Математичка гимназија у Београду

Матурски рад из математике

НЕЗАВИСНИ СКУПОВИ И КЛИКЕ У ТЕОРИЈИ ГРАФОВА

УЧЕНИК **МЕНТОР**

Максим Стокић **Марко Радовановић**

Београд 2014.

Садржај

Предговор

Базична идеја коју овај рад има је та да ће се у "довољно великом" графу наћи "велики" скуп у коме сви елементи испољавају одређену особину или ниједан елемент нема ту особину.

У уводу је дат потребан теоријски увод и основне дефиниције теорије графова које су неопходне за даље праћење овог рада.

Главна теорема на којој се базира овај рад јесте Ремзијева теорема из које смо касније доказали и Шурову теорему. Такође је доказана и Туранова теорема и дат је још један занимљив доказ за специјалан случај када је $r = 3$. На самом крају дат је интересантан проблем из геометрије који је неочекивано повезан са теоријом графова, за чије је решење потребна Туранова теорема.

Такође је показана веома "јака" процена за Ремзијеве бројеве коју је дао мађарски математичар Ердош која се доказује применом пробабилистичког метода који је тренутно једна од најмоћнијих техника у теорији графова.

Увод

Прост неорјентисан граф је уређен пар $G = (V, E)$ где је V скуп *чворова*, а E скуп *ивица* графа, тј. неуређених парова различитих темена из V. Често се уместо чвор и ивица користе термини *теме* и *грана*. У тексту ћемо често писати само V или E мислећи на $G(V)$ и $G(E)$ тј. скуп чворова односно ивица. За два темена спојена ивицом кажемо да су *суседна*.

Дефиниција 1. *Степен чвора v означава се са $d(v)$ и представља број ивица које излазе из њега. Најмањи степен чвора у графу означавамо са $\delta = \delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$.*

Дефиниција 2. *Подграф графа G је граф G' чији је скуп темена подскуп темена G, а скуп грана подскуп грана G.*

Дефиниција 3. *Ако је $U \subset V(G)$, онда је подграф $G[U]$ граф чија су темена из скупа U и за свака два темена x, y из U вази да је xy ивица у $G[U]$ ако је xy ивица у G.*

Дефиниција 4. *Пут у графу G је низ $v_1 v_2 \dots v_n$ темена графа у коме су v_i и v_{i+1} суседни за $1 \le i \le n-1$ и који не пролази кроз исту ивицу двапут. Пут је прост ако су сва темена v_i различита. Дужина пута је број грана на њему.*

Граф је *повезан* ако између свака два темена постоји пут.

Дефиниција 5. *Циклус је затворен пут $v_1 v_2 \dots v_n v_1$. Ако су сва темена v_i различита, циклус је прост.*

Дефиниција 6. *Стабло је повезан граф у коме нема нетривијалних циклуса.*

Индукцијом се једноставно може показати да стабло са n чворова има $n-1$ ивица.

Дефиниција 7. *Комплетан граф је граф у коме су свака два различита чвора повезана граном.*

Дефиниција 8. *Граф је $k-$партитан ако се његова темена могу поделити у k дисјунктних подскупова $V_1, V_2, \dots V_k$ тако да нема грана унутар истог подскупа. Специјално $2-$партитне графове називамо бипартитним.*

Независни скупови

Дефиниција 9. *Скуп $S \subset V$ називамо независни скуп уколико никоја два темена из S нису суседна у G. Независни скуп је максималан уколико не постоји независан скуп S' и важи $|S'| > |S|$.*

Дефиниција 10. *Скуп $K \subset V$ називамо покривајући уколико свака ивица из G има најмање један крај у K.*

Теорема 1. *Скуп $S \subset V$ је независан скуп у G ако и само ако је скуп $V \backslash S$ покривајући у G.*

Доказ: Скуп S је независан по дефиницији ако и само ако ниједна ивица из G нема оба краја у S а то је ако и само ако је $V \backslash S$ покривајући скуп у G.

Број ивица у максималном независном скупу у G означавамо са $\alpha(G)$ и аналогно број извица у минималном покривању G означавамо са $\beta(G)$.

