

# МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

---

## Конструисање поплочавања еуклидске равни

---

матурски рад из математике

*Ученик:*  
Марина Васиљевић, IV<sub>Е</sub>

*Ментор:*  
др Зоран Лучић

Београд, мај 2019.

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Поплочавања</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Конструкција кристалографских група</b>	<b>6</b>
3.1	Представљање изометрија аналитичком методом . . . . .	6
3.2	Конструисање генератора кристалографских група . . . . .	9
3.3	Ефективно конструисање коначног подскупа кристалографске групе	11
<b>4</b>	<b>Фундаментални домени и њихова конструкција</b>	<b>12</b>
4.1	Воронојев дијаграм . . . . .	12
4.2	Дирихлеов домен . . . . .	13
4.3	Уопштени Дирихлеов домен за више тачака . . . . .	14
4.4	Уопштени Дирихлеов домен за полигон . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Имплементација</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Закључак</b>	<b>18</b>

## 1 Увод

Људи су одувек имали потребу за украшавањем простора у којем бораве. Откада је човек почео да користи камен за облагање зидова и подова, почео је и да бира камење по боји и облику и на тај начин прави шаре. У свим земљама могу се наћи површи прекривене облицима који се слажу и стварају неку шару. Понављање неких облика је заступљено у орнаменталној уметности и мозаику. Стари Грци и Римљани правили су мозаике који су приказивали сцене из историје, митологије или свакодневног живота. Арапи и Маври користили су плочице у само неколико боја и облика и на тај начин правили занимљиве шаре којима су украшавали своје грађевине. Један такав пример је палата Алхамбра у Шпанији (Слика 1а). Данас се за поплочавања обично користе једноставни облици али се уметници као што је Морис Ешер<sup>1</sup> баве занимљивим понављајућим шарама, као видом уметности (Слика 1б).

У раду се бавимо математичким представљањем поплочавања као и имплементацијом интерактивне апликације којом се према инструкцијама корисника могу добити поплочавања.



(а) Палата Алхамбра у Шпанији



(б) Гуптери, дело Мориса Ешера

Слика 1: Примери поплочавања

<sup>1</sup>Maurits Cornelis Escher - холандски уметник и графичар, посебно познат по својим представама парадоксалних и немогућих призора (1898—1972)

## 2 Поплочавања

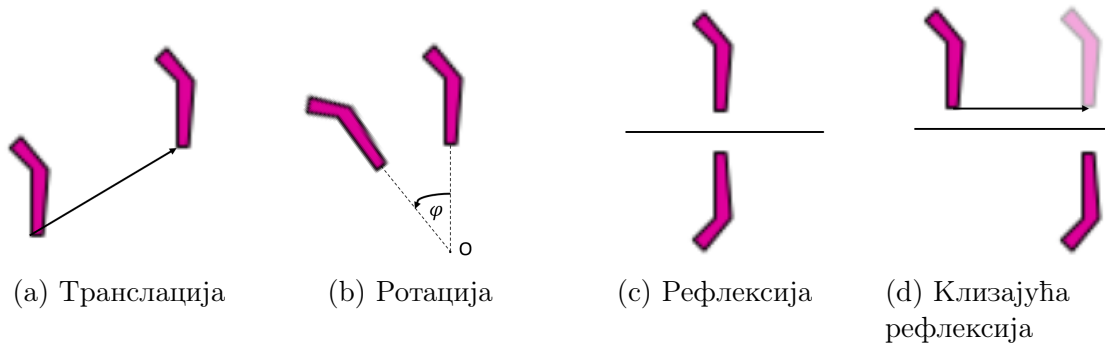
Поплочавање је прекривање равни или простора геометријским фигурама чије се унутрашњости не преклапају. Такве фигуре називамо плочицама или теселима од латинске речи *tessalla* која означава парче камена или стакла од кога се слаже мозаик. Посебно су занимљива поплочавања код којих су плочице подударне. Такво поплочавање назива се *моноедарско*.

У овом раду ћемо се бавити поплочавањима еуклидске равни  $E^2$ . Прво ћемо дефинисати појам изометријске трансформације.

**Дефиниција 2.1** Бијекција  $\sigma : E^2 \rightarrow E^2$  је *изометријска трансформација* ако сваке две тачке  $A, B$  пресликава у  $A', B'$  такве да је  $AB \cong A'B'$ .

Све изометрије равни су једног од следећа четири типа:

1. Транслација за дати вектор  $v$ , у ознаци  $\mathcal{T}_v$  (Слика 2а);
2. Ротација око тачке  $O$  за угао  $\varphi$ , у ознаци  $\mathcal{R}_{O,\varphi}$  (Слика 2б). Специјално, када је  $\varphi = \pi$  назива се *централна симетрија* у тачки  $O$  и означава  $\mathcal{S}_O$ ;
3. Рефлексија са осом  $p$ , у ознаци  $\mathcal{S}_p$  (Слика 2с);
4. Клизајућа рефлексија, односно композиција рефлексије са осом  $p$  и транслације за вектор  $v$ , колинеаран са осом, означава се са  $\mathcal{G}_{v,p}$  (Слика 2д).



Слика 2: Изометријске трансформације

Изометрија је *директна* ако задржава оријентацију, односно ако се сваки троугао равни слика у троугао који је исто оријентисан. Транслација и ротација су директне изометрије. Рефлексија и клизајућа рефлексија су *индиректне*, што значи да се сваки троугао слика у троугао супротне оријентације.

