се то подразумевати.

Елементи скупа V су *чворови* (или *темена*) графа G. Елементи скупа E се називају *ивице* (или *гране*) графа. У овом раду ћемо чешће користити називе темена и ивице.

Граф који има скуп темена V назива се и граф *над* V. Када се у тексту помиње више графова, скуп темена графа G означавамо са $V(G)$, а скуп ивица са $E(G)$. Не разликујемо увек граф и скуп темена графа, тако да ћемо писати $v \in G$ (уместо $v \in V(G)$), итд.

Дефиниција 2.1.2. Теме v је *инцидентно* са ивицом e ако $v \in e$. Два темена у ивици су њени *крајеви*. Ивица $\{x, y\}$ се обично записује као xy.

Дефиниција 2.1.3. Два темена x, y графа G су *суседна* ако је xy ивица у графу G.

Дефиниција 2.1.4. Две различите ивице e и f су *суседне* ако имају заједнички крај.

Дефиниција 2.1.5. *Скуп суседа* (на енглеском језику се назива и *комшилук*) темена v у графу G је скуп $N_G(v) = \big\{y \in V | vy \in E\big\}$. Број суседа темена v се означава са $d(v) = \big|N_G(v)\big|$, и назива се степен чвора v.

Такође можемо посматрати суседе неког скупа темена:

Дефиниција 2.1.6. Ако је $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ неки скуп темена графа G, означавамо

$$N_G(A) = \bigcup_{i=1}^{k} N_G(v_i).$$

Дефиниција 2.1.7. Број $|E|\binom{|V|}{2}^{-1}$ се назива *густина ивица* графа G.

Пример 1. За графове где су повучене све могуће ивице густина је 1. За све остале густина је између 1 и 0.

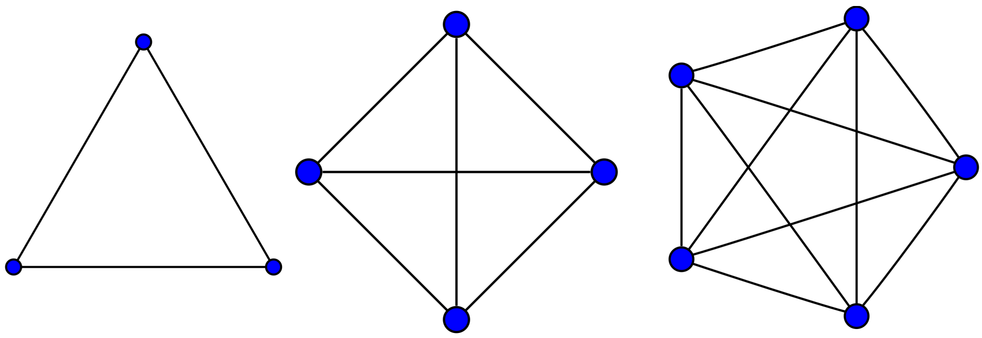
Лема 2.1.1. У графу G важи $\sum_{v\in G} d(v) = 2|E|$.

Доказ. За сваку ивицу $xy \in E$, лева страна је броји два пута, једном за x, а једном за y. □

Дефиниција 2.1.8. *Минимални степен* графа G је $\delta(G) = \min\{d(v) \big| v \in V\}$.

2.2 r-партитивни и комплетни графови

Дефиниција 2.2.1. *Комплетан граф* над n темена је граф који има $\binom{n}{2}$ ивица. Означава се K_n.

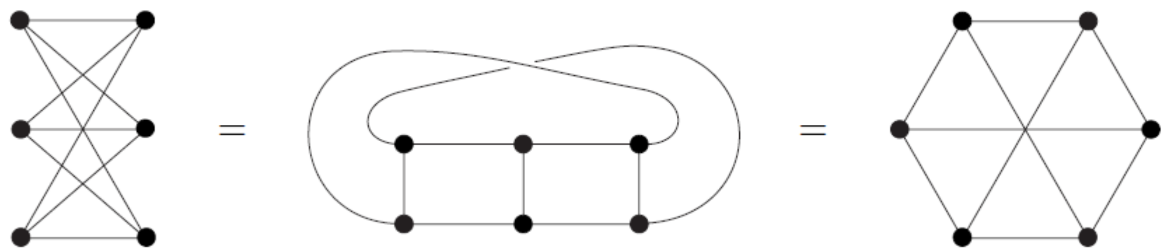


Слика 2.1: Примери комплетних графова K_3, K_4 и K_5.

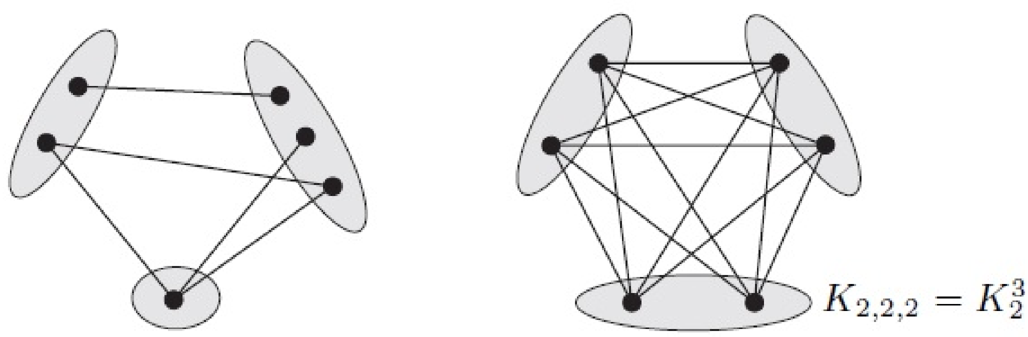
Дефиниција 2.2.2. Нека је $r \geq 2$ природан број. Граф $G = (V, E)$ се зове $r-$*партитиван* ако V дозвољава партицију на r класа, тако да свака ивица има крајеве у различитим класама. Темена у истој класи не смеју бити суседна. Тако, уместо $2-$партитиван, обично говоримо бипартитиван.