Теорема 2. *У графу G важи $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.*

Доказ: Нека су S и K редом максималан независан скуп и минималан покривајући скуп у G. На основу теореме 1 закључујемо да је $V \backslash S$ независан па је $|V \backslash S| = |V| - \alpha(G) \geq \beta(G)$, али такође је и $V \backslash K$ независан па је $|V \backslash K| = |V| - \beta(G) \geq \alpha(G)$ одакле следи тврђење теореме.

Дефиниција 11. *Скуп $U \subset E$ називамо упаривање ако никоје две ивице из U нису суседне.*

Дефиниција 12. *Скуп $L \subset E$ називамо покривање ивицама ако је сваки чвор у G крај неке ивице из L.*

Приметимо да покривање ивицама не мора обавезно да постоји, оно заправо постоји ако и само ако је $\delta(G) > 0$. Означимо са $\alpha'(G)$ максималан број ивица у упаривању и са $\beta'(G)$ минималан број ивица у покривању ивицама. Покривање ивицама и упаривање нису тако лепо повезани као независан скуп и покривајући скуп али и даље важи тврђење:

Теорема 3. *Уколико је $\delta(G) > 0$ онда је $\alpha'(G) + \beta'(G) = |V|$.*

Доказ: Нека је $U \subset E$ максимално упаривање. Приметимо да је број чворова у U једнак $2|U| = 2\alpha'(G)$ па је у остатку графа број чворова $|V| - 2\alpha'(G)$ а како је $\delta(G) > 0$ онда за покривање одаберимо све ивице из U и по једну ивицу из остатка графа што нам даје $\beta'(G) \leq \alpha'(G) + (|V| - 2\alpha'(G))$ или еквивалентно $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq |V|$.
Сада посматрајмо минимално покривање ивицама $L \subset E$. Поделимо сада скуп L на повезане компоненте $L_1, L_2, \ldots, L_k$. Ако нека од повезаних компоненти није стабло онда она садржи циклус, а ако из циклуса избацимо било коју ивицу добићемо ново покривање са мањим бројем ивица што је у контрадикцији са минималношћу изабраног покривања. Дакле $L_1, L_2, \ldots, L_k$ су стабла а познато је да је број ивица у стаблу једнак броју чворова минус 1 па је $\beta'(G) = |V| - k$, али како свака повезана компонента генерише најмање једну ивицу за упаривање то је $\alpha'(G) \geq k$ па је $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq |V|$. Из добијених неједнакости добијамо тврђење.

Пример 1. *Доказати да је граф G бипартитан ако и само ако је $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$ за сваки подграф H од G.*

Доказ: Ако је граф H бипартитан, његов скуп чворова се може поделити на две групе $A \cup B = V(H)$ при чему нема два чвора спојена истом граноми из истог подскупа. Онда је $\alpha(H) \geq \max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A|+|B|}{2} = |V(H)|/2$, дакле тврђење је тачно за било који бипартитни граф, а како је сваки подграф бипартитног графа такође бипартиан доказали смо један смер када је G бипартитан.
За други смер ћемо користити чињеницу да је граф бипартитан ако и само ако не садржи циклус непарне дужине. Ако важи дата неједнакост и ако G није бипартитан, онда G садржи циклус C непарне дужине. Одаберимо подграф $H = C$ и ако је $\alpha(H) \geq$

$|V(H)|/2$, онда ће H садржати два суседна темена из циклуса која су спојена ивицом што је контрадикција. Дакле G је бипартитан.

Пример 2. *Доказати да је граф бипартитан ако је $\alpha(H) = \beta'(H)$ за сваки подграф H од G.*

Доказ: На основу теореме важи да је $\beta'(H) + \alpha'(H) = |V(H)|$, али за сваки граф је очигледно $\alpha'(H) \leq \frac{1}{2}|V(H)|$ јер свака ивица упаривања издваја два чвора, одакле добијамо да је $\beta'(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$.
Ако за граф G важи да је $\alpha(H) = \beta'(H)$ за сваки подграф H, онда је на основу претходног $\alpha(H) = \beta'(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$ што на основу претходног примера значи да је G бипартитан граф.

