

:

;

:

:

, IV

, 2014.

# Садржај

1. Увод.....	3
2. Моћ центра масе.....	4
2.1.1 Положај и карактеристике центра масе .....	5
2.1.2 Геометријска тврђења у вези са центром масе.....	6
2.2.0 Неке познатије геометријске теореме показане коришћењем особина центра масе-идеја.....	8
2.2.1 Доказ Ван Обелове теореме.....	8
2.2.2 Доказ Чевине теореме .....	9
2.2.3 Доказ Менелајеве теореме .....	10
2.2.4 Доказ постојања Симсонове праве- Симсонова теорема.....	12
3. Квадрат над хипотенузом то зна свако дете једнак је збиру квадрата над обе катете.....	14
3.1.0 Питагорина теорема.....	14
3.1.1 Али прво један занимљив математички доказ Питагорине теореме.....	14
3.2.0 Физички докази Питагорине теореме.....	16
3.2.1 Питагора на леду.....	16
3.2.2 И прстен на прстену доказује Питагору .....	17
3.2.3 Питагора и акваријум .....	19
3.3 Још која теорема помоћу воде.....	20
4. За шта је још добра струја осим за напајање електричних уређаја? .....	22
4.0 Основни појмови у вези са електричном струјом .....	22
4.1 Неједнакост између аритметичке и геометријске средине .....	24
4.2 Неједнакост између аритметичке и хармонијске средине .....	25
4.3 Неједнакост између аритметичке и хармонијске средине за $n$ бројева.....	25
4.4 Граф у математици као доказ Рејлијевог закона монотоности у струјном колу.....	27
5. Минимум и максимум-често разоткрива тајне природе .....	29
5.0 Увод и идеја физичког приступа .....	29
5.1.0 Елипса уопште .....	30
5.1.2 Тврђење које показује све.....	31
5.1.3 Осврт на доказ Хероновог принципа.....	32
5.2.1 Помозимо експерименталним резултатима да се боље обраде.....	33
5.2.2 Мали осврт на претходно поглавље .....	35
5.3.0 Проблеми типа "конструисати минимум".....	35

5.3.1 Зар није Торичели био бољи физичар него математичар? .....	36
5.3.3 Још један дводимензиони проблем.....	38
5.3.4 Још један тродимензиони проблем.....	40
6. Закључак .....	41
7. Литература.....	42

# 1. Увод

Откако је почео вртоглави развој природних наука кроз историју, једна ствар је увек била неопходна а то је математика. Као наука, математика се интензивно развијала тако да су до 16. века њене најзначајније гране биле геометрија и аритметика, затим почиње интензивни развој диференцијалног и интегралног рачуна који достиже свој врхунац негде у 18. веку. Те теорије постале су кључне за испитивање како закона природе који владају на нашој планети тако и за оне који описују цео универзум. Данас математика уопштено служи као средство које описује објекте које је сама створила и као највећи помоћник у проучавању физике, хемије, биологије и осталих природних наука.

Јасно је колики је допринос математика дала целокупном развоју светске науке, али оно што ће бити тема овог матурског рада јесте да покажемо како су друге природне науке утицале на њу. Конкретно, покушаћу да покажем како се многи математички проблеми- теореме могу испитати или доказати користећи се маштом и одређеним физичким законима. Штавише, покушаћу да представим један помало експериментални приступ доказивању неких значајнијих и мање значајних математичких теорема из области геометрије и аритметике, на један крајње занимљив и истраживачки начин.

Идеја овог рада јесте стварање једне мале ризнице питања и одговора који показују међусобну повезаност између егзактних, природних наука и која потврђује да је немогуће показати где се налази линија која раздваја једну науку од друге већ да се њихови предмети проучавања међусобно прожимају.

Потчинити једну науку другој, било физику било математику, представља грех утолико што би свака без оне друге енормно трпела у својој иновативности, применљивости и на крају лепоти. Треба тежити ка проналажењу баланса између егзактности и временске непоколебљивости једне и идејне ширине и подстрека креативности коју носи друга наука. Тада смо сви на добитку!

## 2. Моћ центра масе

### 2.1.0

---

Пре него што почнемо са навођењем неких основних особина центра масе требало би да уведемо неке основне појмове који ће нам бити потребни да бисмо ствари адекватно описали:

-**Физички систем:** је скуп два или више тела која могу да интерагују међусобно или са телима која се налазе изван тог система.

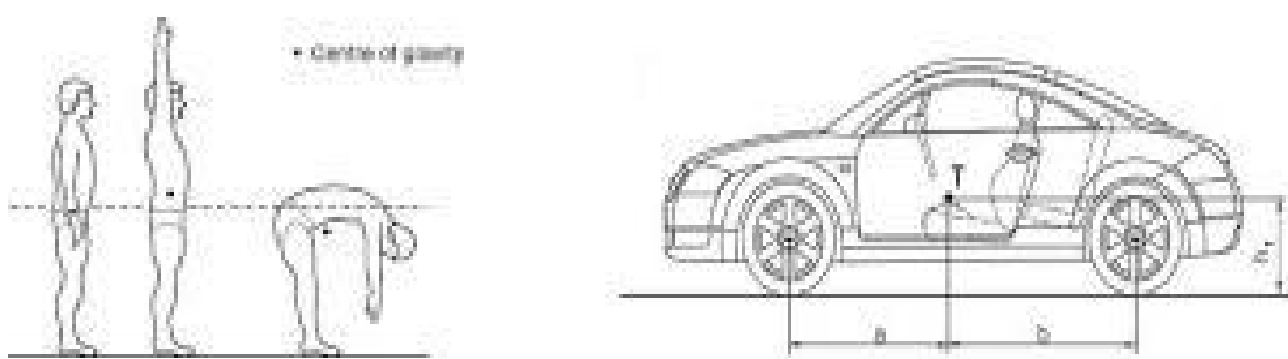
-**Унутрашње силе:** за дати систем су оне силе којима тела из тог система делују једна на друге.

-**Спољашње силе:** су силе интеракције тела у систему са телима која се налазе ван тог посматраног система.

-**Иzolовани систем:** је скуп тела такав да је резултанта спољашњих сила које на њега делују једнак нули или су те спољашње силе много слабије од унутрашњих.

**Дефиниција:** За свако тело или систем тела, изложено деловању неке спољашње силе, постоји тачка која се креће исто као што би се кретала материјална тачка масе једнаке укупној маси система под дејством исте те спољашње силе .

Та тачка се назива **центар масе** тела односно система.



Слика 1. Центар масе код човека и аутомобила

## 2.1.1 Положај и карактеристике центра масе

Посматрајмо систем од  $n$  материјалних тачака и нека свака од њих у неком инерцијалном референтном систему има свој радијус вектор  $\vec{r}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3 \dots n\}$  и своју масу  $m_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3 \dots n\}$ . Тада је положај центра масе одређен радијус вектором:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Ако означимо укупну масу система са  $M$ , координате центра масе одређене су одговарајућим координатама материјалних тачака:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}$$

Ако уопштено посматрамо неко тело коначних димензија, на сличан начин се одређује и његов центар масе. Довољно је изделити га на бесконачно делића који се могу сматрати материјалним тачкама и по горе наведеној формули израчунати положај његовог центра масе.

Аналогно овоме можемо пронаћи одговарајуће формуле за брзину односно убрзање центра масе система.

Посматрајмо два различита тренутка:

Нека је у тренутку 1 положај центра масе  $\vec{r}_c^1$  а у тренутку 2  $\vec{r}_c^2$  при чему важи:

$$\vec{r}_c^1 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^1}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{и} \quad \vec{r}_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Њиховим одузимањем и диференцирањем по времену добијамо израз за брзину центра масе:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$

На крају, ако претходну једначину још једном издиференцирамо по времену добићемо једначину за убрзање центра масе:

$$\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}}{M}$$

Из претходно наведених формула видимо да се кретање физичког система који се састоји из више тела, у случају да се замени овако дефинисаним центром масе, заиста креће као материјална тачка, односно да се његово кретање може описати истим величинама - једначинама које бисмо користили и за описивање кретања сваког другог, изолованог тела.

Што се импулса тиче, импулс центра масе представља векторски збир импулса свих честица које се налазе у физичком систему док је енергија центра масе једнака укупној енергији система.

## 2.1.2 Геометријска тврђења у вези са центром масе

Сада када смо се упознали са неким основним карактеристикама центра масе позабавимо се доказима неких теорема у вези са њим.

У свим следећим тврђењима посматра се физички систем који се налази у Декартовом правоуглом координатном систему а тела се сматрају материјалним тачкама.

Нека је систем тачака  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$  са одговарајућим радијус векторима  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$  и одговарајућим масама  $m_i, i \in \{1, 2, 3 \dots n\}$  важи следеће тврђење: Ако је  $T$  његов центар масе, онда важи следеће:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{0}$$

**Доказ:** Кренимо од дефиниције центра масе:  $\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$ , ако сада помножимо и леву и десну страну са збиром маса и изменимо све знаменевеј страни добијамо:  $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n = m_1 \vec{r} + m_2 \vec{r} + \dots + m_n \vec{r}$  ако сада пребацимо на једну страну мало прегрупирашемо сабирке добијамо следеће:

$$m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}) + \dots + m_n(\vec{r}_n - \vec{r}) = \vec{0}$$

На основу одузимања вектора добијамо тражено тврђење. ■

**T2. Ако у систему који се састоји од  $n$  тела, њих  $k \leq n$  заменимо њиховим центром масе који има масу једнаку збиру маса тих тела, тада се положај центра масе почетног система неће променити.**

**Доказ:** Нека је  $T_n$  центар система од  $n$  материјалних тачака, нека је  $T_k$  центар масе  $k$  изабраних тачака и нека је центар масе система  $T_k, P_{k+1}, P_{k+2}, \dots, P_n$  тачка  $T$ . Тада важи:

$\vec{r}_n = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{O}P_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$  (1) за тачку  $T_k$  важи:  $\vec{r}_k = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \vec{O}P_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$  (2). Коначно по дефиницији за трећи систем важи:

$$\vec{r}_n = \frac{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \vec{O}P_i}{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{i=k+1}^n m_i}$$

Ако сада из једначине (2) изразимо  $\sum_{i=1}^k m_i \vec{O}P_i$  и заменимо у последњу једначину добијамо:

$$\vec{r}_n = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \vec{O}P_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \vec{O}P_i}{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{i=k+1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{O}P_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \vec{r}_n$$

Како су оба вектора јединствено одређена следи да су међусобно једнака чиме је и показано тврђење горње теореме. ■

**T3. За систем од 2 тела  $A$  и  $B$  са масама  $m_a$  и  $m_b$  и радијус векторима  $\vec{r}_a$  и  $\vec{r}_b$  важи следеће: центар масе  $T$  налази се на правој  $AB$  и важи  $\vec{r}_T = \frac{m_b \vec{r}_a + m_a \vec{r}_b}{m_a + m_b}$ .**

**Доказ:** На основу теореме 1 за дати систем важи:  $m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b = (m_a + m_b) \vec{r}_T$ . Након пребацивања на другу страну и обртања вектора добијамо:  $m_a \vec{r}_a = m_b \vec{r}_T$ . Одавде јасно следи једнакост:  $\vec{r}_T = \frac{m_b \vec{r}_a}{m_b} = \frac{m_b}{m_a} \vec{r}_a$ . Из последње једнакости следи да су вектори  $\vec{r}_T$  и  $\vec{r}_a$  линеарно зависни одакле следи колинеарност тачака  $A, B$  и  $T$ . ■



## 2.2.0 Неке познатије геометријске теореме показане коришћењем особина центра масе-идеја

---

У претходном делу смо навели и доказали нека тврђења која се везују за центар масе која произилазе из особина векторских величина, конкретно - радијус вектора материјалних тачака у Декартовом координатном систему. Та тврђења се првенствено базирају на геометријским особинама система и због тога ће нам послужити као основа за доказивање неких најпознатијих теорема из области планиметрије.