Изометрија која сваку тачку слика у саму себе назива се *идентитет* и означава са  $\mathcal{I}$ .

Скуп свих изометрија са операцијом композиције је алгебарска структура група јер:

1. Композиција две изометрије је такође изометрија;
2. Композиција изометрија је асоцијативна операција;
3. Композиција идентитета и било које изометрије даје ту изометрију;
4. Свака изометрија има себи инверзну изометрију:

- $\mathcal{T}_v \circ \mathcal{T}_{-v} = \mathcal{I}$
- $\mathcal{R}_{O,\varphi} \circ \mathcal{R}_{O,-\varphi} = \mathcal{I}$
- $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{I}$
- $\mathcal{G}_{v,p} \circ \mathcal{G}_{-v,p} = \mathcal{I}$ .

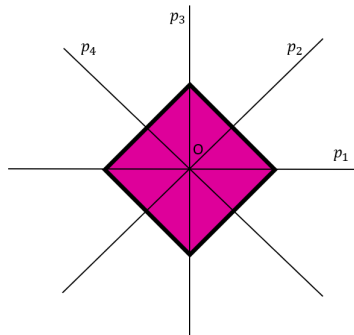
Сваку подргрупу групе свих изометрија називамо *групом изометрија*.

Симетрија неке фигуре  $T$  је изометрија  $\sigma$  таква да пресликава ту фигуру у саму себе, односно  $\sigma(T) = T$ . Скуп свих симетрија једне фигуре је подргрупа групе свих изометрија равни зато што:

1. Композиција две симетрије исте фигуре је симетрија те фигуре
2. Идентитет је симетрија сваке фигуре
3. Инверз симетрије неке фигуре је такође симетрија те фигуре.

Зато скуп свих симетрија једне фигуре називамо *групом симетрија* те фигуре.

На пример, симетрије квадрата приказаног на слици 3 су рефлексije са осама  $p_1, p_2, p_3$  и  $p_4$ , ротације око тачке  $O$  за углове  $90^\circ, 180^\circ$  и  $270^\circ$ , као и идентитет.

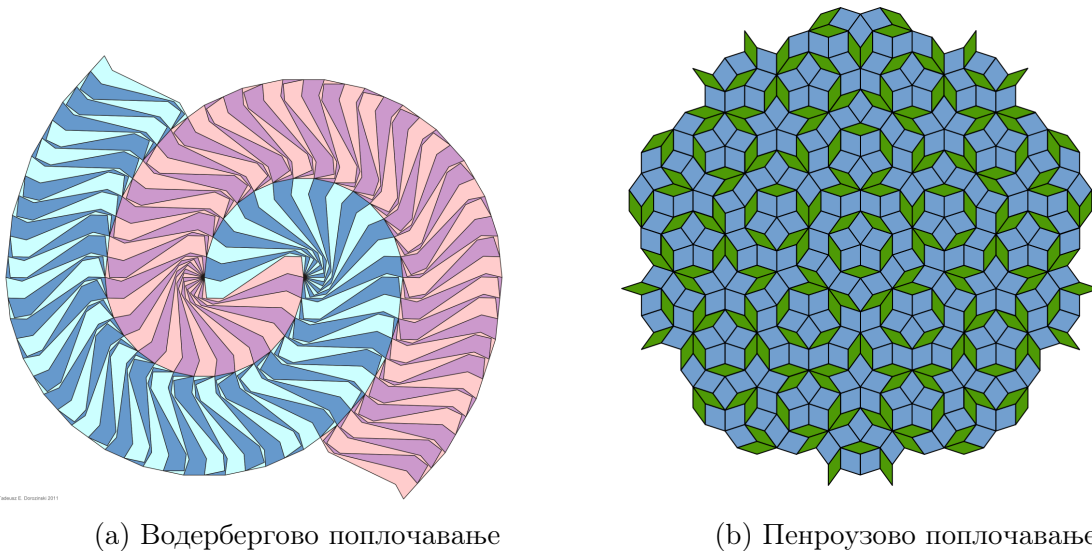


Слика 3: Симетрије квадрата

Симетрија поплочавања  $\tau$  је изометрија која сваку плочицу тог пресликавања пресликава на неку другу плочицу. Ако група симетрија поплочавања садржи две неколинеарне транслације, тада је поплочавање *периодично*. То значи да група симетрија периодичног поплочавања садржи подгрупу транслација. Означимо са  $a$  и  $b$  векторе транслација из генератора те подгрупе. Тада ту подгрупу чине све транслације за векторе облика  $na + mb$ , где  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Применом изометрија те подгрупе транслација на произвољну тачку добију се темена решетке са паралелним ивицама. Добијене "решетке" подсећају на кристалне решетке, па се такве групе називају *кристалографске групе*.

**Дефиниција 2.2** Кристалографска група равни је коначно генерисана група изометрија те равни која садржи неколинеарне транслације.

Постоје и поплочавања која нису периодична. На сликама 4 се виде примери неких аperiodичних поплочавања, али се њима у даљем раду нећемо бавити и под поплочавањем ћемо подразумевати периодично поплочавање.