Ремзијева теорема

Дефиниција 13. *Клика простог графа G је подскуп $S \subset V$ такав да је $G[S]$ комплетан граф.*

Приметимо да је S клика ако и само ако је S независан скуп у S^c, тако да су клике и независни скупови комплементарни. Уколико G не садржи велике клике може се очекивати да G садржи велики независни скуп. То је први доказао Ремзи 1930. Он је заправо доказао да је за било која два природна броја k и l постоји најмањи природан број $r(k,l)$ такав да сваки граф са $r(k,l)$ чворова садржи или клику са k чворова или независни скуп са l чворова. На пример лако можемо показати да је

$$r(1,l) = r(k,1) = 1$$

као и

$$r(2,l) = l, r(k,2) = k$$

Бројеви $r(k,l)$ су познатији као *Резмзијеви бројеви.* Следећа теорема о Ремзијевим бројевима је дата од стране Ердоша и Секереша (1935) и Гринвуда и Глисона (1955).

Теорема 4. *За свака два природна броја $k \geq 2$ и $l \geq 2$*

$$r(k,l) \leq r(k,l-1) + r(k-1,l)$$

Додатно, ако су $r(k,l-1)$ и $r(k-1,l)$ оба парна, онда важи строга неједнакост.

Доказ: Посматрајмо граф G са $r(k,l-1) + r(k-1,l)$ чворова. Одаберимо произвољно теме $v \in V$. Нека је S скуп свих суседа од v и нека је $T = V \backslash \{S \cup v\}$. Приметимо да је $|S| + |T| = r(k-1,l) + r(k,l-1)$ па је или $|T| \geq r(k,l-1)$ или $|S| \geq r(k-1,l)$.
Ако је $|S| \geq r(k-1,l)$ онда у $G[S \cup v]$ постоји или клика са k чворова или назависни скуп са l чворова.

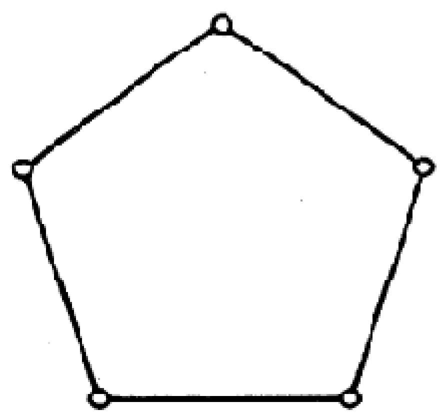
Ако је $|T| \geq r(k, l-1)$ онда у $G[T \cup v]$ постоји или клика са k чворова или назависни скуп са l чворова.
Овиме смо доказали тражену неједнакост.

За други део теореме, уколико су $r(k, l-1)$ и $r(k-1, l)$ оба парна нека је G граф са $r(k, l-1) + r(k-1, l) - 1$ чворова. Како је $|V|$ непаран на основу $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ закључујемо да постоји чвор v непарног степена. Сада аналогно као у првом делу закључујемо да је v или сусед са $r(k-1, l)$ чворова или да није сусед са $r(k, l-1)$ чворова, односно или постоји клика са k чворова или постоји назависни скуп са l чворова, па је

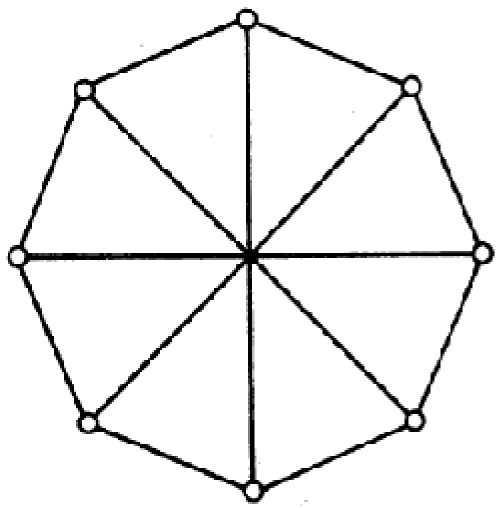
$$r(k, l) \leq r(k, l-1) + r(k-1, l) - 1$$

као што смо и тврдили.