Сама идеја за овакав начин решавања лежи у томе да се одређеним тачкама додељују фиктивне масе. Масе додељујемо тако да тачке које деле неке дужи у одређеним односима заправо представљају центар масе система који чине крајеви те дужи. Јасно је да на основу теореме 3., масе које се додељују морају бити обрнуто пропорционалне одговарајућим деловима дужи да би тврђење о центру масе опстало. На овај начин се може одредити положај центра масе било ког многоугла.

У следећа четири потпоглавља показаћемо како се неке познатије теореме из геометрије могу на далеко елегантнији начин доказати. За почетак, извешћемо нешто простији доказ Ван Обелове теореме а потом и доказати Чевину, Менелајеву односно Симсонову теорему.

### 2.2.1 Доказ Ван Обелове теореме

---

**Теорема:** Нека су тачке  $A$ ,  $B$  и  $C$  темена троугла,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  дужи такве да тачке  $A_1, B_1, C_1$  припадају страницама наспрамним одговарајућим теменима и нека се све три дужи секу у тачки  $M$ . Ако важи:  $AC_1 : C_1B = p$ ,  $AB_1 : B_1C = q$ , онда је:

$$AM : MA_1 = p + q$$

**Доказ:** Поставимо тела маса  $1$ ,  $p$ ,  $q$  редом у темена  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Тада су тачке  $A_1, B_1, C_1$  редом центри масе за системе који се састоје од тела смештених у тачкама  $B$  и  $C$ , смештених у тачкама  $A$  и  $C$  и  $A$  и  $B$  зато што су испуњени следећи услови који су потребни за (3):

$$AC_1 : C_1B = p : 1$$

$$AB_1 : B_1C = q$$

Јасно је сада да је тачка  $M$  центар масе система кога чине темена овог троугла па на основу дефиниције центра масе система непосредно следи однос:

$$AM:MA_1 = (p + q):1$$

Тиме је доказ теореме завршен. ■

## 2.2.2 Доказ Чевине теореме

---

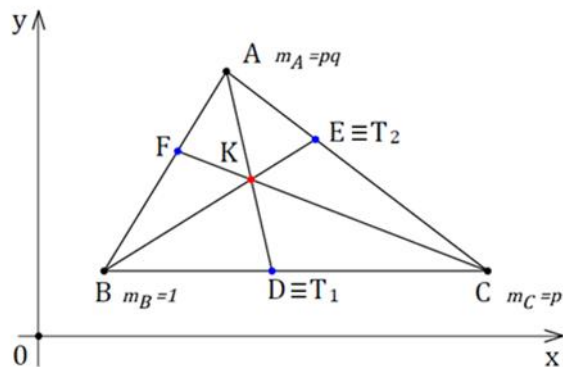
**Теорема:** Нека су тачке  $D, E, F$ , редом изабране на страницама  $BC, CA, AB$  троугла  $ABC$  или на њиховим продужецима. Праве  $AD, BE$  и  $CF$  су конкурентне ако и само ако важи услов:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

**Доказ:** Нека се у општем случају изабране праве  $AD, BE, CF$  секу у унутрашњости троугла. Нека је  $\overrightarrow{BD}:\overrightarrow{DC} = p:1$  и  $\overrightarrow{CE}:\overrightarrow{EA} = q:1$ . Поставимо сафигурирамо тачкама маса  $1, p$  редом у темена  $A, B$  и  $C$  и координатни систем  $xyz$  на произвољној осци. Нека је центар масе тачака  $B, C$  тачка  $T_1$  и по (Т3) важи:  $\overrightarrow{T_1B}:\overrightarrow{CT_1} = \overrightarrow{BD}:\overrightarrow{DC} = p:1 \Rightarrow T_1 \equiv D$ . Такође, аналогно тачка  $T_2$  центар масе тачака  $C, A$  важи на основу (Т3) следећа једнакост:  $\overrightarrow{CT_2}:\overrightarrow{AT_2} = \overrightarrow{CE}:\overrightarrow{EA} = q:1 \Rightarrow T_2 \equiv E$ . Дакле тачке  $D, E$  представљају центре маса одговарајућих система. На основу (Т2) и (Т3) важи да се центар масе целог система налази на правој  $BE$  односно  $AD$ , стога се мора налазити у њиховом пресеку. Нека је то тачка  $K$ . Јасно је сада да права  $CK$  сече праву  $AB$  у тачки  $F$ . Аналогно претходном, како је  $D$  центар масе целог система и како тачка  $F$  припада правој  $AB$  тачка  $F$  мора бити центар масе система који се састоји од тачака  $A$  и  $B$ . Сада важи  $\overrightarrow{AF}:\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AD}:\overrightarrow{DB}$ .

Множењем три добијена односа добијамо:  $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ , што се и тврди. Остаје да урадимо доказ теореме у обрнутом смеру.

Посматрајмо сада у супротном смеру, нека важи почетна једнакост и претпоставимо супротно да дате праве не секу у унутрашњости троугла. Тада постоји тачка  $F'$  на правој  $AB$  таква да је тачка  $T$  на правој  $CF'$ . Тада на основу првог смера важи  $\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = 1$ . Због почетне претпоставке и претходне једнакости добијамо:  $\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}$ . Пошто су тачке  $A, F', F, B$  колинеарне, то се тачке



Слика 2. Доказ Чевине теореме

$F, F'$  поклапају. Контрадикција! Тиме је доказ у потпуности завршен. ■

Теорему сличну претходној која се односи на колинеарност тачака које припадају страницама троугла доказао је математичар Менелај. У следећем делу показаћемо доказ преко центра маса.

### 2.2.3 Доказ Менелајеве теореме

**Теорема:** Нека су у троуглу  $ABC$  изабране тачке  $D, E, F$  тако да се налазе на страницама  $BC, CA, AB$ , или на њиховим продужецима. Тачке су колинеарне ако и само ако важи:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

**Доказ:** Претпоставимо да дате тачке заиста јесу колинеарне. Морамо разликовати 2 случаја, први - када права одређена тим тачкама сече две странице троугла и продужетак треће, и други - када сече сва три продужетка страница.

Први случај:

Аналогно претходном случају, поставимо одговарајућа тела маса  $m_a, m_b, m_c$  у тачкама  $A, B, C$ , као и координатни систем. Изаберимо масе тако да  $F$  буде центар масе система који се састоји од тела  $A$  и  $B$ , и тако да тачка  $G$  буде центар масе система који се састоји од тела  $A$  и  $B$ . На основу (Т1) важе следеће једнакости:  $m_b \vec{r}_b + m_a \vec{r}_a = 0$  (1),  $m_c \vec{r}_c + m_b \vec{r}_b = 0$  (2),  $m_a \vec{r}_a + (m_b + m_c) \vec{r}_c = 0$  (3).

Из једнакости (1) следи:

$$\frac{\vec{r}_a}{\vec{r}_b} = \frac{m_b}{m_a} \Rightarrow \frac{\vec{r}_a}{\vec{r}_b} + \frac{\vec{r}_b}{\vec{r}_b} = \frac{m_b}{m_a} + 1 = \frac{m_b + m_a}{m_b} = -\frac{\vec{r}_c}{\vec{r}_b} \Rightarrow \frac{\vec{r}_a}{\vec{r}_b} = -\frac{m_b + m_a}{m_b} \vec{r}_c$$

Из једнакости (2) следи:

$$\frac{\vec{r}_c}{\vec{r}_b} = \frac{m_b}{m_c}$$

Из једнакости (3) следи:

$$\frac{\vec{r}_a}{\vec{r}_b} = \frac{m_a}{m_b + m_c}$$

Множењем 3 претходне једнакости добијамо:

$$\frac{\vec{r}_a}{\vec{r}_b} \cdot \frac{\vec{r}_c}{\vec{r}_b} \cdot \frac{\vec{r}_c}{\vec{r}_b} = -\frac{m_b + m_a}{m_b} \cdot \frac{m_a}{m_b + m_c} \cdot \frac{m_b}{m_c} = -1$$

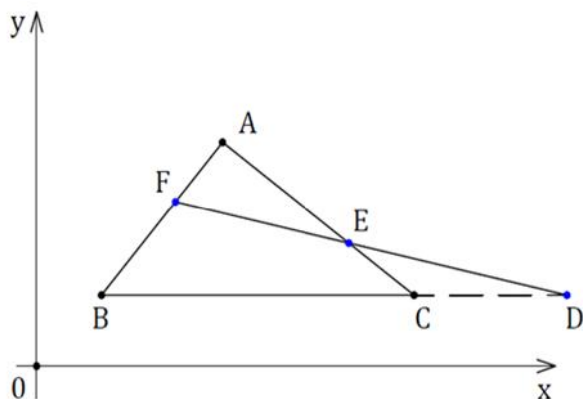
Други случај:

Нека је  $C$  центар масе система који се састоји од тела  $B$  и  $D$ . Нека је и тачка  $F$  центар масе система кога чине тела  $E, D$ . Јасно је да је аналогно претходним закључивањима са тачкама  $A, B, D$  центар масе система кога чине  $E, B, D$ . Аналогно добијамо:

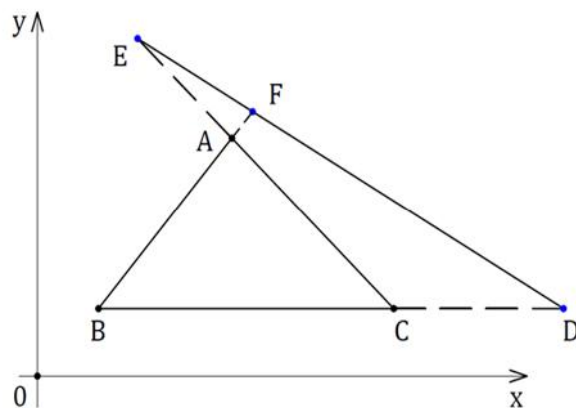
$$\frac{\vec{r}_a}{\vec{r}_b} \cdot \frac{\vec{r}_c}{\vec{r}_b} \cdot \frac{\vec{r}_c}{\vec{r}_b} = -\frac{m_b + m_d}{m_b} \cdot \frac{m_a}{m_d + m_b} \cdot \frac{m_b}{m_a} = -1$$

Докажимо сада другу страну еквиваленције. Полазећи од последње једнакости треба да покажемо колинеарност, стога ћемо на почетку претпоставити супротно, да тачке нису колинеарне. Тада постоји тачка  $F'$ , на правој  $AD$  тако да су  $D, E, F'$  колинеарне.