Дефиниција 2.2.3. $r-$партитиван граф у коме су свака два темена из различитих класа спојена зове се *комплетан* $r-$*партитиван*. Комплетан $r-$партитиван граф у коме класе темена имају редом $n_1, n_2, ..., n_r$ темена се лакше означава $K_{n_1,...,n_r}$.

Специјално, ако је $n_1 = n_2 = ... = n_r = s$, скраћено означавамо K_s^r.

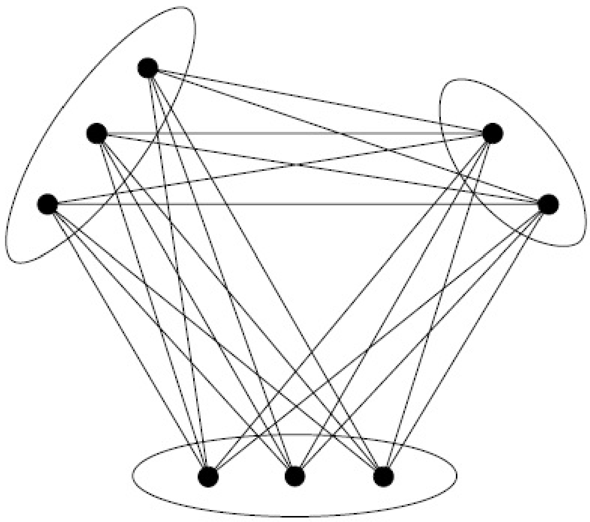


Слика 2.2: Бипартитиван граф $K_{3,3}$ нацртан на три начина.



Слика 2.3: Два трипартитивна графа.

Дефиниција 2.2.4. $r-$партитиван граф над n темена у коме су величине класа једнаке или „скоро једнаке” је граф $K_{n_1,\ldots,n_r}$ при чему за свако i важи $n_i = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ или $n_i = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor + 1$. Такав граф се зове *Туранов граф* и означава се $T_{n,r}$.

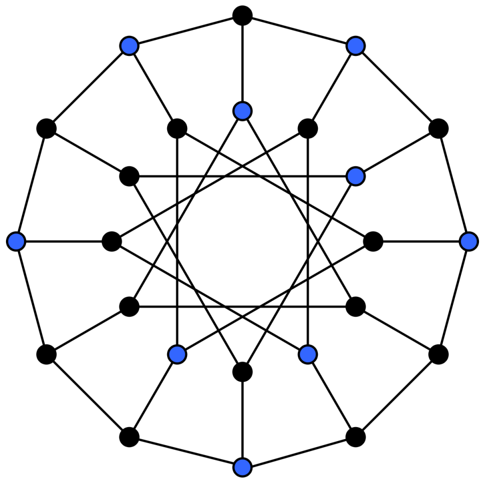


Слика 2.4: Пример Тurановог графа $T_{8,3} = K_{3,3,2}$.

2.3 Независан скуп у графу

Дефиниција 2.3.1. Скуп темена у графу, од којих никоја два нису суседна, назива се *независан* (или *стабилан*).

Такође се може дефинисати и независан скуп у односу на ивице, али ће нас тренутно занимати само независан скуп у смислу темена.



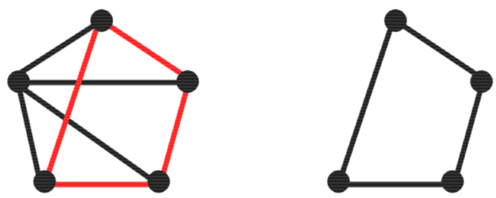
Слика 2.5: Пример независног скупа у графу, означен плавом бојом. За још један пример можемо погледати K_n. У њему су независнки скупови само сама темена.

2.4 Подграф

Дефиниција 2.4.1. Нека су $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ два графа. Тада G и G' називамо *изоморфним*, и пишемо $G \simeq G'$, ако постоји бијекција $\varphi : V \to V'$ таква да $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$, за све $x, y \in V$. Такво пресликавање φ се назива *изоморфизам*. У случају да је $G = G'$, зове се *аутоморфизам*.

Нормално не разликујемо изоморфне графове. Тако увек пишемо $G = G'$ уместо $G \simeq G'$.

Дефиниција 2.4.2. Ако за графове G' и G, важи $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$, кажемо да је G' *подграф* графа G. Каже се и да G *садржи* G'.



Слика 2.6: Пример подграфа, означен црвеном бојом.