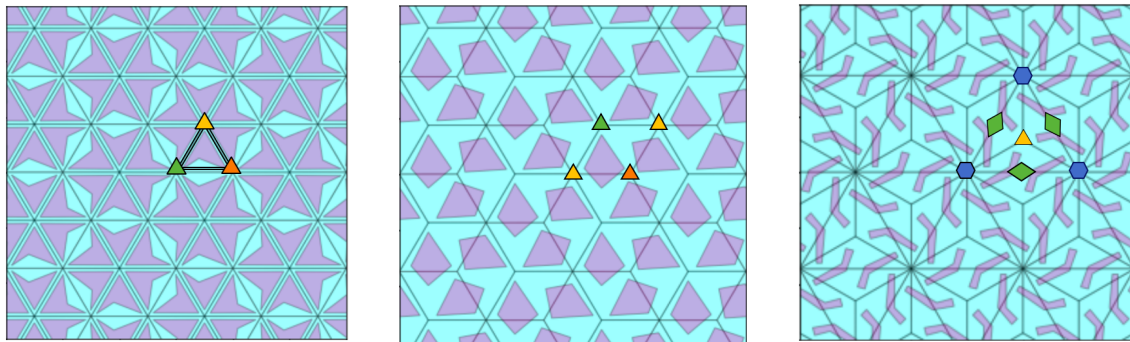


Слика 4: Примери аperiodичног поплочавања

На сликама ћемо изометрије представљати симболима који су дати у табели 1. Познато је да над  $E^2$  постоји 17 типова кристалографских група. Користећи симболе из табеле 1 описаћемо неке од тих група (Слика 5).

- Транслација
- Ротација за угао  $60^\circ$
- Ротација за угао  $90^\circ$
- ▲ Ротација за угао  $120^\circ$
- ◆ Централна симетрија
- = Рефлексција
- ..... Клизајућа рефлексција

Табела 1: Симболи за представљање изометрија



Слика 5: Примери кристалографских група приказаних симболима

Ако за сваке две плочице поплочавања постоји симетрија тог поплочавања која једну плочицу слика у другу, тада поплочавање називамо *изоедарским*. Изоедарско поплочавање је периодично.

Сва изоедарска поплочавања добијамо деловањем неке кристалографске групе на једну плочицу. Пример такве кристалографске групе је група симетрија поплочавања. Међутим, група која генерише поплочавање може бити права подгрупа групе симетрија уколико постоји нетривијална симетрија поплочавања која је уједино и симетрија плочице. У супротном, уколико ниједна нетривијална симетрија плочице није у групи која генерише поплочавање, та плочица је *фундаментални домен* те групе.

**Дефиниција 2.3** *Фундаментални домен  $F$  кристалографске групе  $G$  равни  $E^2$  је фигура таква да:*

1.  $\bigcup_{g \in G} g(F) = E^2$
2.  $(\forall g \in G)(\overset{\circ}{F} \cap g(\overset{\circ}{F}) = \emptyset)$  .

Попловавање можемо конструисати тако што прво конструисемо кристалографску групу, а затим њен фундаментални домен. Тиме ћемо се бавити у наставку рада као и рачунарском имплементацијом конструкције.

### 3 Конструкција кристалографских група

#### 3.1 Представљање изометрија аналитичком методом

Да бисмо могли компјутерски да генеришемо попловавање, потребно је да прво конструисемо кристалографску групу. Изометријске трансформације ћемо представити користећи методе аналитичке геометрије.

Ако у  $E^2$  уведемо координатни систем, тачке представљамо дводимензионим координатама, тј. елементима  $R^2$ . Координате тачке  $A$  означаваћемо са  $(A_x, A_y)$ . Аналитички ћемо изометријску трансформацију у  $R^2$  представити као специјалан случај афине трансформације. Ако је  $A' = G(A)$  тада је:

$$\begin{aligned} A'_x &= pA_x + qA_y + c_x \\ A'_y &= rA_x + sA_y + c_y \end{aligned}$$

Коришћењем рачуна са матрицама то можемо представити:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix}$$

Претходна једнакост је еквивалентна следећој:

$$\begin{bmatrix} p & q & c_x \\ r & s & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Таква форма је погодна за рачунарску имплементацију јер се примена изометријске трансформације своди на множење матрица. Посебно је значајно што се композиција изометријских трансформација своди на множење матрица одговарајућих изометрија. Заправо смо афине трансформације  $R^2$  представили као тродимензионе



линеарне трансформације које раван  $R^2 \times \{1\}$  сликају на саму себе. Тројке из  $R^2 \times \{1\}$  којима представљамо тачке еуклидске равни називају се *хомогеним координатама*.

Матрица транслације  $\mathcal{T}_t$  за вектор  $t = (t_x, t_y)$  је

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

јер

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x + t_x \\ A_y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Једначина ротација  $\mathcal{R}_{O,\varphi}$  за угао  $\varphi$  око координатног почетка је

$$A'_x = A_x \cos(\varphi) + A_y \sin(\varphi)$$

$$A'_y = -A_x \sin(\varphi) + A_y \cos(\varphi)$$

што је у хомогеним координатама

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \cos(\varphi) + A_y \sin(\varphi) \\ -A_x \sin(\varphi) + A_y \cos(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Једначина рефлексија  $\mathcal{S}_x$  око  $x$ -осе у хомогеним координатама је

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ -A_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Предност коришћења хомогених координата је у томе што слагање изометрија рачунамо као множење матрица. Како ротацију око дате тачке  $C$  можемо дефинисати као

$$\mathcal{R}_{C,\varphi} = \mathcal{T}_{\vec{OC}} \circ \mathcal{R}_{O,\varphi} \circ \mathcal{T}_{\vec{CO}},$$