Аналогно првом случају добија се да важи  $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$  док је на основу претпоставке  $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = -1$ . Сада је јасно да важи  $\frac{CD}{DA} = -1$ . Пошто су тачке  $A, F, F', B$  колинеарне, то се тачке  $F, F'$  поклапају. Контрадикција! Тиме је доказ у потпуности завршен. ■



Слика 3. Први случај Менелајеве теореме



Слика 4. Други случај Менелајеве теореме

## 2.2.4 Доказ постојања Симсонове праве - Симсонова теорема

**Теорема:** Ако се из произвољне тачке круга описаног око троугла  $ABC$  спусте нормале на његове странице или продужетке страница, добиће се три колинеарне тачке. Права којој припадају те тачке назива се *Симсонова права*.

**Доказ:** Ако бисмо показали да важи:

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1A} = -1$$

где су тачке  $A_1, B_1, C_1$  подножја нормала из темена  $A, B, C$  респективно,

директна последица би била колинеарност датих тачака. Уведимо ознаке  $\angle MVA = \alpha$ ,  $\angle MVB = \beta$ ,  $\angle MCV = \gamma$ . Због једнакости периферијских углова над истом тетивом следи једнакост:  $\angle MVA = \angle MCA = \alpha$ ,  $\angle MCV = \angle MAV = \gamma$ .

Поставимо сада тело масе  $ctg \gamma$  у тачку  $B$  и тело масе  $ctg \beta$  у тачку  $C$ . Јасно је да је сада тачка  $A_1$  центар масе тог новог система и да на основу (3) важи:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{ctg \beta}{ctg \gamma}$$

Поставимо сада тело масе  $ctg \alpha$  у тачку  $A$ . Јасно је сада да је центар масе система којег чине тела смештена у тачкама  $A$  и  $B$  тачка  $C_1$ . Одатле следи:

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{ctg \gamma}{ctg \alpha}$$

Уочимо сада тачку  $A'$  централно симетричну тачки  $A$  у односу на тачку  $B_1$  и аналогно претходном, смештимо и у тачку  $A'$  тело масе  $ctg \alpha$ . Тада је  $B_1$  центар масе система кога чине тела смештена у тачкама  $A'$  и  $C$  и важи однос:

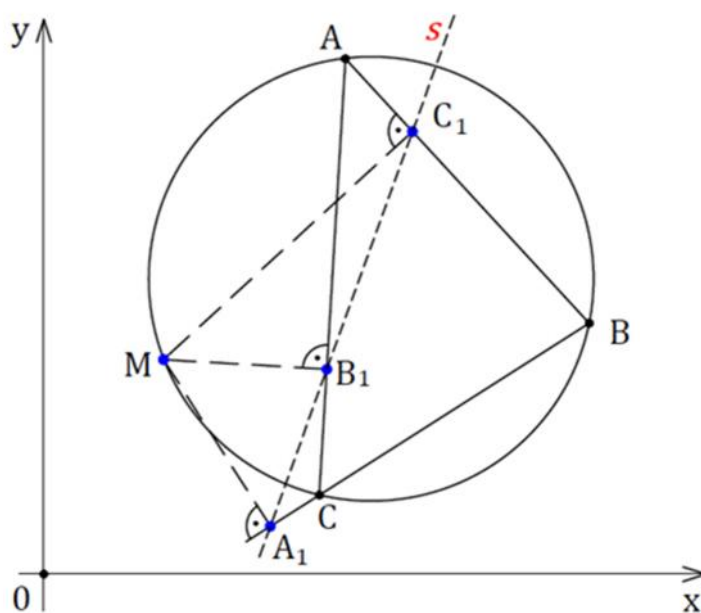
$$\frac{\overrightarrow{A'B_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{ctg \alpha}{ctg \beta}$$

Пошто је  $B$  средиште  $AA'$  тачије:  $\overrightarrow{B_1A'} = -\overrightarrow{B_1A}$  а одатле је  $\frac{\overrightarrow{B_1A'}}{\overrightarrow{B_1C}} = -\frac{ctg \alpha}{ctg \beta}$ .

Множењем добијена три односа добијамо:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{A'B_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{ctg \beta}{ctg \gamma} \cdot \frac{-ctg \alpha}{ctg \beta} \cdot \frac{ctg \gamma}{ctg \alpha} = -1$$

Сада на основу Менелајеве теореме следи тврђење. ■



Слика 6. Доказ Симсонове теореме

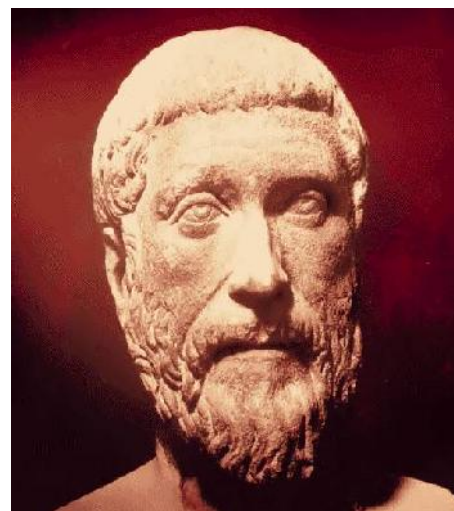
### 3. Квадрат над хипотенузом то зна свако дете једнак је збиру квадрата над обе катете...

#### 3.1.0 Питагорина теорема

---

Вероватно један од најпознатијих научника у историји јесте антички филозоф и математичар Питагора. Са њим смо се упознали још у седмом разреду основне школе када смо научили какав однос постоји између страница код правоуглог троугла.

Његова теорема је толико применљива да је неретко проналазила своје место у доказима много сложенијих тврђења и теорема. Наравно, временом је такође постала извор инспирације и нагонила је многе људе да проналазе креативна и несвакидашња решења приликом њеног доказивања. Због тога данас постоји прегршт идејно различитих доказа. У овом поглављу ћемо издвојити неколико доказа који се ослањају на физику и показују њену моћ у правом светлу!



#### 3.1.1 Али прво један занимљив математички доказ Питагорине теореме...

---

Већ смо се подсетили како гласи теорема. Наиме, треба показати да када се над сваком страницом правоуглог троугла конструише квадрат, збир површина она два квадрата која су конструисана над катетама треба да буде једнак површини квадрата конструисаног над хипотенузом. Посматрајмо слику испод и размотримо површине одређених троуглова који се на њој налазе.

Нека су странице правоуглог троугла редом дужине  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Допунимо квадрат над хипотенузом до великог квадрата конструишући му три троугла подударна задатом, над сваком од преостале три странице тако да се хипотенузе конструисаних троуглова поклапају са страницама. Уочимо да је страница великог квадрата једнака  $a_2 = a + b$ . Сада је његова површина

$$S = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

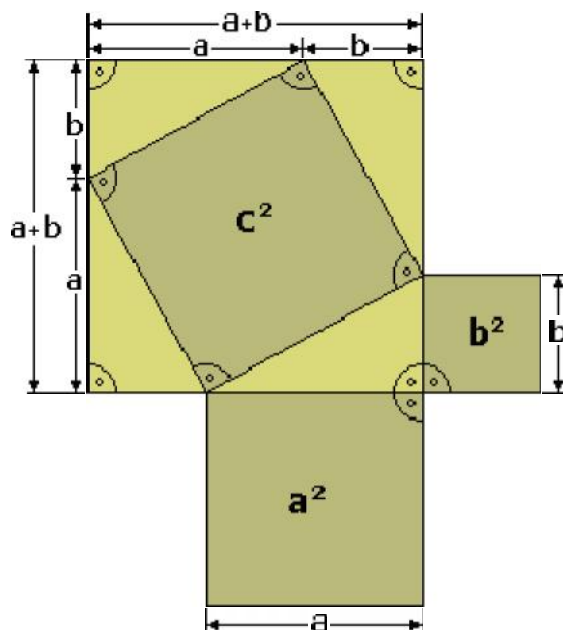
Уочимо сада да се површина великог квадрата заправо састоји од површине квадрата конструисаног над хипотенузом почетног троугла и површине четири правоугла троугла. То нам даје:

$$S = c^2 + 4 \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$$

Ако сада то изједначимо са првим изразом за површину директно добијамо:

$$c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

што је и требало показати. ■



Слика 7. Доказ Питагорине теореме



Један од елементарних и притом експерименталних доказа Питагорине теореме може се видети на овогодишњој изложби у оквиру манифестације "МАЈ МЕСЕЦ МАТЕМАТИКЕ". Идеја која се крије иза овог експерименталног доказа заснива се на конструкцији три суда облика праве четворостране призме, исте висине, чије основе представљају квадрате подударне квадратима конструисаним над хипотенузом односно обема катетама правоуглог троугла. Цео систем призми се затим прикачи на ротирајућу основу тако да формира облик приказан на слици лево. Затим се у призму највеће запремине односно највеће површине основе улије течност до врха. Једноставним обртањем може се јасно видети да сва течност која се налази у призми над хипотенузом у потпуности попуњава преостале две призме када се ротирајућа основа окрене и обрнуто.

\* као извор за горње слике коришћен је *Google Images*.