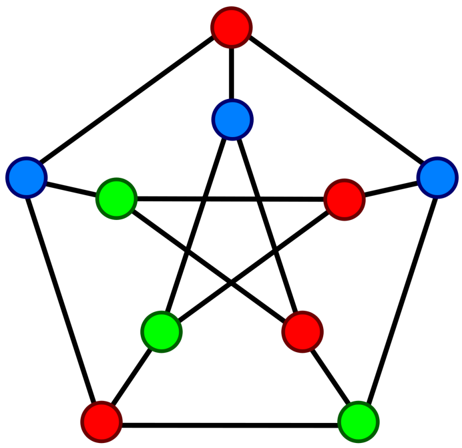
2.5 Хроматски број графа

Дефиниција 2.5.1. *Бојење темена графа* $G = (V, E)$ је пресликавање $c : V \to S$ тако да је за различита темена v и w, $c(v) \neq c(w)$ када год су v и w суседни. Елементе скупа S зовемо *боје*.

Оно што нас занима је величина скупа S: обично се питамо који је најмањи природан број k, тако да G има k-бојење, тј. бојење $c : V \to \{1, \ldots, k\}$.

Дефиниција 2.5.2. *Хроматски број* графа G, $\chi(G)$, је најмањи природни број k за који постоји k-бојење графа G. Ако је $\chi(G) = k$, кажемо да је G *k-хроматски*, односно за $\chi(G) \leq k$ кажемо да је G *k-обојив*.

Пример 2. $\chi(K_n) = n$, пошто су свака два темена повезана морају бити различите боје.



Слика 2.7: Петерсенов граф. Он представља пример графа са $\chi(G) = 3$.

3

Графови без H-подграфова

Нека је H граф, и нека је $n \geq |V(H)|$. Колико ивица ће бити довољно тако да граф над n темена мора садржати H као подграф, невезано за то како су ове ивице распоређене? Другим речима, који је највећи могући број ивица које граф над n темена може да има, а да нема H као подграф? Како ће тај максимални граф изгледати? Да ли ће бити јединствен?

Граф G над n чворова који не садржи H, са највећим могућим бројем ивица се назива *екстремалан* за n и H.

3.1 Графови без троуглова. Мантелова теорема

Први граф H који је природно посматрати је троугао. Следеће тврђење је можда и отворило област екстремалне теорије графова.

Теорема 3.1.1. (Мантел[1]) Ако је G граф са n темена који нема троуглова, онда он има највише $\dfrac{n^2}{4}$ ивица.

Доказ 1 (Мантел 1906). Претпоставимо да граф G са e ивица и n темена нема троуглова. Приметимо да за сваку ивицу xy важи $d(x) + d(y) \leq n$: за свако теме z различито од x и y, z може бити сусед са највише једним од x и y, јер би иначе xyz био троугао. Из тога имамо

$$\sum_{xy \in E} (d(x) + d(y)) \leq \sum_{xy \in E} n = |E|n = en. \tag{3.1}$$

[1] Mantel W, немачки математичар

Такође, знамо да важи

$$\sum_{v \in V} d(v)^2 = \sum_{xy \in E} (d(x) + d(y)),$$

јер за свако $x \in V$, $d(x) = k$, на десној страни се $d(x)$ појављује k пута, по једном за свако теме y које је суседно са x. Тако да $d(x)$ укупно десној страни допринесе k пута по k, што је $k^2 = d(x)^2$.

По неједнакости Коши-Шварца, имамо да важи

$$\sum_{v \in V} d(v)^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{v \in V} d(v) \right)^2 = \frac{4e^2}{n}, \tag{3.2}$$

па из (3.1) и (3.2), имамо да је $\frac{4e^2}{n} \leq en$, одакле следи $e \leq \frac{n^2}{4}$. □

Доказ 2 (Фолклор). Нека је A максималан независан скуп графа G и нека је $|A| = a$. Ако би за неко v_0 из G било $d(v_0) > a$, имали би независан скуп који има више елемената од A, јер у скупу $N_G(v_0)$ не постоје два темена која су спојена ивицом баш зато што не постоји троугао у графу G. Значи да за свако $v \in V$ имамо $d(v) \leq a$. Такође, скуп $B = V \setminus A$ има особину да свака ивица из G има бар један крај у њему. У супротном би постојала нека ивица која има оба темена у A што се коси са дефиницијом скупа A. Сада, с обзиром да свака ивица има бар један крај у B, а знамо $|B| = n - a$, имамо

$$\sum_{v \in B} d(v) \geq |E|.$$

Даље, по неједнакости између аритметичке и геометријске средине, важи:

$$|E| \leq \sum_{v \in B} d(v) \leq a \cdot (n - a) \leq \left(\frac{n - a + a}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

Видимо да једнакост важи ако и само ако су задовољена следећа два услова

(1) једнакост $n - a = a$ односно $a = \frac{n}{2}$,

(2) услов да $d(v) = a$ за свако v из V.

Односно, ако је n непарно, видимо да се максимум функције $a(n-a)$ достиже за $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Тада имамо независан скуп који има $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ темена, и свако теме у том скупу је спојено са свим теменима која нису из тог скупа. Такође, пошто граф G нема троуглова, између темена скупа $N_G(A)$ нема ивица, па је и он независан. Свако теме из $N_G(A)$ је спојено са сваким из A, јер важи једнакост. Због величина ових скупова мора важити $N_G(A) = V \setminus A$, па видимо да је у случају једнакости граф G бипартитиван са једнаким или „скоро једнаким” класама. То је граф $T_{n,2}$. □

3.2 Туранова теорема

Туранова теорема је уопштење Мантелове теореме. Наиме, троугао можемо посматрати као потпун граф над 3 темена, односно K_3. Природно је сада запитати се колико ивица, у односу на број темена, може имати неки граф пре него што можемо гарантовати да садржи K_{r+1} као подграф, за неко $r > 2$.