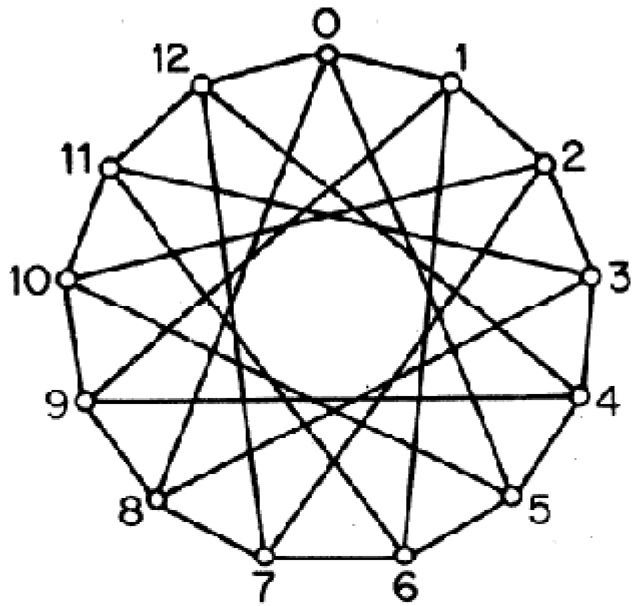
Проналажење Ремзијевих бројева је генерално веома тежак и нерешен проблем. Доња ограничења могу се добити конструкцијама одговарајућих графова:



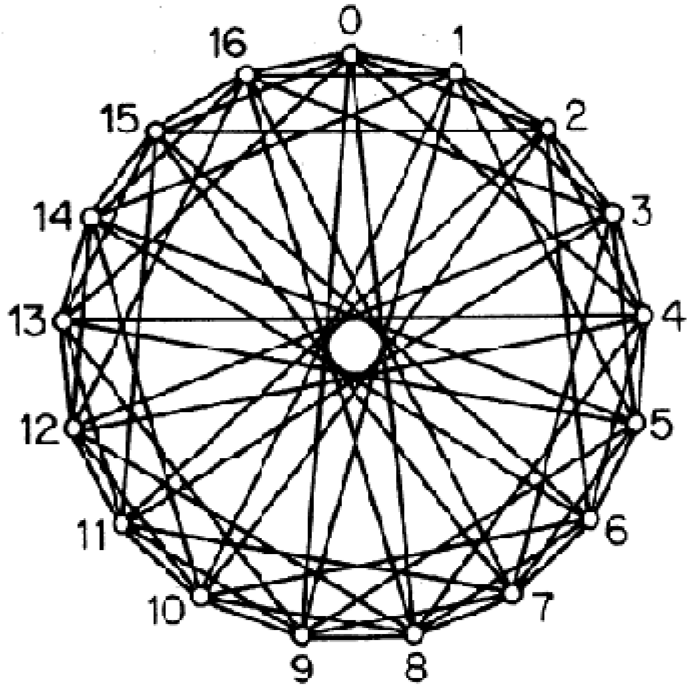
(3, 3) Ремзијев граф



(3, 4) Ремзијев граф



(3, 5) Ремзијев граф



(4, 4) Ремзијев граф

Сада коришћењем претходно доказане теореме добијамо да је $r(3,3) = 6$, $r(3,4) = 9$, $r(3,5) = 14$ и $r(3,4) = 18$.

Следећа табела представља до сада познате вредности Ремзијевих бројева:

$k \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18			

Теорема 5. $r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Доказ: Доказ ћемо спровести индукцијом по $k+l$. Коришћењем претходно добијених резултата теорему смо доказали када је $k+l \leq 5$. Предпоставимо да је тврђење теореме тачно за све m и n за које је $5 \leq m+n < k+l$. Сада на основу теореме и индукцијске хипотезе добијамо

$$r(m,n) \leq r(m-1,n)+r(m,n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-1}+\binom{m+n-3}{m-2} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

Чиме смо доказали да теорема важи за све вредности k и l.

Доња граница за $r(k,k)$ је дата следећом теоремом. Добијена је применом веома моћне технике зване *пробабилистички метод*. Иако није конструктивни метод, може бити искоришћен за доказивање да граф са задатим особинама постоји, што је нама у овом случају довољно.

Теорема 6. ($Erdos$, 1947) $r(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$.