па матрицу ротације  $\mathcal{R}_{C,\varphi}$  рачунамо на следећи начин

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & C_x \\ 0 & 1 & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -C_x \\ 0 & 1 & -C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & -C_x \cos(\varphi) - C_y \sin(\varphi) + C_x \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & C_x \sin(\varphi) - C_y \cos(\varphi) + C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Слично конструишемо рефлексiju  $\mathcal{S}_p$  у односу на праву  $p$ , која је задата координатама тачке  $A$  на њој и углом  $\varphi$  који она гради са  $x$ -осом. Дакле,

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\vec{OA}} \circ \mathcal{R}_{O,\varphi} \circ \mathcal{S}_x \circ \mathcal{R}_{O,-\varphi} \circ \mathcal{T}_{\vec{AO}}.$$

Уколико оса садржи координатни почетак и тачку  $A$ ,  $\mathcal{S}_{OA}$  можемо и директно представити без примене тригонометријских функција као

$$\begin{bmatrix} \frac{A_x^2 - A_y^2}{A_x^2 + A_y^2} & \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} & 0 \\ \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} & \frac{A_y^2 - A_x^2}{A_x^2 + A_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Користећи претходно, можемо конструисати рефлексiju  $\mathcal{S}_{AB}$  у односу на праву  $AB$ .

$$\mathcal{S}_{AB} = \mathcal{T}_{\vec{OA}} \circ \mathcal{S}_{OA} \circ \mathcal{T}_{\vec{AO}}.$$

Клизајућу рефлексiju за вектор  $\vec{AB}$  и осу  $p$  одређену тачкама  $A$  и  $B$  представљамо као композицију translације и рефлексije. За израчунавање користимо рефлексiju у односу на праву одређену двома тачкама

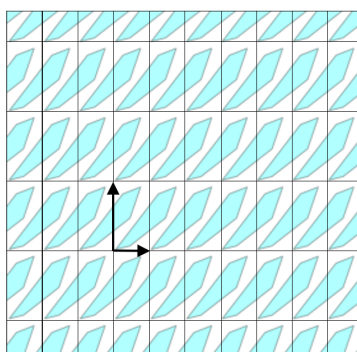
$$\mathcal{G}_{\vec{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\vec{AB}}.$$

### 3.2 Конструисање генератора кристалографских група

Наведимо примере генератора неких кристалографских група.

Кристалографску групу типа **p1** (Слика 6) генеришу две translације за неколинеарне векторе  $u$  и  $v$ .

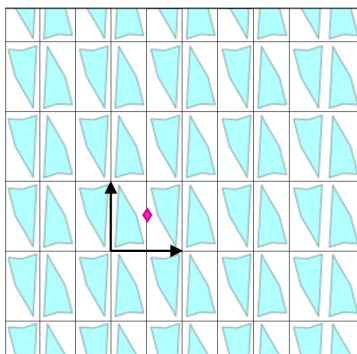
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$



Слика 6: Група типа **p1**

Кристалографску групу типа **p2** (Слика 7) генеришу централне симетрије у тачкама  $A, B$  и  $C$ . Ради ефикасније рачунарске имплементације одговара нам да се за генераторе изаберу и две translације. Пошто је  $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{2\vec{AB}}$  и  $\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{2\vec{AC}}$ , за генераторе те групе можемо изабрати  $\{\mathcal{S}_A, \mathcal{T}_{2\vec{AB}}, \mathcal{T}_{2\vec{AC}}\}$ . У матричном облику то је

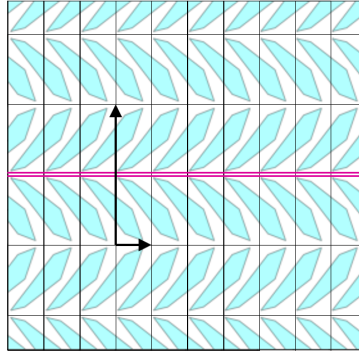
$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2A_x \\ 0 & -1 & 2A_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$



Слика 7: Група типа **p2**

Кристалографску групу типа **pm** (Слика 8) генеришу две рефлексije са паралелним осама  $a$  и  $b$  и транслација за вектор  $u$ , паралелан са тим осама. Нека су тачке  $A$  и  $B$  редом на правама  $a$  и  $b$  тако да је  $AB \perp a$ . Како су осе паралелне, важи да је  $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{T}_{2\vec{AB}}$ . За генератор групе можемо изабрати  $\{\mathcal{S}_a, \mathcal{T}_v, \mathcal{T}_u\}$ , где је вектор  $v = \vec{AB}$ . Ако права  $a$  пролази кроз координатни почетак, генератор у матричном облику је

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{A_x^2 - A_y^2}{A_x^2 + A_y^2} & \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} & 0 \\ \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} & \frac{A_y^2 - A_x^2}{A_x^2 + A_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2(B_x - A_x) \\ 0 & 1 & 2(B_y - A_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$



Слика 8: Група типа **pm**

На сличан начин можемо конструисати генераторе за преосталих 14 типова кристалографских група.

### 3.3 Ефективно конструисање коначног подскупа кристалографске групе

С обзиром на то да кристалографска група садржи бесконачно много изометрија, није могуће ефективно конструисати целу кристалографску групу. У пракси, конструисамо неки подскуп те групе да бисмо представили део поплочавања.