Теорема 3.2.1. (Туран[2]) Ако је G граф са n темена који не садржи K_{r+1} као подграф, онда он има највише $\frac{(r-1)}{2r}n^2$ ивица.

Приметимо да Туранов граф $T_{n,r}$ не садржи K_{r+1} као подграф и да је $e(T_{n,r}) \leq \frac{(r-1)}{2r}n^2$, односно $e(T_{n,r}) = \frac{(r-1)}{2r}n^2$ када $r|n$.

Доказ 1 - индукција. Примењујемо индукцију по n. Фиксирајмо број r.

За $n \leq r$ овај граф сигурно не може садржати K_{r+1} као подграф, јер има мање темена од њега. Граф G има највише $\binom{n}{2}$ ивица. Имамо

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)}{2n}n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)n^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)n^2 = \frac{(r-1)}{2r}n^2,$$

што се и тражило. Ово нам уједно и база индукције.

Нека је сада $n > r$ и претпоставимо да теорема важи за све $n_0 \leq n$. Посматрајмо граф M који има n темена и највећи могући број ивица, а да испуњава

[2]Pál Turán (1910-1976) је био мађарски математичар који се примарно бавио теоријом бројева. Блиско је сарађивао са Ердошем пуних 46 година. Објавили су 28 заједничких радова.

услове теореме. С обзиром да M има максималан број ивица, где год да додамо ивицу e, нарушио би се услов да $M+e$ не садржи K_{r+1}. Зато M садржи K_{r+1} без једне ивице, па самим тим и K_r. Означимо тај K_r са X. Нека је E_1 скуп ивица између темена графова $M-X$ и X. Тада важи

$$e(M) = e(M-X) + e(X) + |E_1|.$$

Пошто ни $M-X$ не сме да садржи K_{r+1}, по индуктивној претпоставци имамо да је $e(M-X) \leq \frac{(r-1)}{2r}(n-r)^2$. Такође, свако теме v из $M-X$ је суседно са највише $r-1$ теменом у X. У супротном би $X \cup \{v\}$ био K_{r+1}. Тако да имамо $|E_1| \leq (r-1)(n-r)$ и

$$\begin{aligned} e(M) &= e(M-X) + e(X) + |E_1| \\ &\leq \frac{(r-1)}{2r}(n-r)^2 + \frac{r(r-1)}{2} + (r-1)(n-r) = \frac{(r-1)}{2r}n^2. \end{aligned}$$

Овде једнакост може важити у случају да је $r|n$, и то видимо директно из тога што је тада $e(T_{n,r}) = \frac{(r-1)}{2r}n^2$. У случају да је $r \nmid n$, хоћемо да нађемо граф који максимизује број ивица. Приметимо да онда мора важити да је свако теме из $M-X$ суседно са тачно $r-1$ неких у X. Релативно лако се онда индукцијом види да баш $T_{n,r}$ максимизује овај број ивица. То се још боље види у следећем доказу. $\square$

Доказ 2 - Зиковљева симетризација. Посматрајмо граф G са n темена који задовољава услове теореме и има највећи могући број ивица. Пошто смо видели да се максимум постиже за комплетан $r-$партитиван граф, покушајмо да докажемо да је G комплетан $s-$партитиван, за неко s. Зато, претпоставимо да постоје темена x,y и z у G тако да xy и yz нису ивице графа G, а xz јесте. Ако би било $d(y) < d(x)$ могли бисмо y да „заменимо” клоном темена x, тј. теменом x' које је повезано са свим теменима као и x, а није повезано са x. Тада граф G' добијен овом трансформацијом и даље не садржи K_{r+1} јер xx' није грана у G'. Али $e(G') > e(G)$, што је контрадикција. Одатле имамо $d(y) \geq d(x)$, и аналогно $d(y) \geq d(z)$. Ако темена x и z заменимо теменима y' и y'' која су спојена са свим теменима као и y и нису спојена са y добијамо граф G_1. Пошто имамо $d(y') \geq d(x)$ и $d(y'') \geq d(z)$, а ивица xz се броји два пута у збиру $d(x)+d(z)$, имамо да је

$$e(G_1) = e(G) + (d(y') - d(x)) + (d(y'') - d(z)) + 1 > e(G).$$

Али, граф G_1 и даље не садржи K_{r+1} , а има више темена од G, па добијамо контрадикцију са тиме да је G максималан.

Сада знамо да ако xy и yz нису ивице у E, онда није ни xz. Значи да G можемо поделити на класе еквиваленција које се састоје из скупова темена која нису суседна једна са другим. По дефиницији, G је $s-$партитиван за неко s. Пошто он маскимизује број ивица, он је комплетан $s-$партитиван, а како у себи не садржи K_{r+1} као подграф, имамо да је $s \leq r$. Можемо проверити да од таквих графова максималан број грана има онај за $s = r$, односно граф $T_{n,r}$. □

Туранова теорема је била једна од основа екстремалне теорије графова и није изненађујуће да има пуно примена. Ми ћемо представити једну од њих:

Задатак 1. Нека је S скуп n тачака у равни тако да највеће растојање између тачака у скупу S није веће од 1. Онда је број неуређених парова тачака чија је удаљеност већа од $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ највише $\dfrac{n^2}{3}$.