Доказ: Како је $r(1,1)$ и $r(2,2) = 2$, можемо претпоставити да је $k \geq 3$. Нека је S_n скуп свих могућих простих графова са n чворова и нека је S_n^k скуп оних графова који у себи садрже клику од k чворова. Јасно је да је

$$|S_n| = 2^{\binom{n}{2}}$$

зато што сваки од $\binom{n}{2}$ парова чворова одређује једну ивицу. Слично, број графова у S_n који у себи садрже неких фиксних k чворова као клику је $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$. Како имамо $\binom{n}{k}$ различитик $k-$елементних подскупова чворова, онда је

$$|S_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

Сада добијамо да је

$$\frac{|S_n^k|}{|S_n|} \leq \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!}$$

Претпоставимо сада да је $n < 2^{\frac{k}{2}}$. Из претходно добијене неједнакости добијамо

$$\frac{|S_n^k|}{|S_n|} < \frac{2^{\frac{k^2}{2}} 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < \frac{1}{2}$$

Дакле мање од пола графова у S_n садржи клику од k чворова. Такође, зато што је $S_n = \{G | G^c \in S_n\}$ имамо да мање од пола графова у S_n садржи независан скуп од k чворова. Дакле неки граф у S_n не садржи ни клику са k чворова ни независни скуп са k чворова. Приметимо да је тврђење тачно за било које $n < 2^{\frac{k}{2}}$, па имамо да је $r(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$.

Овиме смо нашли доњу границу за $r(k,l)$, заправо ако је $m = \min\{k,l\}$, онда је $r(k,l) \geq 2^{\frac{m}{2}}$.
Све доње границе за $r(k,l)$ које су добијене конструктивним аргументима су много слабије од Ердошеве границе. Најбоља конструктивна граница добијена од стране Абота (1972), који је доказао да је $r(2^n+1, 2^n+1) \geq 5^n + 1$.

Ремзијеви бројеви $r(k,l)$ могу бити дефинисани и на друге начине, на пример видимо да је $r(k,l)$ најмањи природан број n такав да за свако бојење ивица K_n у две боје (рецимо плаво и црвено), онда или постоји плави подграф од k чворова или црвени подграф од l чворова. Изражено у овој форми, Ремзијеви бројеви имају природну генерализацију. Дефинишимо $r(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ да буде најмањи природан број n такав да за свако бојење ивица K_n у m боја, за неко i постоји подграф са k_i чворова чија су сва темена обојена у боју i.

Теорема 7. $r(k_1, k_2, \ldots, k_m) \leq r(k_1 - 1, k_2, \ldots, k_m) + r(k_1, k_2 - 1, \ldots, k_m) + \ldots + r(k_1, k_2, \ldots, k_m - 1) - m + 2$.

Доказ: Посматрајмо граф са $r(k_1-1, k_2, \ldots, k_m) + r(k_1, k_2-1, \ldots, k_m) + \ldots + r(k_1, k_2, \ldots, k_m - 1) - m + 2$ чворова. Одаберимо чвор v. Из њега за неко i мора да полази бар $r(k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_m)$ ивица боје i и нека крајеви тих ивица заједно са чвором v чине подграф U који за неко $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ садржи комплетан подграф боје j са k_j чворова, чиме завршавамо доказ.

Последица. $r(k_1 + 1, k_2 + 1, \ldots, k_m + 1) \leq \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$.

Туранова теорема

У овом делу, доказаћемо познат резултат који припада Турану (1941) који одредио максималан број ивица у графу од n чворова који не садржи клику величине $m+1$. Туранова теорема је постала основа дела теорије графова који се зове *екстремална теорија графова*. Означимо са $T_{m,n}$ комплетан $m-$партитан граф са n темена коме су сви делови приближно једнаки, односно имају $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ или $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ темена.

Теорема 8. *Од свих графова са n чворова који не садрже комплетан $(m+1)-$подграф највише ивица има управо $T_{m,n}$.*

Доказ: Посматрајмо граф G са највећим бројем грана. Докажимо да у графу G не постоје три темена u, v, w таква да G садржи грану uv, али не садржи гране uw и wv. Претпоставимо супротно. Разликујемо два случаја.

• $d(w) < d(u)$ или $d(w) < d(v)$. Посматрајмо граф G' у коме је теме w замењено копијом u' темена u и при томе u' и u нису спојени граном. Пошто комплетан подграф графа G' садржи највише једно од темена u, u' у G' нема комплетног $(m+1)-$подграфа. Међутим $|E(G')| = |E(G)| + d(u) - d(w) > |E(G)|$, па G' има више грана што је контрадикција.