Можемо користити различите критеријуме за одређивање коначног подскупа, а један од њих је

$$G' = \{\sigma \in G \mid d(X, \sigma(X)) < r\}$$

где је  $G$  дата група,  $X$  изабрана тачка равни,  $r$  изабрана константа и  $d$  функција растојања.

Нека је  $\Gamma$  генератор групе  $G$ . Дефинишимо низ скупова изометрија  $G_n$  такав да је

$$G_0 = \{I\}$$

$$G_{n+1} = G_n \cup \{\sigma \circ \rho \mid \sigma \in G_n \wedge \rho \in \Gamma \cup \Gamma^{-1} \wedge d(X, (\sigma \circ \rho)(X)) < r\}.$$

С обзиром на то да је  $G_0 \subset G'$  и да из услова  $d(X, (\sigma \circ \rho)(X)) < r$  произилази

$$G_n \subset G' \Rightarrow G_{n+1} \subset G'$$

, индукцијом закључујемо да је

$$G_n \subset G'$$

за свако  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Из дефиниције непосредно произилази да је  $G_n \subset G_{n+1}$ , што значи да постоји  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  такав да је  $G_{n+1} = G_n$ , за свако  $n \geq n_0$ , јер у супротном  $G'$  не би био коначан скуп. Овим смо описали поступак конструисања  $G'' = G_{n_0}$ , који се може ефективно спровести. Приметимо да  $G''$  не мора бити једнако  $G'$ , али у пракси можемо изабрати довољно велико  $r$  тако да изометрије скупа  $G''$  одређују део поплочавања који приказујемо.

У рачунарској имплементацији за дату кристалографску групу  $G$  на почетку одређујемо  $G''$  у форми скупа матрица, тако да после можемо ефикасно испржавати поплочавања за различите облике плочица.

## 4 Фундаментални домени и њихова конструкција

Да бисмо конструисали попловавање, поред кристалографске групе потребно је да конструисамо и плочицу на коју примењујемо изометрије групе. Конструисаћемо плочицу која је фундаментални домен.

У овом поглављу ћемо описати конструкцију Дирихлеовог домена као и уопштења Дирихлеовог домена.

### 4.1 Воронојев дијаграм

Нека су у равни  $\pi$  задате две произвољне тачке  $A$  и  $B$ . Поделимо раван  $\pi$  симетралом дужи  $AB$  на две полуравни  $\pi_A$  и  $\pi_B$ , такве да  $A \in \pi_A$  и  $B \in \pi_B$ . Јасно је да су све тачке на симетрали једнако удаљене од тачака  $A$  и  $B$ , као и да је свакој тачки у  $\pi_A$  ближа тачка  $A$  него тачка  $B$  и обрнуто. На тај начин смо све тачке равни  $\pi$  поделили на два подскупа према томе којој од тачака  $A$  и  $B$  су ближе, а на рубу тих скупова (симетрала дужи  $AB$ ) су тачке које су једнако удаљене од  $A$  и  $B$ .

Уопштимо овај поступак за коначан број почетних тачака.

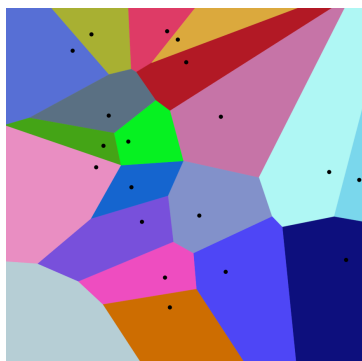
Означимо редом са  $\pi_{XY}$  и  $\pi_{YX}$  отворене полуравни којима симетрала дужи  $XY$  дели раван  $\pi$  на две полуравни тако да  $X \in \pi_{XY}$  и  $Y \in \pi_{YX}$ .

Уколико су на почетку задате три тачке  $A$ ,  $B$  и  $C$ , тада је  $\pi_{AB}$  скуп свих тачака у равни којима је тачка  $A$  ближа него тачка  $B$  и  $\pi_{AC}$  скуп тачака којима је тачка  $A$  ближа него тачка  $C$ , па је  $\pi_{AB} \cap \pi_{AC}$  скуп тачака којима је тачка  $A$  најближа тачка.

Применом овог поступка на  $n$  тачака,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  добијамо да је скуп тачака којима је  $A_i$  најближа

$$\bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \pi_{A_i A_j}.$$

Оваква поделу равни на области према растојњу од датих тачака назива се *Воронојевим дијаграмом* (Слика 9) према руском матетичару *Георгију Вороноју*.



Слика 9: Воронојев дијаграм

**Дефиниција 4.1** За скуп тачака равни  $S$ , Воронојев дијаграм је подела равни на затворене области  $V_S(A_i)$ , које називамо Воронојевим ћелијама, таква да је

$$(\forall X \in V_S(A))(\forall B \in S \setminus \{A\}) \quad d(X, A) \leq d(X, B)$$

$$\bigcup_{A \in S} V_S(A) = E^2.$$

Из претходног разматрања произилази

$$V_S(A) = \bigcap_{B \in S \setminus \{A\}} \pi_{AB}.$$

## 4.2 Дирихлеов домен

Један метод конструисања фундаменталног домена заснива се на Воронојевом дијаграму.