Доказ. Уведимо граф $G(S, E)$ где $XY \in E$ ако и само ако је $||XY|| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ако би G садржао K_4, постојале би четири тачке $A, B, C, D \in S$, тако да четвороугао $ABCD$ има све странице дуже од $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Пошто је бар један од углова у четвороуглу туп или прав, без умањена општости угао BAC, имали би да је $BC \geq \sqrt{AB^2 + AC^2} > \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, што је контрадикција са тиме да највеће растојање међу тачкама скупа S није веће од 1.

Одатле следи да граф G не садржи K_4. Сада на њега можемо да применимо **Турановy теорему**. Имамо да је $|E| \leq \dfrac{3-1}{2 \cdot 3} n^2 = \dfrac{n^2}{3}$. Како је $|E|$ број ивица тако да је удаљеност $||XY||$ већа од $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, број парова је највише $\dfrac{n^2}{3}$. □

3.3 Теорема Ердош Стоун

Природно је запитати се колико ивица може да има граф G који не садржи неки произвољан граф H као свој подграф. Једино за одређене графове H постоји егзактна формула која нам каже колики је тај број ивица. Ипак, неки разултати су постигнути у овом пољу и за произвољне графове H.

Ево још једног специјалног случаја овог питања, које је 20 година после свог објављивања отворило многе могућности у овом пољу истраживања:

Теорема 3.3.1 (Ердош[3]и Стоун[4], 1946)**.** За све природне бројеве $r \geq 1$ и $s \geq 1$, и свако $\varepsilon > 0$, постоји природан број $M = M(r, s, \varepsilon)$, тако да сваки граф са $n \geq M$ темена и барем $e(T_{n,r}) + \varepsilon n^2$ ивица садржи K_s^{r+1} као подграф.

Напоменимо да је

$$e(T_{n,r}) + \varepsilon n^2 = \frac{r-1}{2r}n^2 + \varepsilon n^2 = \left(1 - \frac{1}{r} + 2\varepsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

За доказ користимо наизглед ослабљену верзију ове теореме:

Теорема 3.3.2 (Ослабљена Ердош и Стоун)**.** За све природне бројеве $r \geq 1$ и $s \geq 1$, и свако $\varepsilon > 0$, постоји природан број $N = N(r, s, \varepsilon)$, тако да сваки граф са $n \geq N$ темена и минималним степеном $\delta(G) \geq \left(1 - \dfrac{1}{r} + \varepsilon\right) \cdot n$ ивица садржи K_s^{r+1} као подграф.

Доказ ослабљене Ердош и Стоун. Радимо индукцију по r.

За $r = 1$ треба нам да за довољно велико n, G са минималним степеном $\delta(G) \geq \varepsilon n$ садржи бипартитиван граф $K_{s,s}$. Случај $s = 1$ је тривијалан.

Посматраћемо B, s-точлани скуп чворова графа који има особину да постоји теме v_B које је повезано са *свим* теменима из B, при чему је $s \geq 2$. Ако би успели да нађемо одговарајући B такав да имамо не једно, већ s темена $v_1, \ldots, v_s$ тако да су сви v_i, $i \in \{1, 2 \ldots, s\}$, повезани са *свим* теменима из B, онда граф

$$B \cup \bigcup_{i=1}^{s} \{v_i\}$$

сигурно садржи $K_{s,s}$. Назовимо такве B *одговарајућим*, а овакав пар (v_B, B) *добрим.*

Посматрајмо скуп A који саджи све *одговарајуће* s-точлане скупове B, формално

$$A = \left\{ B \subseteq V \middle| |B| = s, \exists v \in V \setminus B, B \subseteq N_G(v) \right\}.$$

Сада можемо да бројимо *добре* парове (v_B, B) тако да $B \in A$. Ово радимо да би нашли s различитих *добрих* парова који имају исто B. Онда по претходном они

[4]Paul Erdős (1913-1996) је био мађарски матеамтичар. Бавио се многим областима математике, а већина његовог рада је била у вези са дискретном математиком.

[4]Arthur Harold Stone (1916-2000) је био британски математичар. Већина његових радова била је у области топологије.

садрже $K_{s,s}$. За то нам је довољно да је број *добрих* парова већи од $(s-1)$ пута број *одговарајућих* скупова B, јер онда мора да постоји B које се међу *добрим* паровима појављује бар s пута.

Број добрих парова бројимо по теменима v_B. Свако теме v доприноси са $\binom{d(v)}{s}$ броју добрих парова. Зато добрих парова има укупно $Q = \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{s}$. Због услова следи

$$d(v) \geq m = \lceil \varepsilon n \rceil, \text{ па је } Q \geq n\binom{m}{s}.$$

Са друге стране довољно је да је $Q \geq (s-1)|A|$. Пошто су B различити s-точлани скупови имамо да $|A| \leq \binom{n}{s}$, па је довољно да

$$Q \geq (s-1)\binom{n}{s}, \text{ односно довољно је да } n\binom{m}{s} \geq (s-1)\binom{n}{s}.$$

Добијамо да је довољно да је

$$\frac{n}{s-1} \geq \binom{n}{s}\binom{m}{s}^{-1}.$$

Користећи добро познате неједнакости за биномне коефицијенте

$$\left(\frac{N}{k}\right)^k \leq \binom{N}{k} \leq \left(\frac{eN}{k}\right)^k, \ N \geq k > 0,$$

добијамо

$$\binom{n}{s}\binom{m}{s}^{-1} \leq \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{m}{s}\right)^{-s} = \left(\frac{en}{m}\right)^s \leq \left(\frac{en}{\varepsilon n}\right)^s = \left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^s.$$

Јасно је да постоји n такво да је $n \geq (s-1)\left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^s$, и то n задовољава услов теореме.