• $d(w) \geq d(u)$ и $d(w) \geq d(v)$. Посматрајмо граф G' у коме су темена u, v замењена двема копијама w', w'' темена w. Поново, у графу G' нема потпуног $(m+1)-$подграфа, али је $|E(G')| = |E(G)| - (d(u) + d(v) - 1) + 2d(w) > |E(G)|$, контрадикција.

Следи да је релација "неповезаности граном" релација еквиваленције међу теменима. То значи да је G комплетан мултипартитан граф. Зато што G не садржи комплетан $(m+1)-$подграф морамо имати не више од m партиција. Ако партиције имају по $n_1, n_2, \ldots, n_m$ темена, при чему неки n_i могу бити нула, онда G има

$$\binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i}{2}$$

грана. Овај збир се максимизује када су сви n_i једнаки $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ или $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1$, односно када је $G \cong T_{m,n}$.

Специјалан случај Турановe теореме за $m = 2$ је *Мантелова теорема.*

Теорема 9. *Максималан број ивица у графу који има n чворова и не садржи троугао је* $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Доказ: Узмимо било која два чвора u, v која су спојена ивицом. Они немају заједничких познаника па је $d(v)+d(u) \leq n$. Приметимо сада да је

$$\sum_{v \in V} d(v)^2 = \sum_{u \sim v} (d(u) + d(v)) \leq n|E|$$

При чему пишемо $u \sim v$ уколико су чворови u и v спојени. Сада знајући да је $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ и користећи

$$\sum_{v \in V} d(v)^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{v \in V} d(v) \right)^2$$

добијамо да је $|E| \leq \frac{n^2}{4}$, а једнакост се достиже за бибатитан граф који има по $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ и $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ темена у својим деловима.

Шурова теорема

Посматрајмо партицију $(\{1,4,10,13\},\{2,3,11,12\},\{5,6,7,8,9\})$ скупа природних пројева $\{1,2,\ldots,13\}$. Приметимо да не постоји подскуп у партицији који садржи природне бројеве x, y и z, не обавезно разлиичите, за које важи

$$x + y = z$$

Али како год подели скуп $\{1,2,\ldots,14\}$ у 3 подскупа, увек ће постојати један који ће садржати x, y, z и $x + y = z$. Шур је 1916. доказао да за било који унапред задат природан број n, увек постоји природан број f_n такав да било која партиција скупа $\{1,2,\ldots,f_n\}$ на n подскупова садржи подскуп у оквиру кога постоје бројеви x, y, z и важи $x + y = z$. Означимо са $r_n = r(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ Ремзијев број код кога су сви k_i једнаки 3.

Теорема 10. *Нека је $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ било која партиција скупа природних бројева $\{1,2,\ldots,r_n\}$. Онда за неко i, скуп S_i садржи три природна броја x, y и z која задовољавају једнакост $x + y = z$.*

Доказ: Посматрајмо комплетан граф чији је скуп темена $\{1,2,\ldots r_n\}$. Обојимо ивице овог графа бојама $1,2,\ldots,n$ тако што ћемо ивици uv придружити боју j ако и само ако $|u - v| \in S_j$. На основу Ремзијеве теореме постоји монохромацки троугао, односно постоје три чвора a, b и c таква да су ивице ab, bc, ca исте боје, рецимо i.
Нека је без губљења опстости $a > b > c$ и нека је $x = a - b, y = b - c, z = a - c$. Онда $x, y, z \in S_i$ и $x + y = z$.

Нека је s_n најмањи природан број такав да у било којој партицији скупа $\{1,2,\ldots,s_n\}$ на n подскупова, постоји подскуп који садржи x, y, z и $x + y = z$. Лако се може показати да је $s_1 = 2, s_2 = 5$ и $s_3 = 14$. Такође из претходне теореме и примера имамо горњу границу за s_n

$$s_n \leq r_n \leq \lfloor n! \cdot e \rfloor + 1$$

Доњу границу за s_n можемо наћи на основу следећег примера.

Пример 3. *Доказати да је* $s_n \geq 3s_{n-1} - 1$.