### 3.2.0 Физички докази Питагорине теореме

---

У претходном поглављу смо се подсетили једног од многих идејно различитих доказа Питагорине теореме користећи се само елементима раванске геометрије. У наредном поглављу ћемо користећи законе који су познати у природи, попут закона одржања енергије и једначина хидростатичког притиска, на неколико начина доказати исто тврђење о односу страница правоуглог троугла. Стварајући одређене мисаоне огледе показаћемо снагу и разноликост коју поседује физички приступ решавању проблема.

#### 3.2.1 Питагора на леду

---

Замислимо да се особа масе  $m$  налази у углу бесконачног клизалишта савршено конструисаног тако да је коефицијент трења између клизальки и леда  $\mu = 0$ . Нека је координатни почетак у тачки у којој се особа налази на почетку. Замислимо сада да неко "одгурне" ту особу од  $x$  осе брзином  $a$ . Неколико тренутака касније нека је неко "одгурне" и од  $y$  осе, брзином  $b$ . Енергија клизача након оба одгуривања износи:

$$E_{u1} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{ma^2}{2} + \frac{mb^2}{2} + E_{pot}$$

Са друге стране, ако посматрамо путању по којој се креће клизач она се мора поклапати са правцем вектора укупне брзине клизача. Како је:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

укупна брзина клизача усмерена дуж дијагонале правоугаоника кога образују вектори брзина којима је клизач одгурнут од координатних оса, то ће нам закон одржања енергије написан на два начина дати доказ теореме.

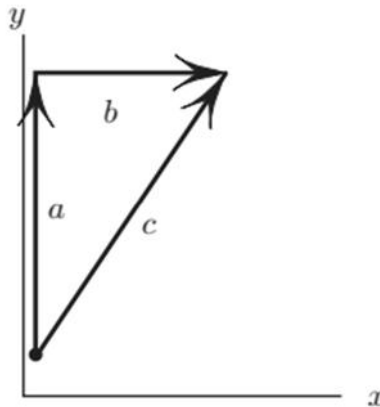
Укупна енергија клизача се може написати и као:

$$E_{u2} = E_{kin2} + E_{pot2} = \frac{mc^2}{2} + E_{pot}$$

где је  $E_{pot2} = E_{pot}$  јер је центар масе клизача све време на истом растојању од нултог нивоа потенцијалне енергије (нека то буде ниво леда). Изједначавањем ових енергија добијамо:

$$\frac{ma^2}{2} + \frac{mb^2}{2} = \frac{mc^2}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Пошто је троугао којег чине вектори брзина, приказан на слици испод, правоугли, доказ Питагорине теореме је у потпуности завршен. ■



Слика 8. Троугао брзина коришћен у доказу Питагорине теореме

### 3.2.2 И прстен на прстену доказује Питагору

Посматрајмо следећу ситуацију: Нека се мали прстен  $C$  налази натакнут на хоризонтално постављен велики полупрстен, као на слици испод и може да клизи по њему без трења. Означимо крајеве полупрстена тачкама  $A$  и  $B$  а центар полупрстена са  $O$ . Нека су за прстен завезане две нити нулте дужине, које су у почетном тренутку биле неистегнуте тако да су им слободни крајеви прикачени у тачкама  $A$  и  $B$ . Под нити нулте дужине подразумевамо такву нит која има јако малу дужину на самом почетку и која је занемарљива у односу на дужину за коју ће бити истегнута. Покажимо да је приликом кретања по полупрстену мали прстен у сваком тренутку у равнотежи.

На мали прстен делују 3 силе: сила реакције великог прстена и две узајамно нормалне силе затезања нити. Други његов закон за прстен  $C$  гласи:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R}$$

Сила реакције прстена делује у радијалном правцу па нема тангенцијалну компоненту те не утиче на промену брзине прстена. Са друге стране, обе силе затезања имају своје тангенцијалне компоненте које би могле да утичу на интензитет брзине. Покажимо да су њихови интензитети једнаки те да се међусобно поништавају.

На основу Хуковог закона за силе затезања имамо:  $T_1 = k\Delta x_1 = ka$  и  $T_2 = k\Delta x_2 = kb$  где је:  $k = E \frac{S}{l}$  где је  $E$  Јунгов моду еластичности за дату нит,  $S$  површина њеног попречног пресека а  $l$  дужина нити у неистегнутом стању. Ако означимо углове као на слици можемо одредити пројекције сила затезања на правац тангенте:

$$T_{1t} = T_1 \cos \alpha = ka \frac{b}{2R}$$

где је  $R$  полупречник великог полупрстена, а угао  $\alpha$  се може одредити на основу тога што је угао између тангенте и тетиве круга једнак углу периферијском над посматраном тетивом.

Аналогно претходном имамо:

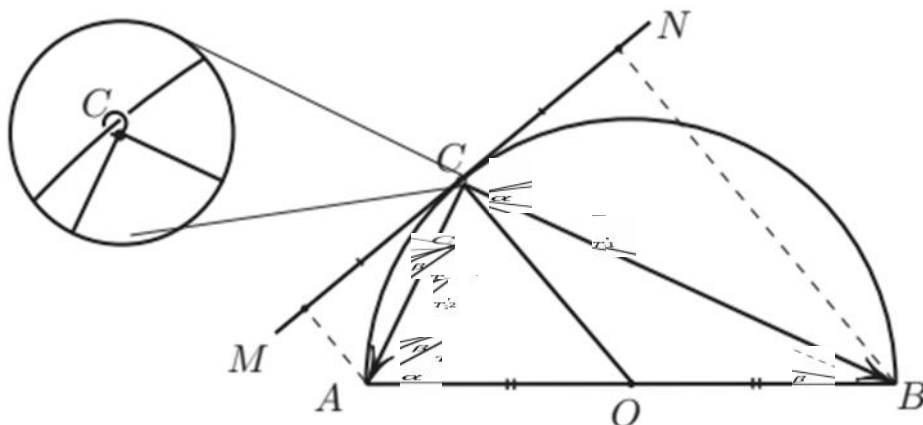
$$T_{2t} = T_2 \cos \beta = kb \frac{a}{2R}$$

Јасно је сада да су обе силе једнаке те се мали прстен налази у стању равнотеже у свакој тачки на прстену.

То значи да за његово премештање по прстену није потребно уложити никакву енергију те закон одржања енергије написан за почетни и крајњи положај прстена (када се налази у почетној тачки и када се налази у тачки на једном крају пречника) имамо:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{ka^2}{2} + \frac{kb^2}{2} = \frac{kc^2}{2} + 0 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

где је са  $E = \frac{k}{2} \Delta x^2$  означена потенцијална енергија опруге истегнуте за  $\Delta x$ . Из наведеног закона одржања енергије одмах следи доказ Питагорине теореме јер је

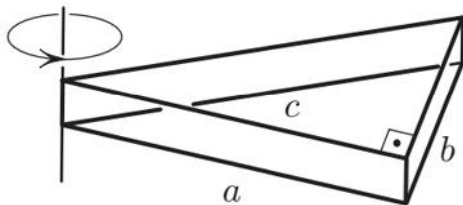


Слика 9. Приказ прстена коришћених за доказивање Питагорине теореме

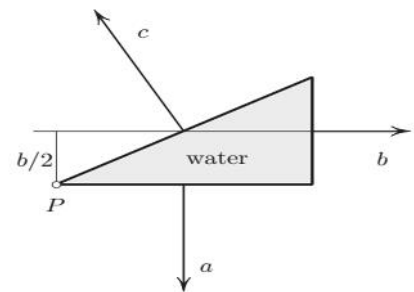
јасно да је  $\angle ACB = 90^\circ$  као угао над пречником, а самим тим је троугао  $ABC$  правоугли. Тиме је доказ Питагорине теореме у потпуности готов. ■

### 3.2.3 Питагора и акваријум

Конструишимо акваријум облика тростране призме чија је основа облика правоуглог троугла. Монтирајмо сада акваријум на вертикалну осу тако да може слободно да ротира око ње, при чему оса пролази кроз један крај хипотенузе, као на слици испод.



Слика 10. Приказ конструисаног акваријума



Слика 11. Приказ сила које делују на бочне стране акваријума

Напунимо сада акваријум одређеном течношћу, на пример водом. Посматрајмо даље шта дешава са акваријумом! Ова је ПИТОМАРА! То значи да је сума свих момената који делују на акваријум и који би могли да утичу на његово кретање једнак нули!  $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \vec{0}$  где су  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3$  одговарајући моменти које ствара сила хидростатичког притиска на бочне стране акваријума одређене хипотенузом односно катетама правоуглог троугла који је у основи. Нека је висина акваријума  $h$ . Тада сила хидростатичког притиска има нападну тачку у пресеку дијагонале бочне стране и има интензитет:  $F = p_{sr}S = p_{sr}hx = \frac{1}{2}\rho gh^2x$ , где је  $x$  означена дужина друге стране правоугаоника који представља једну бочну страну призме. Сада је моменат који прави сила једнак производу интензитета силе и крака силе па важи:

$$M_1 = F_1 \frac{c}{2} = \frac{\rho gh^2 c^2}{4}, M_2 = F_2 \frac{b}{2} = \frac{\rho gh^2 b^2}{4}, M_3 = F_3 \frac{a}{2} = \frac{\rho gh^2 a^2}{4}$$

Како моменти  $\vec{M}_2, \vec{M}_3$  делују тако да заротирају акваријум у смеру кретања казаљке на сату а момент  $\vec{M}_1$  у смеру супротном од кретања казаљке на сату то важи:

$$M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

А одатле непосредно следи:

$$M_1 = M_2 + M_3 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

чиме је доказ Питагорине теореме у потпуности готов. ■

Уочимо да се основна идеја за решавање овог задатка на начин који је демонстриран у овом поглављу крије у описивању нечега што би могло, али се није десило. Притом, закључак да се ништа неће десити ако сипамо течност у суд има потпуно интуитивну основу и на први поглед делује потпуно банално. Међутим, као и у многим другим стварима у животу, те наизглед небитне чињенице могу често бити кључне за решење проблема.

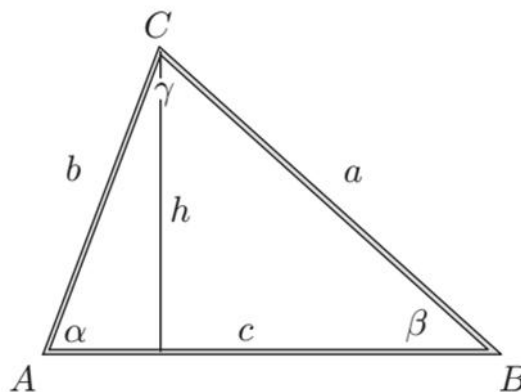
### 3.3 Још која теорема помоћу воде...