Претпоставимо да твђење важи за $r \geq 1$ и све $s \geq 1$ и $\varepsilon > 0$, покушавамо да докажемо за $r+1$ и произвољне фиксиране $s \geq 1$ и $\varepsilon > 0$. Имамо граф G са довољно ивица (не знамо још колико то треба да буде), и са минималним степеном $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r+1} + \varepsilon\right) n$. Хоћемо да нађемо K_s^{r+2} у њему.

Идеја је да искористимо да је

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r+1} + \varepsilon\right) n \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) n$$

да би применили индуктивну хипотезу на $r_{ind} = r$ и неке добро изабране ε_{ind} и s_{ind}. Узмимо да је $\varepsilon_{ind} = \varepsilon$, и да је $s_{ind} = m$ које је доста велико (после ћемо дефинисати тачно колико). Тада по индуктивној хипотези у G имамо граф K_m^{r+1}. Покушаћемо да од остатка темена у графу G, граф K_m^{r+1} проширимо у K_s^{r+2} тако што ћемо наћи неки скуп од s темена која нису у K_m^{r+1}, тако да су она повезана са по s темена у свакој од $r+1$ класа графа K_m^{r+1}. Тада она чине $r+2$-гу класу графа K_s^{r+2}.

Дефинишимо прво скуп темена тог подграфа K_m^{r+1} као $V(K_m^{r+1}) = A = A_1 \cup \cdots \cup A_{r+1}$, где је $|A_1| = \cdots = |A_{r+1}| = m$. Нека је скуп $U = V(G) \setminus A$ скуп осталих темена у графу G. Ми хоћемо да нађемо $u_1, \ldots, u_s \in U$ тако да за свако i постоји s-точлани подксуп B_i скупа A_i тако да је за свако j, u_j повезано са свим теменима из B_i, јер онда $B_1 \cup \cdots \cup B_{r+1} \cup \{u_1, \ldots, u_s\}$ сигурно садржи K_s^{r+2} као подграф.

Зато дефинишимо скуп *кандидата* за u, она темена из U која имају довољно суседа да би могла да уђу у проширивање графа K_m^{r+1} у граф K_s^{r+2}. То су сва она темена из U која у сваком од A_i имају бар s суседа.

$$W = \left\{ w \in U \,\middle|\, \left|N_G(w) \cap A_i\right| \geq s, i = 1, 2, \ldots, r+1 \right\}$$

Пошто се може десити да два w из W имају различите s-точлане подскупове суседа $B_{i,w}$ у неком од A_i, морамо и за то кориговати. Број начина да изаберемо различите s-точлане подскупове сваког од $A_1, \ldots, A_{r+1}$ је $\binom{m}{s}^{r+1}$.

Ако имамо да је W довољно велико, можемо да тврдимо да пожељан скуп $w_1, \ldots, w_s$ постоји у W. Наиме ако је $|W| \geq \binom{m}{s}^{r+1}(s-1)$, онда по Дирихлеовом принципу постоје $w_1, \ldots, w_s \in W$, тако да постоје $B_1, \ldots, B_{r+1} \subset A_i$, тако да је за свако $j = 1, \ldots, s$ и свако $i = 1, \ldots, r+1$, $B_i \subset N_G(w_j)$, што нам по претходном гарантује да имамо K_s^{r+2}. Сада само треба некако оценити $|W|$ и показати да ће за довољно велико n оно премашити ову границу.

Нека је зато $m = \left\lceil \frac{s}{\varepsilon} \right\rceil$.

Двоструко бројимо број ивица које *недостају* између U и A, тј. бројимо број парова $(x, y) \in U \times A$ тако да $xy \notin E(G)$. Нека је тај број Q.

$$Q \text{ је } \textit{највише } m(r+1)|U| - \Big(\textstyle\sum_{v\in A} d(v) - 2e(A)\Big) \leq$$

$$\leq (r+1)m|U| - (r+1)md(v)_{min} + m(r+1)m \leq$$

$$\leq (r+1)mn - (r+1)mn\left(1 - \frac{1}{r+1} + \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq (r+1)mn - (r+1)mn + (r+1)mn\left(\frac{1}{r+1} - \varepsilon\right) =$$

$$= (r+1)mn\left(\frac{1}{r+1} - \varepsilon\right).$$

Q је *барем* $(|U| - |W|)(m - s)$ јер за свако свако теме које није из W важи да ако има бар $mr + s$ суседа у A, онда у свакој од класа мора имати бар s па припада W. Значи може имати највише $mr + s = m(r+1) - (m-s)$. С обзиром да је $s \leq \varepsilon m$, имамо да је Q барем $(|U| - |W|)(m - m\varepsilon)$.

Сада имамо да је

$$(r+1)mn\left(\frac{1}{r+1} - \varepsilon\right) \geq (|U| - |W|)(m - m\varepsilon),$$

ондонсо

$$(r+1)n\left(\frac{1}{r+1} - \varepsilon\right) \geq (|U| - |W|)(1 - \varepsilon),$$

па сређивањем имамо следеће

$$|W|(1-\varepsilon) \geq |U|(1-\varepsilon) - n(1 - \varepsilon(r+1))$$

$$|W|(1-\varepsilon) \geq (n - m(r+1))(1-\varepsilon) - n(1 - \varepsilon(r+1))$$

$$|W|(1-\varepsilon) \geq n\varepsilon r - m(r+1)(1-\varepsilon)$$

$$|W| \geq \frac{n\varepsilon r}{1-\varepsilon} - m(r+1),$$

што је линеарно по n. Па знамо да за n довољно велико важи

$$|W| \geq \binom{m}{s}^{r+1}(s-1).$$

По претходном то нам гарантује да имамо K_s^{r+2}, па је доказ завршен. □

Да би то искористили требаће нам ова лема.