Доказ: За скуп S кажемо да је *слободан* ако не садржи природне бројеве x, y и z такве да је $x + y = z$. Нека је $(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1})$ партиција скупа $\{1, 2, \ldots, s_n - 1\}$ на слободне подскупове.
Посматрајмо сада скупове $S_i' = \{x + 2s_{n-1} - 1 | x \in S_i\}$ и посматрајмо скупове $X_i = S_i \cup S_i'$. Приметимо да су сви скупови X_i слободни. Ако је $X_n = \{s_{n-1}, s_{n-1} + 1, \ldots, 2s_{n-1} - 1\}$, онда је и X_n слободан а партиција $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, 3s_n - 2\}$ доказује да је $s_n \geq 3s_{n-1} - 1$.

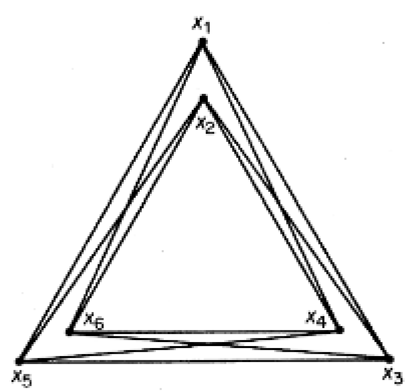
Коришћењем примера и чињенице да је $s_3 = 14$ можемо добити доње ограничење за s_n

$$s_n \geq \frac{1}{2}(27 \cdot 3^{n-3} + 1)$$

Задатак из геометрије

Дефиниција 14. *Дијаметар скупа тачака S у равни је максимално растојање међу паровима тачака из S.*

Треба навести да је дијаметар у нашем случају строго геометријски појам и није везан за графовсе концепте дијаметра и удаљености. Разматраћемо скупове чији је дијаметар 1. Скуп од n тачака генерише $\binom{n}{2}$ растојања међу паровима тих тачака. Интуитивно је јасно да уколико је n "велико", онда неко од растојања мора да буде "мало". Дакле за било које d између 0 и 1 можемо питати колико парова тачака из скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дијаметра 1 може бити на растојању већем од d. Овде ћемо показати решење специјалног случаја овог проблема, када је $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Као илустрацију навешћемо случај када је $n = 6$. Онда имамо шест тачака x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6. Ако их сместимо као темена правилног шестоугла тако да су парови $(x_1, x_4), (x_2, x_5)$ и (x_3, x_6) на растојању 1, онда ових шест тачака чине скуп дијаметра 1.



Лако можемо израчунати да су парови $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6)$ и (x_6, x_1) на растојању $\frac{1}{2}$ и да су парови $(x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_1)$ и (x_6, x_2) на растојању $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Како је $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, закључујемо да

постоји девет парова тачака на удаљености већој од $\frac{1}{\sqrt{2}}$ у овом скупу чији је дијаметар 1.
Међутим, девет парова тачака није најбоље што можемо да урадимо са шест тачака. Стављањем тачака у конфигурацију приказану на слици, сви парови осим $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$ и (x_5, x_6) су на удаљености већој од $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Овиме смо постигли да имамо 12 парова тачака на удаљености већој од $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ово је заправо и најбоље што можемо постићи са шест тачака. Решење овог проблема за произвољан број тачака је дато следећом теоремом.

Теорема 11. *Ако је $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ скуп тачака у равни чији је дијаметар 1, онда је максималан број парова тачака на растојању већем од $\frac{1}{\sqrt{2}}$ једнак $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$. Чак шта више, за свако n постоји скуп $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дијаметра 1 са тачно $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ парова тачака на растојању већем од $\frac{1}{\sqrt{2}}$.*