У претходном потпоглављу смо видели како сипање течности у суд и једноставно посматрање момената које течност ствара у односу на неку тачку лако можемо показати неке познате теореме. Слично томе навешћемо доказе синусне теореме и израза за потенцију круга.

**Теорема:** У сваком троуглу важи однос:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

**Доказ:** Посматрајмо одређену количину воде смештену у некој посуди. Издвојимо мисаоно троугао воде који је подударан са нашим задатим троуглом тако да је страница  $AB$  паралелна са дном суда. Сада су притисци у тачкама  $A$  и  $B$  једнаки. На



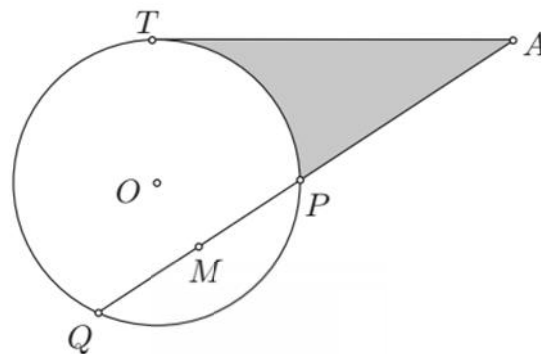
Слика 12. Мисаоно издвојени водени троугао

основу хидростатичког притиска можемо писати:

$$p_A - p_C = p_B - p_C = \rho g b \sin \alpha = \rho g a \sin \beta$$

Одатле непосредно следи  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ . Аналогно томе, ако заротирамо троугао тако да се темена помере за по једно место удесно добићемо остатак једнакости. Тиме је доказ завршен. ■

**Теорема:** Ако је  $AT$  тангента а  $APQ$  сечица датог круга онда важи:



$$AP \cdot AQ = AT^2$$

**Доказ:** Посматрајмо осенчени део на слици која је приказана изнад. Замислимо сада да је тај осенчени део напуњен одређеном течносту, при чему је горња слика заправо приказ из птичије перспективе. Дакле, нека цео наш физички систем има одређену дубину  $\Delta h$ . Јасно је да се приликом сипања течности наш суд НЕ ДИЖЕ! То значи да је сума тих момената који делују на суд у односу на центар круга једна нули:

$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \vec{0}$  где су  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3$  одговарајући моменти који делују на стране  $TA, AP$  и закривљену страну  $TP$ . Посматрајмо прво моменат  $\vec{M}_1$ . Њега ствара течност која делује нормално на површину круга, дакле у радијалном правцу. Због тога ни једна сила која делује на закривљену страну  $TP$  не ствара никакав моменат у односу на центар круга па је због тога  $\vec{M}_3 = \vec{0}$ .

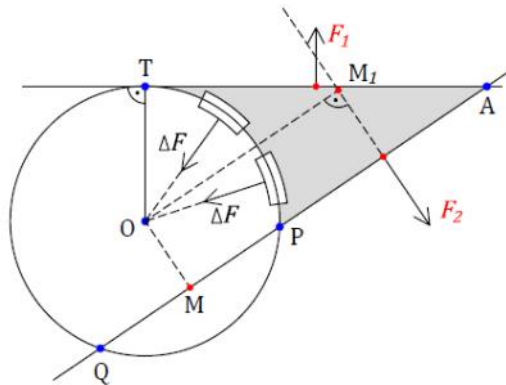
Посматрајмо сада моменат  $\vec{M}_1$ . За њега важи

$$M_1 = F_1 d_1 = p \Delta h \frac{\pi R^2}{2} = p \Delta h \frac{\pi R^2}{2}$$

За моменат  $\vec{M}_2$  важи:

$$M_2 = F_2 d_2 = p \Delta h \left( \frac{1}{2} \bar{P} + \frac{1}{2} \bar{Q} \right) = p \Delta h \frac{\bar{P} + \bar{Q}}{2}$$

где је са  $p$  дат средњи хидростатички притисак који делује на бочне стране зида и који износи  $p = \frac{1}{2} \rho g \Delta h$ . Како моменти  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$  делују у супротном смеру и како је укупан моменат на суд нула, то се њиховим изједначавањем добија



$$AP \cdot AQ = AT^2 \quad \blacksquare$$

Слика 13. Приказ сила које делују на осенчени део фигуре

## 4. За шта је још добра струја осим за напајање електричних уређаја?

### 4.0 Основни појмови у вези са електричном струјом

У овом поглављу ћемо се посветити доказима неједнакости између средина користећи се једноставним физичким моделима који представљају електрична кола. За почетак дефинишимо појмове које ћемо користити:

**Електрична струја:** представља усмерено кретање наелектрисаних честица (електрона) најчешће кроз проводник. Слично као и нестишљиви флуиди, код електричне струје се мери "масени проток" који представља број електрона који прођу кроз попречни пресек у јединици времена, односно јачину електричне струје:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

и мери се у Амперима [A].

**Напон:** представља разлику потенцијала две тачке између којих се врши кретање електрона. За електричну струју напон представља покретачку снагу која обезбеђује константан проток електрона у времену. Мери се волтима [V].

**Електрични отпор:** како и само име каже, представља отпор који проводник пружа протицању електрона. Један од најзначајнијих закона из области електродинимике односи се на део струјног кола отпора  $R$  кроз који протиче струја интензитета  $I$  при константном напну  $U$ :

$$I = \frac{U}{R}$$

Овај закон је формулисао научник Георг Ом а јединица за електрични отпор је име добила баш по њему [ $\Omega$ ].

Једно од правила које ћемо користити у доказима је **Прво Кирхофово правило:**

Сума јачина свих струја које улазе у чвор једнака је суми свих струја које из њега излазе.

За крај, подсетимо се тврђења која се односе на везивање електричних отпора у струјном колу:

**-За  $n$  редно везаних отпорника:**

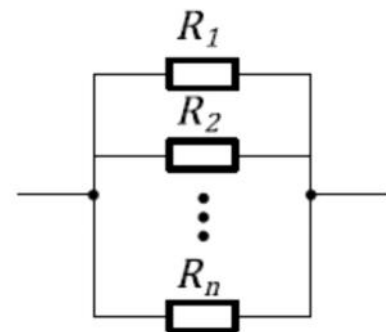
Еквивалентни отпор износи:  $R_e = \sum_{i=1}^n R_i$  а укупни напон између отпорника износи:  $U_e = \sum_{i=1}^n U_i$ .

**-За  $n$  паралелно везаних отпорника:**

Еквивалентни отпор износи:  $\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$  док је напон на свим отпорницима међусобно једнак и једнак напону у спољашњем делу кола.



Слика 14. Редна веза отпорника



Слика 15. Паралелна веза отпорника



## 4.1 Неједнакост између аритметичке и геометријске средине

Размотримо електрично коло које се састоји од отпорника чије су отпорности  $a$ ,  $b$ . Нека је у првом случају прекидач у колу отворен и нека је у колу прикључен извор једносмерног напона. У овом случају имамо паралелну везу по два редно везана отпорника тако да је укупан отпор у колу:

$$R_e = \frac{R_r}{2} = \frac{a + b}{2}$$

Нека је сада прекидач у колу затворен. Сада систем представља редну везу по два паралелно везана отпорника, као што је приказано на слици испод, тада је:

$$R_p = \frac{ab}{a+b} \text{ и } R_r = 2R_p = \frac{2ab}{a+b}$$

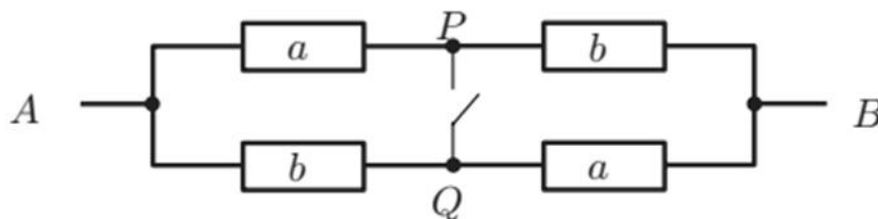
Како приликом затварања прекидача добијамо еквивалентни отпор који је мањи или једнак од еквивалентног отпора када је прекидач отворен добијамо неједнакост:

$$\frac{a + b}{2} \geq \frac{2ab}{a + b}$$

Одатле следи:

$$\frac{(a + b)^2}{4} \geq ab \Rightarrow \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

А ово представља неједнакост између аритметичке и геометријске средине. Претходно расуђивање је тачно јер "додајући" жицу која нема отпорност у електрично коло фактички ништа се не мења па нема разлога да се еквивалентни отпор кола повећа. Тиме је доказ готов. ■



Слика 17. Струјно коло коришћено за доказ неједнакости између аритметичке и геометријске средине

## 4.2 Неједнакост између аритметичке и хармонијске средине

---

Познато је из математике да важи однос између средина за ненегативне бројеве:

$$\text{хармонијска} \leq \text{геометријска} \leq \text{аритметичка} \leq \text{квадратна}$$

Покажимо да из претходног расуђивања у вези са електричним колом и еквивалентним отпорностима наведеног у делу 4.1 следи и однос између аритметичке и хармонијске средине.

Јасно је да за два реална броја  $A$  и  $B$  важи:

$$A \geq B > 0 \Rightarrow \sqrt{A} \geq \sqrt{B}$$

Множећи претходну неједнакост прво са  $\sqrt{A}$  а потом са  $\sqrt{B}$  добијамо следећи низ неједнакости:

$$A \geq \sqrt{AB} \wedge \sqrt{AB} \geq B \Rightarrow A \geq \sqrt{AB} \geq B$$

Стављајући у претходну једнакост  $A = \frac{a+b}{2}$  и  $B = \frac{2ab}{a+b}$  добијамо тражену неједнакост:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Јасно је да отпорност отпорника узима искључиво ненегативне вредности те су сви горе наведени услови испуњени. Тиме је доказ завршен. ■

## 4.3 Неједнакост између аритметичке и хармонијске средине за $n$ бројева

---

У овом случају неједнакост коју треба показати можемо записати у општем облику односно за произвољан природан број  $n$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{-1} \right)^{-1}$$

Посматрајмо сада шему електричног кола приказану на слици испод. Сваки ред у електричном колу се састоји од истих отпорника. Уочимо да притом свака колона представља цикличну пермутацију отпорника, одатле је јасно да и у свакој колони фигуришу исти отпорници. За почетак нека су сви прекидачи отворени, њиховим пребацивањем у затворено стање доказаћемо горњу неједнакост.