Са  $O_G(X)$  означавамо орбиту тачке  $X$ , односно

$$O_G(X) = \{g(X) \mid g \in G\}.$$

Воронојев дијаграм за скуп  $O_G(X)$  представља попловавање за групу  $G$ . Једна ћелија тог дијаграма је фундаментални домен те групе и назива се *Дирихлеов домен*.

**Дефиниција 4.2** За дату тачку  $X$  и кристалографску групу  $G$  Дирихлеов домен је

$$D_G(X) = \{Y \in E^2 \mid (\forall g \in G \setminus \{I\}) (d(Y, X) \leq d(Y, g(X)))\}.$$

Докажимо да овако дефинисан Дирихлеов домен јесте фундаментални домен за кристалографску групу  $G$ . Дирихлеов домен можемо посматрати као ћелију Воронојевог дијаграма

$$D_G(X) = V_{O_G(X)}(X).$$

Како важи  $d(g(X), g(Y)) = d(X, Y)$ , биће  $D_G(g(X)) = g(D_G(X))$ . Такође приметимо да

$$Y \in O_G(X) \implies O_G(Y) = O_G(X)$$

На основу претходног важи

$$\bigcup_{g \in G} g(D_G(X)) = \bigcup_{g \in G} D_G(g(X)) = \bigcup_{y \in O_G(X)} D_G(Y) = \bigcup_{Y \in O_G(X)} V_{O_G(Y)}(Y) = E^2.$$

Тиме смо доказали први услов из дефиниције фундаменталног домена, да његове слике прекривају целу раван.

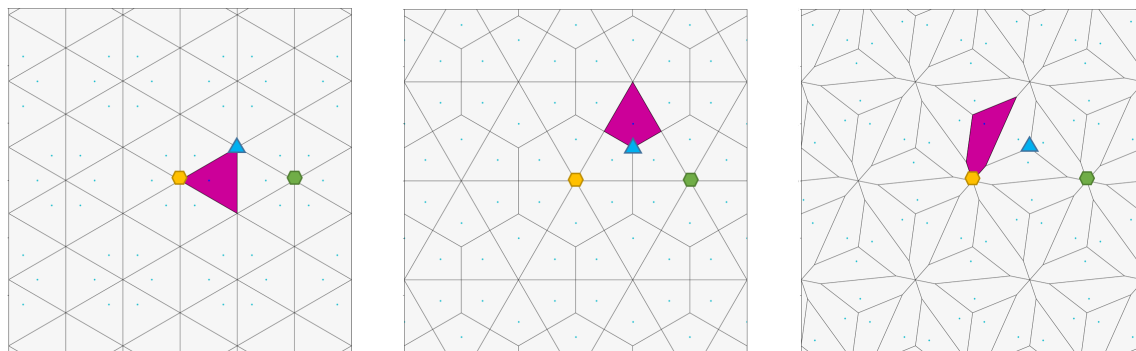
Слично закључујемо да за  $Y = g(X)$

$$g(D_G(X)) = D_G(Y) = V_{O_G(Y)}(Y)$$

што значи да су  $D_G(X)$  и  $D_G(Y)$  различите ћелије Воронојевог дијаграма, па им се унутрашњости не секу.

Тиме смо доказали и други услов из дефиниције фундаменталног домена, да се његове слике не преклапају. Дакле, доказали смо да је  $D_G(X)$  фундаментални домен групе  $G$ .

На наредним сликама приказани су примери Дирихлеових домена за групу  $\mathbf{p6}$  и произвољне тачке. Група  $\mathbf{p6}$  је генерисана ротацијом за угао од  $120^\circ$  и две ротације за угао од  $60^\circ$  око темена означених на слици.



Слика 10: Примери Дирихлеовог домена групе  $\mathbf{p6}$

### 4.3 Уопштени Дирихлеов домен за више тачака

Слично Дирихлеовом домену за једну тачку, можемо посматрати домен генерисан двома тачкама. Тада нам је  $O_G(\{X, Y\})$  скуп тачака које се могу добити изометријама од једне од те две тачке. Посматрајмо Воронојев дијаграм над свим тачкама орбите  $O_G(\{X, Y\})$ . Унија Воронојевих ћелија за тачку  $X$  и за тачку  $Y$  је фундаментални домен групе  $G$ , што је у општем случају исказано следећим тврђењем

**Тврђење 1** Нека је  $S$  коначан скуп тачака равни на коју делује кристалографска група  $G$ , тада је

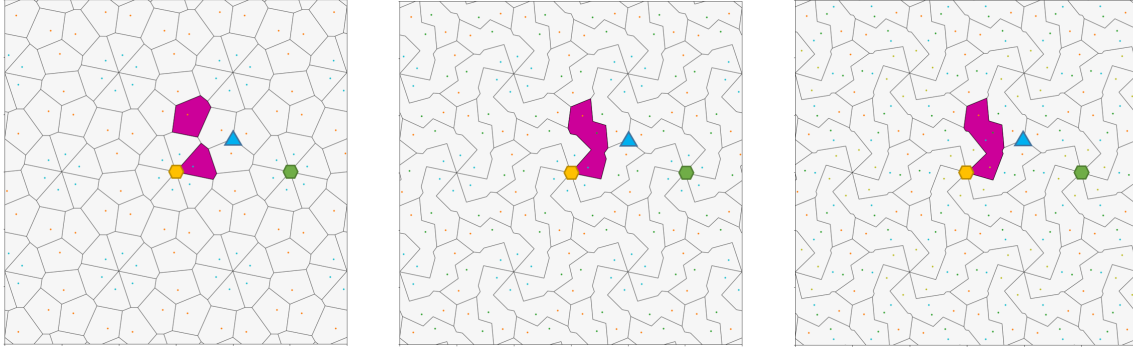
$$D_G(S) = \{x \in E^2 \mid (\forall g \in G \setminus \{I\}) (d(X, S) \leq d(X, g(S))) \}$$

фундаментални домен групе  $G$ , где је  $d(X, S) = \min_{Y \in S} d(X, Y)$  и важи

$$D_G(S) = \bigcup_{X \in S} V_{O_G(S)}(X)$$



На примерима видимо уопштен Дирихлеов домен за две, три и четири произвољне тачке и групу **рб**.