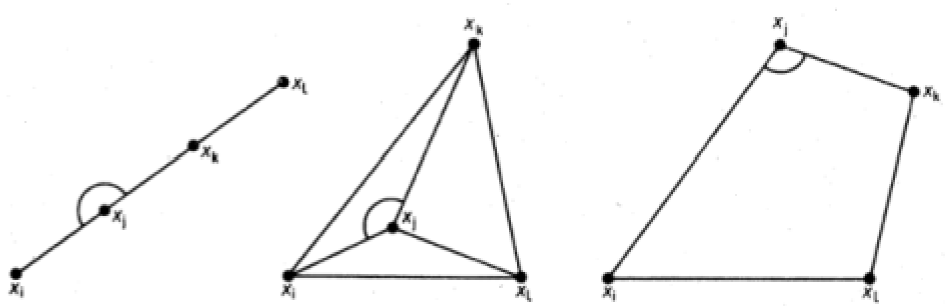
Доказ: Нека је G граф дефинисан као

$$V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

и

$$E(G) = \{x_i x_j | d(x_i, x_j) > 1/\sqrt{2}\}$$

Где $d(x_i, x_j)$ представља *euклидско* растојање између тачака x_i и x_j.
Ми желимо да докажемо да G не садржи K_4.
За почетак приметимо да било које четири тачке у равни морају да образују бар један угао који је најмање $\frac{\pi}{2}$. Конвексан омотач четири тачке може бити или дуж или троугао или четвороугао (погледати слику) али јасно је да у сваком случају постоји угао $x_i x_j x_k$ који је најмање $\frac{\pi}{2}$.

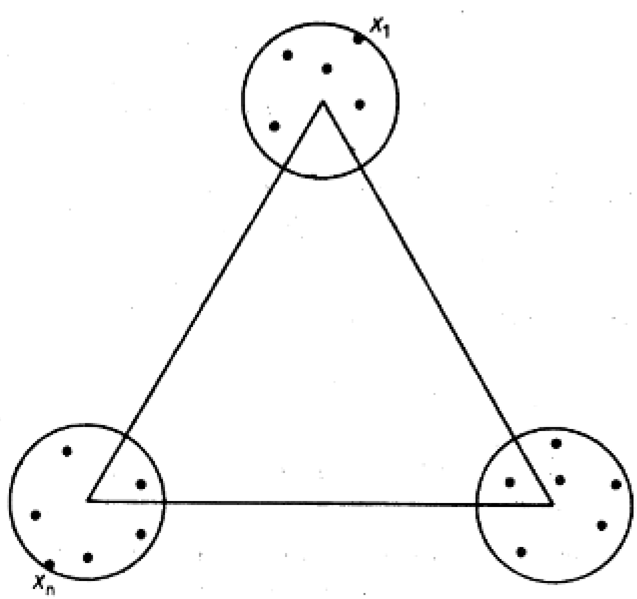


Могући конвекси омотачи четири тачке

Погледајмо сада те три тачке x_i, x_j, x_k које образују тај угао. Немогуће је да сва растојања $d(x_i, x_j), d(x_j, x_k)$ и $d(x_k, x_i)$ бити већа од $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и мања или једнака од 1. Ако су $d(x_i, x_j) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $d(x_j, x_k) > \frac{1}{\sqrt{2}}$, онда је $d(x_i, x_k) > 1$. Зато што је скуп $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дијаметра 1, следи да за било које четири тачке у G, постоји бар један пар који не може бити спојен ивицом, па G не садржи K_4. Сада из Туранове теореме следи да је

$$|E(G)| \leq |E(T_{3,n})| = \lfloor n^2/3 \rfloor$$

Сада лако можемо конструисати скуп $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дијаметра 1 који има тачно $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ парова тачака која су на растојању већем од $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Изаберимо реалан број $r \in (0, (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})/4)$ и нацртајмо три круга полупречника r чији су центри на међусобном растојању $1 - 2r$. Сместимо тачке $x_1, \ldots, x_{\lfloor n/3 \rfloor}$ и први, затим $x_{\lfloor n/3 \rfloor + 1}, \ldots, x_{\lfloor 2n/3 \rfloor}$ у други и $x_{\lfloor 2n/3 \rfloor + 1}, \ldots, x_n$ у трећи круг, на такав начин да је $d(x_1, x_n) = 1$. Овај скуп је очигледно дијаметра 1. Такође $d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ако и само ако се x_i и x_j налазе у различитим круговима, па имамо тачно $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ парова (x_i, x_j) за које је $d(x_i, x_j) > \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Пример са $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ *парова*

Литература

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory*, Springer 2008.

[2] R. Diestel, *Graph theory*, Springer 2000.

Захвалност

Желео бих да се захвалим професору Марку Радовановићу који ми је помогао у писању овог рада као и у проналажењу адекватне литературе. Искористио бих прилику да се захвалим и професорима Математичке гимназије који су ми предавали математичке предмете, пре свега професору Зорану Каделбургу који ми је предавао анализу четири године и због чијих предавања ми је анализа постала омиљен предмет, затим професору Гојку Калајџићу који ми је предавао линеарну алгебру као и професорима Милошу Ђорићу и Славку Моцоњи.