Ако су сви прекидачи отворени:

имамо паралелну везу од по  $n$  редно везаних отпорника. Еквивалентни отпор сваког реда износи:

$$R_r = \sum_{k=1}^n a_k$$

одатле следи да је еквивалентна отпорност паралелне везе једнака:

$$R_p = \frac{1}{n} R_r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

Аналогно претходном случају, када затворимо све прекидаче добијамо еквивалентни отпор мањи или једнак од оног који смо имали када су сви прекидачи били отворени.

Ако су сви прекидачи затворени:

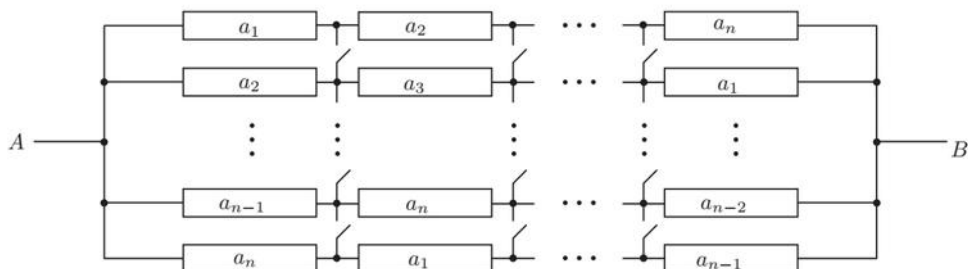
имамо редну везу од по  $n$  паралелно везаних отпорника. Еквивалентни отпор сваке паралелне везе износи:

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \Rightarrow R_p = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

Када имамо редну везу  $n$  истих отпорника, еквивалентни отпор је  $n$  пута већи:

$$R_r = n \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{-1} \right)^{-1}$$

Из већ наведене чињенице да приликом затварања прекидача добијамо

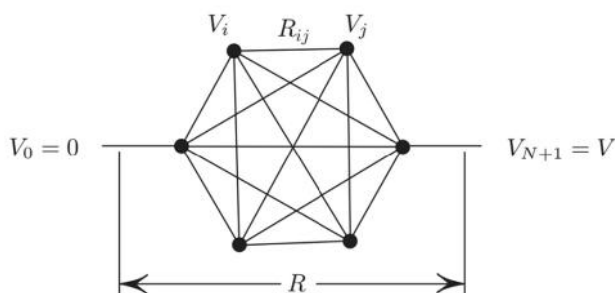


Слика 18. Струјно коло коришћено за доказ неједнакости између аритметичке и хармонијске средине у општем случају

эквивалентни отпор који је мањи или једнак од еквивалентног отпора када су сви прекидачи отворени и чињенице да су вредности отпора искључиво ненегативни бројеви следи наведено тврђење. Тиме је доказ завршен. ■

#### 4.4 Граф у математици као доказ Рејлијевог закона монотоности у струјном колу

Размотримо мрежу отпорника приказану на слици испод. Таква конфигурација тачака у равни повезаних линијама назива се **граф**. Тачке у мрежи се зову чворови а линије се зову гране графа. У следећој шеми тачке представљају одређени потенцијал а гране представљају отпорнике који повезује две тачке са одређеним потенцијалима. Сваке две тачке  $i$  и  $j$  су повезане отпорником  $R_{ij}$ .



Слика 19. Струјно коло које симулира граф у доказу Рејлијевог закона

Дозволимо да неке гране имају  $R_{ij} = 0$  односно  $R_{ij} = \infty$ . Физички смисао овога лежи у томе да гране које имају  $R_{ij} = 0$  заправо представљају кратак спој у колу док гране код којих је  $R_{ij} = \infty$  заправо нису ни повезане, односно кроз ту грану не тече струја. На тај начин распоређујући одговарајуће отпорнике чији су отпори  $R_{ij} = 0$  односно  $R_{ij} = \infty$ , можемо створити конфигурацију било ког струјног кола у којем фигуришу тачке са датим потенцијалима. Посматрајмо еквивалентни отпор  $R$  између неке две тачке, на пример  $v_0$  и  $v_{N+1}$  као што је приказано на слици изнад. Јасно је да је  $R$  функција од  $R_{ij}$  односно  $R = f(R_{ij})$ . Интуитивно је потпуно очигледно да ако се отпор било које гране у колу повећа да ће се и укупан отпор кола повећати. Ово тврђење је познато као **Рејлијев закон монотоности**.

**Доказ:** Ради лакше нотације, нека наше коло (граф) има  $N + 2$  чвора и то  $v_0, v_1, \dots, v_N, v_{N+1}$  приказано као на слици изнад и посматрајмо еквивалентни отпор између  $v_0$  и  $v_{N+1}$ . Прикључимо сада напон  $V$  између чворова  $v_0$  и  $v_{N+1}$ . Ако уземљимо чвор  $v_0$  тада је  $V_0 = 0$  а самим тим је  $V_{N+1} = V$ .

Ако се на крајеве отпорника отпора  $R$  прикључи извор напона  $V$  тада се на отпорнику ослобађа топлота снаге:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

Ако бисмо сада некако успели да одржавамо потенцијале  $\tilde{V}_k$  у чворовима онда би укупна ослобођена снага у колу била:

$$P(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3 \dots \tilde{V}_N) = \sum_{i,j=0}^{N+1} \frac{(\tilde{V}_i - \tilde{V}_j)^2}{R_{ij}}$$

где је  $\tilde{V}_0 = V_0$  и  $\tilde{V}_{N+1} = V_{N+1} = V$ . Уреалности ми можемо да контролишемо само крајње потенцијале  $V_0$  и  $V_{N+1} = V$  притом пуштајући остале напоне  $V_k$ ,  $1 \leq k \leq N$  да се произвољно мењају, дакле немамо никакву контролу над њима.

Реална снага која се издваја у колу је најмања могућа када се на крајеве прикључи напон  $V$ .

$$P = \min_{\tilde{V}_1 \dots \tilde{V}_N} \sum_{i,j=0}^{N+1} \frac{(\tilde{V}_i - \tilde{V}_j)^2}{R_{ij}}$$

где је  $V_0 = 0$  и  $V_{N+1} = V$ . Доказ за ово тврђење следи из следећег закључивања.

Нека су  $(V_1, V_2 \dots V_N)$  праве вредности потенцијала у одговарајућим чворовима. Тада парцијалним диференцирањем израза за ослобођену снагу по потенцијалима у чворовима добијамо:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_k} P(V_1, \dots, V_N) = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{V_k - V_i}{R_{ki}} \Rightarrow \sum_{i=0}^{N+1} I_{ki} = 0$$

на основу Кирхофовог правила.

Јасно је да је  $P(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3 \dots \tilde{V}_N)$  позитивна квадратна функција и да због тога има само један екстремум који је поред тога и минимум. То показује да за вредности правих напона који се развијају у колу добијамо минимум функције снаге те је реална снага која се издваја баш задата горњим изразом.

За крај, уочимо да се у изразу за снагу отпори  $R_{ij}$  налазе у имениоцима сабирака па је због тога функција снаге опадајућа функција од сваког  $R_{ij}$ . Са друге стране како важи  $R = \frac{V^2}{P}$ , то је функција еквивалентног отпора заправо растућа функција од сваког  $R_{ij}$ . Одатле непосредно следи да са повећањем отпора било које гране нашег графа долази и до повећања еквивалентног отпора. Тиме је доказ Рејлијеве теореме у потпуности завршен. ■

## 5. Минимум и максимум-често разоткрива тајне природе

### 5.0 Увод и идеја физичког приступа

Како у математици тако и у физици, проблеми минимума и максимума одређених функција су веома заступљени у описивању појава у природи која нас окружује. Ако мало боље обратимо пажњу, много физичких система у природи тежи да заузме стање равнотеже које индиректно представља стање минималне или максималне потенцијалне енергије, у зависности од тога да ли је реч о положају стабилне или лабилне равнотеже. Тако на пример, сви системи тела који се налазе у гравитационом пољу Земље теже да у збиру имају минималну могућу потенцијалну енергију, ако проспемо воду она ће се разливати док не постигне оптималну површину која јој обезбеђује минималну енергију, ланац који се обеси о два ексера тежи ка положају у којем му је центар масе на најмањој могућој висини, балон сапунице тежи облику у којем има најмању могућу запремину/површину, зрак светлости који прелази из једне у другу средину бира пут за који му је потребно минимално време да би стигао до ока посматрача...

Све наведене појаве су директно или индиректно повезане са потенцијалном енергијом тела или система па се природно намеће идеја о конструисању физичког система чија потенцијална енергија представља функцију коју треба минимизовати (ређе максимизовати). На тај начин, у стањима у којима је потенцијална енергија минимална, сила која делује на тело износи нула па се тело налази у равнотежи.

У следећој табели приказано је шта одговара којој математичкој величини и на основу те табеле треба конструисати физички модел:

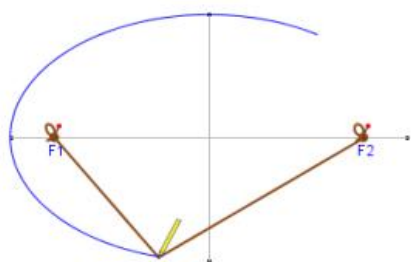
Математика	Физика
Функција $f(x)$	Потенцијална енергија $E(x)$
Први извод $f'(x)$	Сила $F(x) = -P'(x)$
Минимум $f(x)$ постиже за $f'(x) = 0$	Минимум $E(x)$ постиже за $F(x) = 0$ односно у стању равнотеже

Наравно, као и у претходним поглављима за конструисање физичких система који би добро апроксимирали дату појаву и прелаз са математичког на физички приступ решавању проблема користићемо се идеалним еластичним опругама, неистегљивим нитима, идеалним гасовима и течностима...

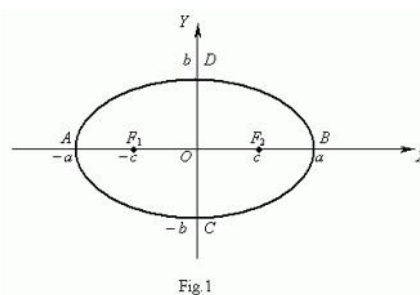
## 5.1.0 Елипса уопште

**Дефиниција:** Елипса као геометријска фигура представља скуп тачака чији је збир растојања од две задате тачке константан. Те две тачке називају се жижке елипсе и најчешће се означавају са  $F_1$  и  $F_2$ .

Један од начина на који су како древни тако и савремени математичари конструисали елипсу јесте следећи: забоду се два ексера који представљају жижке елипсе, затим се за ексере вежу крајеви канапа и ухвати се канап за једну тачку.