#### 4.4 Уопштени Дирихлеов домен за полигон

Дефиниција Дирихлеовог домена се може уопштити и када скуп  $S$  није коначан, а конструкција Воронојевог дијаграма у том случају се може извести као гранична вредност када бирамо све већи број тачака.

Нека је дат полигон  $P$  тако да се слике полигона у орбити не пресецају.

Нека је  $S_0$  скуп темена полигона  $P$ , а  $S_n$  скуп у коме су поред темена полигона и по  $n$  тачака са сваке од страница полигона на једнаким растојањима у оквиру странице.

На слици 12а је приказан  $G(S_0)$ . Он јесте фундаментални домен али приметимо да не обухвата цео полигон  $P$ .

На слици 12б је приказан  $D_G(S_1)$ , где су укључена и средишта страница и примећујемо да тај фундаментални домен боље покрива почетни полигон.

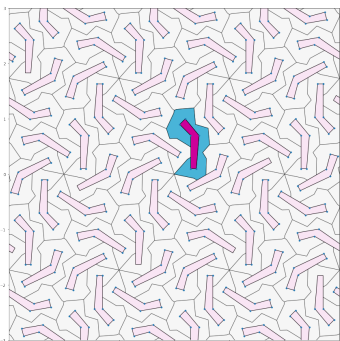
Уопштени Дирихлеов домен за полигон можемо да дефинишемо исто као и за коначан скуп

$$D_G(P) = \{X \in E^2 \mid (\forall g \in G \setminus \{I\}) (d(X, P) \leq d(X, g(P))) \}$$

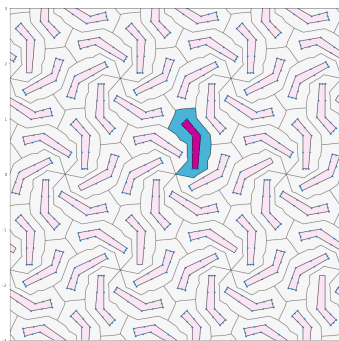
при чему је  $d(X, P) = \inf_{Y \in P} d(X, Y)$  и тада важи

$$D_G(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_G(S_n).$$

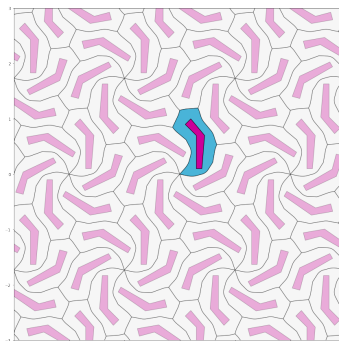
За практичне потребе треба узети довољно велико  $n$ . На слици 12с дат је пример за  $D_G(S_{50})$



(a) Дирихлеов домен за темена



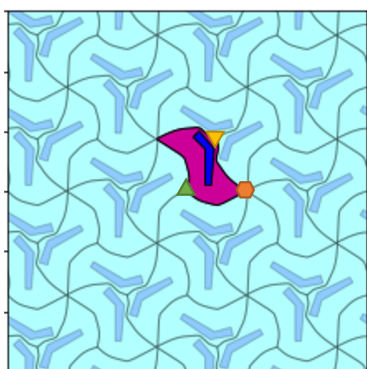
(b) Дирихлеов домен за темена и средишта



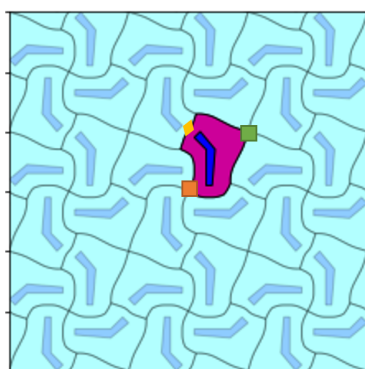
(c) Дирихлеов домен за 50 тачака по страници

Слика 12: Дирихлеови домени за различите бројеве тачака које користимо и групу  $p6$

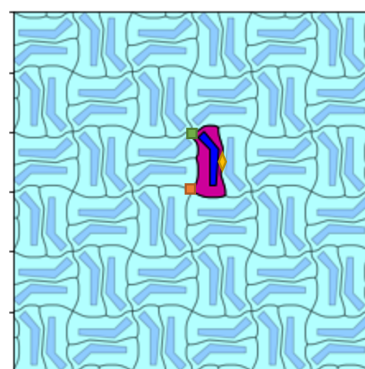
На следећим сликама су дати примери уопштених дирихлеових домена за исти полигон у разним кристалографским групама.