Лема 3.3.1. За све позитивне реалне бројеве ε, δ за које је $\varepsilon < \delta$, постоји природан број $B = B(\varepsilon, \delta)$, тако да за све природне бројеве $n \geq B$ важи: Нека је G граф са n темена и најмање $\delta\frac{n^2}{2}$ ивица. Тада постоји подграф G' графа G са минималним степеном темена *барем* $(\delta-\varepsilon)|V(G')|$ и $|V(G')| \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}n$.

Доказ леме 3.3.1. Нека је $G_0 = G$. Итеративно конструишемо графове G_i за $i = 1, 2, ...$ тако да добијемо граф са траженим својствима на крају. Ако G_i има најмањи степен барем $(\delta-\varepsilon)|V(G_i)|$, онда смо завршили, под претпоставком да смо G_i конструисали тако да има довољно темена. Претпоставимо зато супротно. Нека је G_{i+1} граф који се добија од G_i тако што склонимо произвољно теме са мање од $(\delta-\varepsilon)(n-i)$ суседа.

Процес мора да се заврши јер имамо да је

$$\sum_{i=1}^{n}(\delta-\varepsilon)(n-i) = \binom{n}{2}(\delta-\varepsilon) < \delta\frac{n^2}{2}$$

тако да овиме не можемо склонити сва темена. Нека процес траје t потеза. У тренутку t имамо

$$\begin{aligned} e(G) &\leq e(G_t) + \sum_{i=1}^{t-1}(\delta-\varepsilon)(n-i) \leq \\ &\leq \frac{(n-t)^2}{2} + (\delta-\varepsilon)\frac{n^2-(n-t)^2}{2} + \frac{t}{2} \leq \\ &\leq (\delta-\varepsilon)\frac{n^2}{2} + (1-\delta+\varepsilon)\,\frac{(n-t)^2}{2} + \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Пошто је $e(G) \geq \delta\frac{n^2}{2}$ имамо

$$\delta\frac{n^2}{2} \leq (\delta-\varepsilon)\frac{n^2}{2} + (1-\delta+\varepsilon)\,\frac{(n-t)^2}{2} + \frac{t}{2},$$

односно

$$\varepsilon\frac{n^2}{2} \leq (1-\delta+\varepsilon)\,\frac{(n-t)^2}{2} + \frac{t}{2}.$$

Ако је ε довољно мало а n довољно велико, имамо да је $(n-t)^2 \geq \frac{\varepsilon}{4}n^2$ односно $n-t \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}n$.

Ако узмемо да се процес завршио у тренутку t, имамо да тада граф G_t испуњава услове које смо тражили те $G_t = G'$. $\square$

Сада можемо да докажемо и Ердош Стоуна.

Ослабљени Ердош Стоун $\implies$ *Ердош Стоун.* Нека је G граф са n темена и барем $\left(1-\dfrac{1}{r}+2\varepsilon_0\right)\dfrac{n^2}{2}$ ивица. Тада по **Леми 3.3.1** ставимо $\delta = \left(1-\dfrac{1}{r}+2\varepsilon_0\right)$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$. Имамо да постоји G' подграф од G са минималним степеном барем $\delta(G) = \left(1-\dfrac{1}{r}+2\varepsilon_0-\varepsilon_0\right) = \left(1-\dfrac{1}{r}+\varepsilon_0\right)\left|V(G')\right|$ и са $\left|V(G')\right| \geq \dfrac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2}n$. Други услов нам даје да је за фиксирано ε_0, $\left|V(G')\right|$ неограничено, а први услов нам је услов за ослабљену Ердош Стоунову теорему. Када је применимо на граф G', добијамо укупно да је K_s^{r+1} подграф G' што је подграф G. $\square$

Ова теорема не само да је интересантна сама за себе, већ има и веома корисну и неочекивану последицу коју је ову теорему усталила као једну од главних за екстремалну тоерију графова.

Дефиниција 3.3.1. За граф H и природан број n нека је $ex_H(n)$ максималан број ивица које граф са n темена који не садржи H подграф може да има.

Последица 1 (Тврђење које следи из теореме Ердош Стоун)**.** $ex_{K_s^{r+1}}(n) < e(T_{r,n}) + \varepsilon n^2$ за довољно велико n.

Доказ. По **теореми Ердош Стоун** имамо да ако граф садржи барем $e(T_{r,n}) + \varepsilon n^2$ ивица онда он садржи K_s^{r+1} за довољно велико n. Али $ex_{K_s^{r+1}}(n)$ је највећи број ивица које граф може да садржи пре него што мора садржати K_s^{r+1} као подграф. $\square$

Дефиниција 3.3.2. За граф H дефинишимо $\pi_H(n) = \dfrac{ex_H(n)}{\binom{n}{2}}$.

Било би веома интересантно да је ова величина само функција од H како $n \to \infty$. Заиста имамо следећи резултат.

Дефиниција 3.3.3. Туранов број графа H је $\pi_H = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_H(n)$.