Слика 20. Конструкција елипсе



Слика 21. Елипса у Декартовом систему

Поред те тачке се прислони оловка са унутрашње стране површи коју ограничавају два ексера и изабрана тачка и затегне се канап тако да формира троугао. Сада померањем оловке дуж канапа тако да све време канап буде затегнут добијамо слику елипсе.

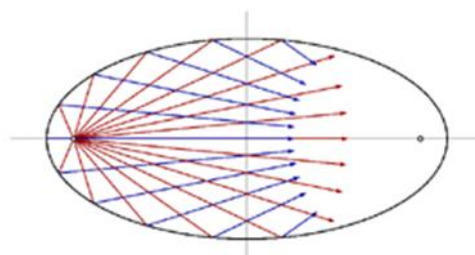
Једначина елипсе у Декартовом координатном систему гласи:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где су  $a$  и  $b$  велика и мала полуоса елипсе а сам центар елипсе се налази у координатном почетку. Елипса се појављује на много места у природи али вероватно је њен значај најупечатљивији у гранама астрофизике. Знамо да се све планете и звезде крећу по елиптичним путањама око оних већих и масивнијих под утицајем њихове гравитације.

### 5.1.1 Једно лепо својство елипсе- Херонов принцип

---



Слика 22. Простирање зрака који крећу из једне жиже елипсе

Елипса има једно невероватно својство. Ако се зрак светлости емитује из једне од жижа, након одбијања о елипсу зрак ће проћи кроз другу жижу. Посматрајмо то на реалном примеру. Ако бисмо направили сто за билијар у облику елипсе и поставили белу куглу у једну жижу а другу куглу у другу жижу, ма колико год да је играч лош сигурно ће погодити куглу. Исто тако ако бисмо играли сквош у соби облика елипсе при чему би играчи стајали у жижама, како год да један од њих удари лопту могао би да погоди овог другог или још горе ако се овај други измакне, да погоди сам себе. У чему се крије тајна овог интересантног својства елипсе? Одговор је у *Хероновом принципу*.

**Дефиниција:** Херонов принцип каже да светлост увек бира најкраћи пут.

У овом поглављу показаћемо како се Херонов принцип остварује на примеру елипсе и зрака емитованих из једне жиже.

### 5.1.2 Тврђење које показује све...

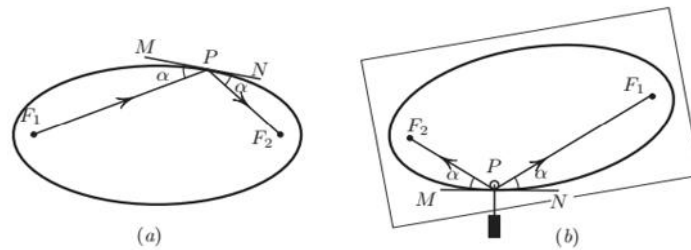
---

**Теорема:** Нека је тачка  $P$  на елипси и нека су  $F_1$  и  $F_2$  њене жиже. Нека је  $MN$  њена тангента у тачки  $P$ . Тада је испуњено:

$$\angle F_1PM = \angle F_2PN$$



**Доказ:** Посматрајмо следећи физички систем. Нека је нам је на располагању танак рам облика елипсе чије се жиже налазе у тачкама  $F_1$  и  $F_2$ . Ставимо мали кружни прстен на унутрашњу страну рама и провучимо кроз њега неистегљиву нит чији су крајеви завезани у жижама датог рама. Подесимо канап тако да буде затегнут а за прстен окачимо друго тело тако да прстен може да мирује на раму. Сада подесимо елипсу тако да тангента у тачки у којој се налази прстен буде паралелна са тлом, као на слици испод.



**Слика 23. Доказ тврђења које представља Херонов принцип**

Сада је јасно да је прстен у равнотежи. Две силе затезања су једине које имају своје тангенцијалне компоненте па се оне морају међусобно поништити. То нам даје:

$$T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 = 0$$

Како је због неистегљивости нити испуњено  $T_1 = T_2$  то важи:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

Тиме је доказ теореме потпуности готов. ■

### 5.1.3 Осврт на доказ Хероновог принципа

У претходном одељку показали смо једнакост упадног и одбојног угла светлости приликом одбијања о елипсу. Такође, показали смо и још једну особину на основу конструкције система, да преломни зрак мора проћи кроз другу жижу елипсе.

По дефиницији елипсе, сваки пут  $F_1PF_2$  има исту дужину без обзира на одабир тачке  $P$ . Поред тога, сваки такав пут представља и најкраћи пут од једне жиже до елипсе па до друге жиже и због тога представља пут неког зрака светлости. На основу свега претходно реченог показали смо да је Херонов принцип заправо сагласан са чињеницом да су упадни и одбојни угао светлости једнаки.

## 5.2.1 Помозимо експерименталним резултатима да се боље обраде...

---

У експерименталној физици резултати које добијемо често захтевају додатну обраду и процењивање одређених грешака које су настале услед прорачуна и које доводе до одступања експерименталних резултата од оних добијених теоријским путем. Цео овај процес је неопходан због несавршености човека и инструмената којима покушава да опише појаве које га окружују.

Природно, намеће се потреба да се наше методе обрађивања резултата усаврше што је више могуће не би ли одступања од правих вредности била сведена на минимум. Један од најчешћих проблема са којима се срећемо је следећи:

Нека је дат скуп уређених парова  $(x_i, y_i)$  у равни. Наш задатак је да пронађемо праву

$$y = ax + b$$

која најбоље апроксимира дат скуп тачака. У ком смислу најбоље? Када посматрамо сваку од тачака  $x_i$  очекујемо да ће вредност  $y_i$  бити дата изразом  $y = ax_i + b$ . Међутим, због претходно наведених разлога често долази до одступања па дефинишемо грешку као:

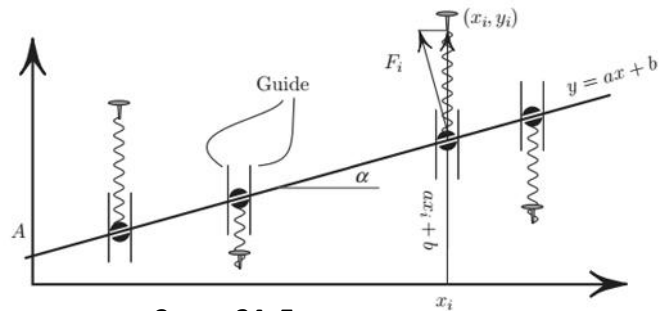
$$\Delta_i = y_i - (ax_i + b)$$

Термин "најбоље апроксимира" односи се на проналажење коефицијената  $a$  и  $b$  тако да је сума:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

минимална могућа. Овај метод се популарно зове **метод најмањег квадрата**.

Замислимо одговарајућу праву као круту шипку провучену кроз рукавце који се ослањају на два вертикална носача који се налазе на малим, једнаким, растојањима од права  $x = x_i$  приказано на слици испод.



**Слика 24. Експериментално проналажење најбоље праве**

Нека су у тачкама које представљају дате експерименталне вредности забодени ексери. Повежимо сада ексере са рукавцима помоћу еластичних опруга које су у почетном тренутку неистегнуте. Ако препустимо систем сам себи, он ће се поставити у такво стање да му укупна потенцијална енергија буде минимална могућа. Уочимо да је свака опруга истегнута за  $\Delta_i = y_i - (ax_i + b)$ . Изаберемо ли да је коефицијент еластичности  $k = 1$  укупна потенцијална енергија је:

$$E_u = \sum_{i=1}^n \frac{k\Delta_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (y_i - (ax_i + b))^2$$

Јасно је сада да смо проблем минималне суме квадрата грешака свели на проналажење коначног положаја шипке препуштене самој себи да се креће под утицајем еластичних сила опруга. Штавише, свели смо на проблем проналажења равнотежног положаја односно минималне потенцијалне енергије. Напоменимо да су сви елементи овог физичког система замишљени као идеални, односно да између свака два елемента нема трења.

Једине силе које делују на шипку су силе нормалне реакције од рукаваца  $F_i$ . Како је шипка у стању равнотеже и не помера се то је сума свих тих сила једнака нули као и сума свих момената које те силе стварају у односу на тачку пресека шипке и у осе.

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n F_i d_i = 0$$

где је  $d_i$  растојање од тачке  $A$ . Јасно је са слике да важи:

$$x_i = d_i \cos \alpha$$

Размотримо силе које делују на рукавце. Како је сваки рукавац у равнотежи то је резултујућа сила на њега нула. На њега делују еластична сила опруге

$$F_{el} = k\Delta = y_i - (ax_i + b)$$

која је уравнотежена пројекцијом:

$$F_p = F_i \cos \alpha$$

На основу прве везе добијамо прву једначину:

$$\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0$$

На основу друге везе добијамо другу једначину:

$$\sum_{i=1}^n F_i d_i = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - (ax_i + b))x_i}{(\cos \alpha)^2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

Сада имамо систем од две једначине са две непознате чије јединствено решење даје оптималну праву која апроксимира дат скуп тачака. ■

## 5.2.2 Мали осврт на претходно поглавље

---

По мом мишљењу ово је један од најзанимљивијих доказа који стоје у овом матурском раду. Често се људи сусрећу са заблудама да одређене математичке методе и појаве немају свој физички смисао, односно "да се не могу видети у природи". Чини ми се да је такав случај и са методом најмањег квадрата. На први поглед, лаицима попут мене, делује као нумеричка метода настала без неког посебног разлога или оправдања а самим тим и без неке велике моћи којом би могла допринети математичком свету. У претходном поглављу навео сам један приказ физичког пандана овој нумеричкој методи који ми је познат. Можда их има још, али је и овај један довољан да покаже апстрактност која се крије иза једног крајње једноставно формулисаног метода и да покаже да се његовим правилним тумачењем могу пронаћи скривене појаве из природе која нас окружује.

## 5.3.0 Проблеми типа "конструисати минимум"

---

У математици су проблеми експлицитног конструисања и одређивања минимума веома чести и постоји много начина за њихово одређивање. У наредном поглављу издвојићемо неколико проблема и теорема који се односе на претходну тематику а могу се решити односно доказати помоћу особина идеалних флуида и површинског напона. Али пре свега, обрадимо један познати светски проблем у наредном поглављу.