(a) Група типа  $p3$



(b) Група типа  $p4$

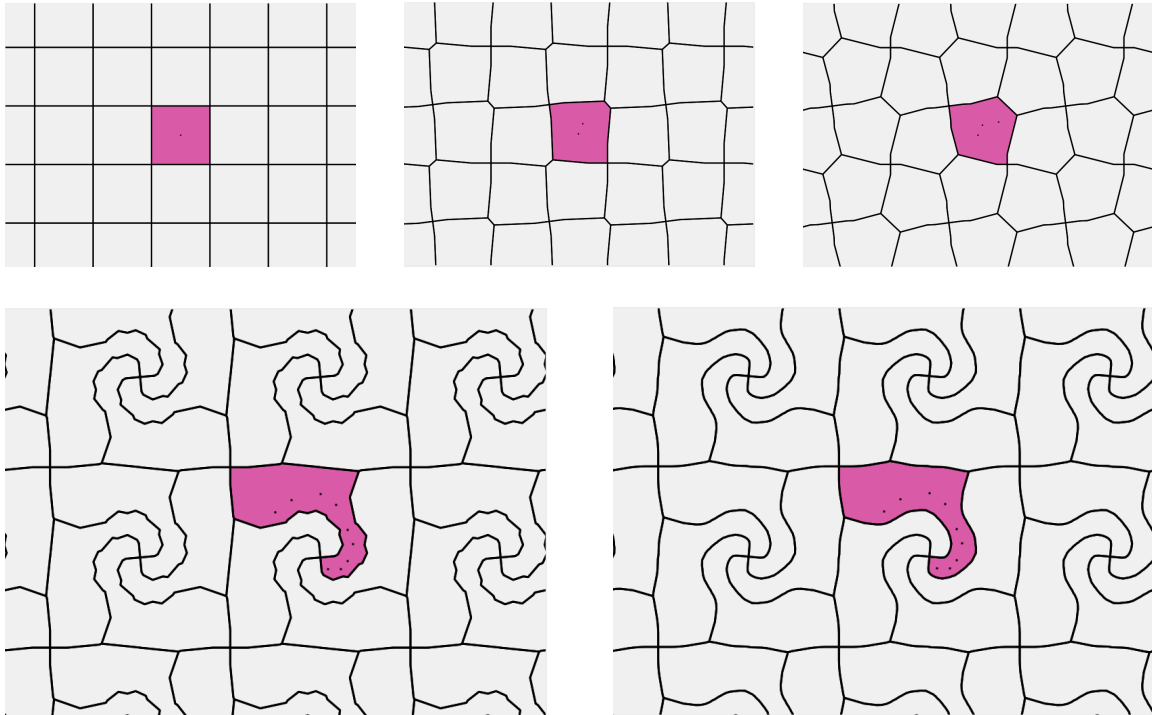


(c) Група типа  $p4m$

## 5 Имплементација

На основу претходно описаних метода конструкције кристалоградске групе и фундаменталних домена, имплементирана је рачунарска апликација која омогућава интерактивну конструкцију фундаменталног домена за изабрану кристалографску групу. Апликација се може користити за дизајнирање занимљивих поплочавања. Имплементација је рађена у програмском језику Пајтон.

На приказаним изгледима екрана (Слика 14), корисник додаје тачку по тачку кликом миша и на тај начин обликује фундаментални домен. За конструкцију фундаменталних домена, поред изабраних тачака, коришћене су додатне тачке између њих како би облик фундаменталног домена био мекши.



Слика 14: Пример рада програма

## 6 Закључак

У раду су обрађени појмови у вези са попловавањем и кристалографским групама. Описан је метод конструкције фундаменталних домена кристалографских група еуклидске равни, као и метод конструкције саме кристалографске групе. Математички је описана метода конструкције фундаменталних домена заснована на уопштењу Дирихлеовог домена и имплементирана је рачунарска апликација која ефективно конструише фундаменталне домене коришћењем те методе.

Корисник апликације кликом миша уцртава тачке. На основу задатих тачака програм конструише фундаментални домен коме припадају све тачке равни, које су ближе некој од задатих тачака, него некој од њихових слика у изометријама из кристалографске групе, и у реалном времену се исцртава добијено попловавање.

Апликација има опцију да изабрани скуп тачака посматра као темена изломљене линије, на основу које се конструише фундаментални домен као скуп тачака равни којима је та изломљена линија ближа него било која њена слика.

Захвалила бих се ментору др Зорану Лучићу на уложеном труду и пренетом знању, као и на помоћи у писању рада и набављању литературе. Такође бих се захвалила др Бојану Башићу са Природно-математичког факултета у Новом Саду за идеје и подршку током рада.

## Литература

- [1] Carne, T. K. "Geometry and groups." Lecture notes, Cambridge University (2006).
- [2] Grünbaum B, Shephard GC. "Tilings and patterns." Freeman (1987).
- [3] Kaplan, Craig S. "Introductory tiling theory for computer graphics." Synthesis Lectures on Computer Graphics and Animation 4.1 (2009): 1-113.
- [4] Kilgore, J. "Fundamental Domains of Discrete Groups Acting on Euclidean Space." (2012).
- [5] Lučić, Z., and Molnár, E. "Combinatorial classification of fundamental domains of finite area for planar discontinuous isometry groups." Archiv der Mathematik 54.5 (1990): 511-520.
- [6] Molnár, E. "Nice tiling, nice geometry." Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen (2012): 269-280.
- [7] Schattschneider, D. "The plane symmetry groups: their recognition and notation." *The American Mathematical Monthly* 85.6 (1978): 439-450.