Последица 2 (Тврђење које следи из теореме Ердош Стоун)**.** За сваки граф H са бар једном ивицом важи $\pi_H = \dfrac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$ где је $\chi(H)$ хроматски број графа H.

Доказ последице. За овај доказ нам треба то да $e(T_{n,r})$ *не одступа много* од те вредности за $r|n$. То користимо као следећу лему

Лема 3.3.2. $\lim_{n\to\infty} e(T_{n,r})\binom{n}{2}^{-1} = \frac{r-1}{r}$

Доказ леме. Нека је $n = rq + t$ где је $0 \leq t < r$. Тада у графу $T_{n,r}$ имамо t класа са $q+1$ чвором и $r-t$ класа са q чворова. Сваки из класе са $q+1$ даје по $n-(q+1)$, а сваки из класе са q даје $(n-q)$ грана, још треба урачунати да ту сваку грану бројимо два пута. Тада је

$$t(q+1)(n-q-1) + (r-t)q(n-q) =$$

$$\begin{aligned}
&= t(nq - q^2 - q + n - q - 1) + (r-t)(nq - q^2) = \\
&= r(nq - q^2) + t(n - 2q - q) = \\
&= r\left(n\frac{n-t}{r} - \left(\frac{n-t}{r}\right)^2\right) + t\left(n - \frac{2(n-t)}{r} - 1\right) \\
&= n^2\left(1 - \frac{1}{r}\right) + o(n^2).
\end{aligned}$$

Односно пошто сваку грану бројимо два пута добијамо

$$\lim_{n\to\infty} e(T_{n,r})\binom{n}{2}^{-1} = \frac{r-1}{r}.$$

□

Вратимо се сада на доказ последице.

Нека је $r = \chi(H)$. Пошто се H не може обојити са $r-1$ боја, имамо да H није подграф $T_{n,r-1}$ ни за које n. Па пошто је $T_{n,r-1}$ један од графова који не садрже H, по дефиницији је $e(T_{n,r-1}) \leq ex_H(n)$.

Са друге стране H се може обојити са r боја, тако да за довољно велики број s, H је подграф графа K_s^r. То видимо ако узмемо да су темена H исте боје у истој класи еквиваленције у графу K_s^r. Поново по дефиницији ex_G имамо $ex_H(n) \leq ex_{K_s^r}(n)$, за све такве s.

За неко фиксирано s такво, имамо да по **теореми Ердош Стоун** за свако $\varepsilon > 0$ важи да је за довољно n

$$ex_{K_s^r}(n) < e(T_{r-1,n}) + \varepsilon n^2.$$

По томе је

$$ex_H(n)\binom{n}{2}^{-1} \leq e(T_{n,r-1})\binom{n}{2}^{-1} + \varepsilon n^2\binom{n}{2}^{-1} =$$

$$= e(T_{n,r-1})\binom{n}{2}^{-1} + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq$$

$$\leq e(T_{n,r-1})\binom{n}{2}^{-1} + 4\varepsilon.$$

И са друге стране је $e(T_{n,r-1})\binom{n}{2}^{-1} \leq ex_H(n)\binom{n}{2}^{-1}$ па по *Теореми о два полицајца* и по **Леми 3.3.1** следи да је

$$\pi_H = \lim_{n\to\infty} ex_H(n)\binom{n}{2}^{-1} = \lim_{n\to\infty} e(T_{n,r-1})\binom{n}{2}^{-1} = \frac{r-2}{r-1} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}.$$

□

У овом смислу, бипартитивни графови H су овде дегенерисани случајеви. Пошто за њих важи $\chi(H) = 2$ видимо да је за њих $\pi_H = 0$, односно довољно је знатно мање од $\binom{n}{2}$ ивица да би граф над n темена морао да садржи H као подграф. □

4

Закључак

У овом раду смо се бавили темама које су започеле екстремалну теорију графова. На самом крају рада смо искористили теорему Ердош-Стоун, која нам гарантује да постоји специфичан подграф у посматраном графу, да докажемо тврђење које важи за произвољне графове. Ово показује колико су једноставна тврђења екстремалне теорије графова моћна у доказивању особина неких произвољних графова. Иако је ово само мали део ове богате математичке области, надам се да је читаоц добио осећај предмета којим се бави ова област.

Искористио бих ову прилику да се захвалим ментору др Соњи Чукић на изузетној посвећености и помоћи при савладавању потребног градива, као и на одвојеном времену да ми упути конструктивне и веома корисне критике.

Такође бих се захвалио својим предметним професорима др Зорану Каделбургу, Милошу Ђорићу, и др Драгољубу Кечкићу који су ме увели у свет матетматике кроз наставу предмета анализе са алгебром.

Литература

[1] M. Aigner, *Turán's Graph Theorem*, The American Mathematical Monthly, vol. 102, 1995 pp. 808-816

[2] N. Alon, J. Spencer, *Probabilistic Method*, Wiley Interscience, Hoboken, NJ 2008

[3] J. Bondy, U. Murty, *Graph Theory with Applications*, Macmillan, London, 1976

[4] R. Diestel *Graph Theory*, Springer, Springer Verlag, Heidelberg 2016

[5] http://math.mit.edu/∼cb_lee/18.318/lecture1.pdf

[6] http://math.mit.edu/∼cb_lee/18.318/lecture2.pdf

[7] https://www.ti.inf.ethz.ch/ew/lehre/GA10/lec-erdos-stone-new.pdf