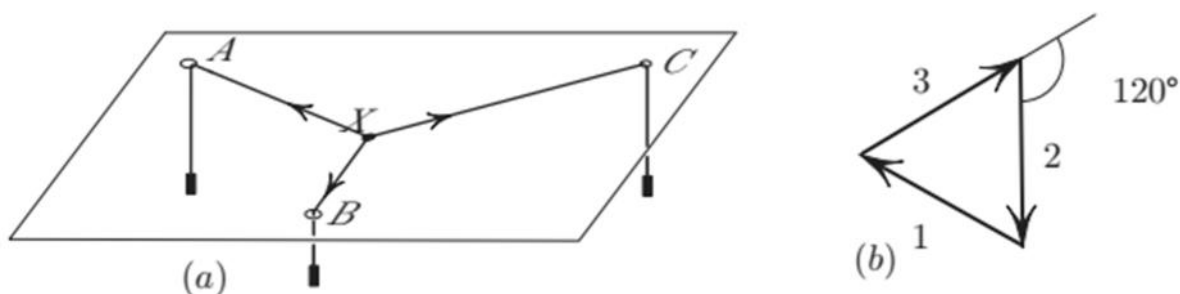
### 5.3.1 Зар није Торичели био бољи физичар него математичар?

Један од познатијих проблема у историји математике је познати математичар Ферма поставио физичару и математичару Торичелију. У свом писму, Ферма тражи од Торичелија да за задате три тачке у равни пронађе ону тачку у тој равни чији је збир растојања од те три задате тачке минималан могућ. Торичели је први у историји који је решио овај проблем и због тога та тачка носи његово име. Међутим, Торичелијево решење је крајње математичко а у духу његове склоности ка физици ми ћемо приказати једно атрактивно физичко решење.

Замислимо да имамо сто на коме су избушене рупе које ће представљати наше задате тачке  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Узмимо сада три идентична канапа и спојимо један њихов крај у тачку  $X$ . Сада провучимо сваки од та три канапа кроз различиту рупу и за слободне крајеве прикачимо тела истих маса. Означимо висине тела у односу на под са  $h_a, h_b, h_c$ . Тада је укупна потенцијална енергија система:  $E_u = mg(h_a + h_b + h_c)$ . Када се систем препусти сам себи он тежи да се постави у стање са најмањом укупном потенцијалном енергијом а то је стање у којем је  $h_a + h_b + h_c$  минимално могуће. То значи да је збир делова ова три канапа који се налази испод стола а изнад тела, највећи могућ. Одатле сада јасно следи да је збир дужина канапа који се налази на столу минималан могућ. Тиме је наша тачка  $X$  заправо Торичелијева тачка. Како је систем сада у равнотежи то је резултујућа сила на свако тело нула. Дакле, три силе затезања које делују на тачку  $X$  су једнаке и износе  $T = mg$ . Како је притом тачка  $X$  у равнотежи то те три силе морају формирати троугао ако их распоредимо тако да врх једне додирује крај друге. Штавише, морају формирати једнакостранични троугао зато што су им интензитети једнаки! Одатле лако следи:

$$\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = 120^\circ$$

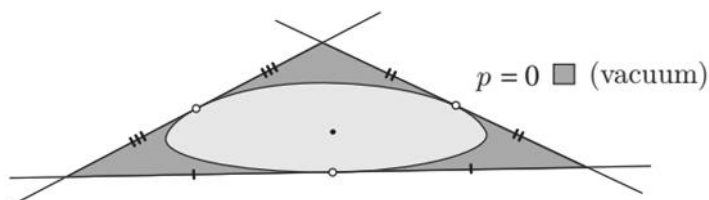
Тиме је конструкција тачке у потпуности готова. ■



Слика 25. Торичелијева тачка

### 5.3.2 Један занимљив проблем

**Теорема:** Посматрајмо  $n$ -тоострани полигон  $P$  најмање могуће површине описан око дате затворене конвексне криве фигуре  $K$ . Тада свака додирна тачка између



Слика 26. Троугао најмање површине

криве и полигона представља средиште одговарајуће странице полигона.

**Доказ:** За почетак посматрајмо једноставнији случај у којем је реч о описаном троуглу. Аналогно том резонувању извешћемо општи доказ за сваки  $n$ -тоострани полигон. Размотримо три праве линије које затварају криву  $K$  при чему је крива  $K$  тело непроменљивог облика-круто. Нека се између тела и линија налази вакуум а изван линија гас на притиску  $p$ . Препрека у виду тела  $K$  спречава да се три праве обруше у једну. Оно што се сада дешава јесте покушај да се троугао што више приближи свом идеалном положају у којем су све три праве поклопљене. На тај начин троугао тежи да смањи своју површину што је више могуће.

У одређеном тренутку, када се систем смири након препуштања самом себи, све три линије долазе у стање равнотеже. Посматрајмо сада један тангенту, на пример у тачки  $O$ , на криву односно једну страну полигона. На њу делује само спољашњи притисак гаса. Како линија не ротира тачке је јер је моментата које делују на њу у односу на тачку  $O$  једнак нули  $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0}$ , где је  $\vec{M}_1$  момент који настоји да заротира шипку у смеру казаљке на сату а  $\vec{M}_2$  у смеру супротном од смера кретања казаљке на сату. На основу дате слике можемо писати:

$$M_1 = F_1 d_1 = p \cdot \Delta d \cdot \frac{\Delta d}{2}$$

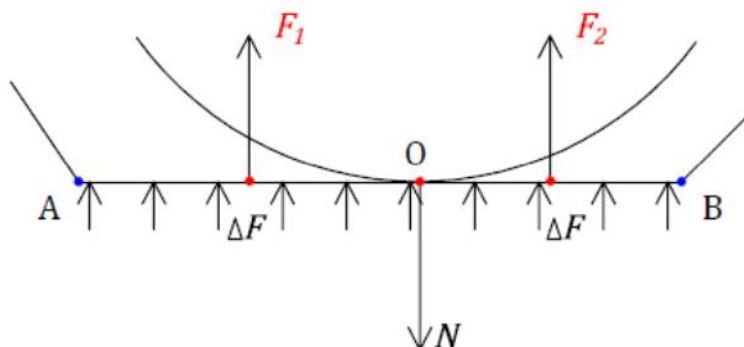
За други момент можемо писати:

$$M_2 = F_2 d_2 = p \cdot \Delta d \cdot \frac{\Delta d}{2}$$

где је са  $\Delta d$  означена мала дебљина линије.

Изједначавајући моменте добијамо:  $\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \cdot \vec{F}_2$  а одатле јасно следи да је  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$  одакле непосредно следи да је тачка  $O$  средиште одговарајуће стране полигона. Без умањења општости можемо закључити да се иста ствар дешава и са свим осталим странама полигона.

Штавише исти начин закључивања се може аналогно претходном, применити за било које  $n$  чиме је доказ теореме у потпуности завршен. ■

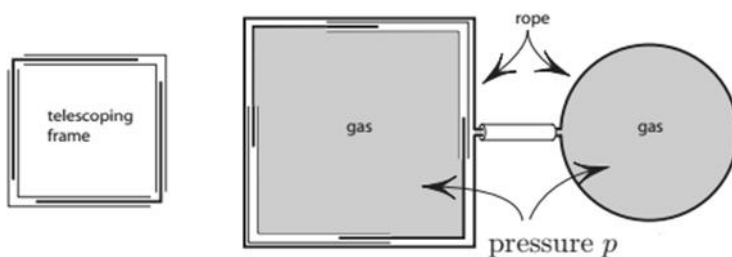


Слика 27. Приказ сила које делују на једну страну полигона

### 5.3.3 Још један дводимензиони проблем...

**Задатак:** Наћи најмањи могући збир површина круга и квадрата ако је задат збир пречника круга и стране квадрата.

**Решење:** Замислимо следећи механички систем. Нека нам је на располагању неистегљиви канап у облику петље који је једним својим делом намотан на квадрат а



Слика 28. Приказ механичког система који се састоји од круга и квадрата

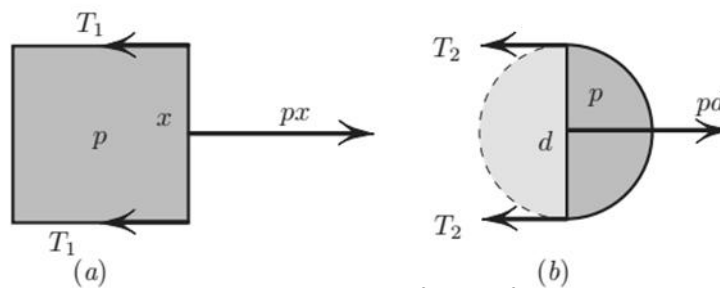
другим својим делом намотан на круг. Притом централни део петље пролази кроз цевчицу као на слици испод.

Замислимо да се унутар петље налази гас који се шири насупрот канапу. Он може неко одређено време да се шири, али не и у бесконачност јер га неистегљивост канапа у томе спречава. Потенцијална енергија гаса је опадајућа функција површине коју заузима. То је због тога што гас да би уопште могао да се шири мора константно да претвара део своје енергије у рад извршен над петљом. Због тога минималној површини одговара максимална потенцијална енергија а самим тим и стање равнотеже(лабилне). Јасно је сада да је сила затезања нити једнака у свим деловима канапа.

Посматрајмо прво део облика квадрата. Засмислимо да се у њему налази гас који је на притиску  $p$ . На његову десну бочну страну делују силе затезања нити и притисак гаса који се налази унутра. Како је систем у равнотежи то резултујућа сила на бочну страну мора бити нула:

$$2T_1 = px\Delta h$$

где је са  $\Delta h$  означена мала дебљина контуре, односно пречник попречног пресека канапа.



Слика 29. Приказ сила које делују на квадрат односно круг

Слично томе пишемо и за круг:

$$2T_1 = pd\Delta h$$

Сада је јасно да из претходне две једнакости следи да страна квадрата мора бити једнака пречнику круга.

Сада је  $x + d = s \Rightarrow x = d = \frac{s}{2} \Rightarrow S_u = \frac{s^2}{4} (1 + \pi)$  минимални збир површина који се може добити за задати збир пречника круга и стране квадрата. ■



### 5.3.4 Још један тродимензиони проблем

---

У претходном поглављу смо показали како на један лаган "физички" начин можемо одредити које услове мора задовољавати једна дводимензиона фигура да би се добила тражена минимална површина. Сада ћемо сличним приступом проблему, покушати да пронађемо физички модел који би одговарао решавању проблема који су у вези са тродимензионалним геометријским телима.

**Задатак:** Од свих ваљака дате запремине наћи онај који има најмању површину

**Решење:** Замислимо да имамо ваљак направљен од сапунице који може слободно да мења како свој полупречник основе тако и своју висину. Нека је наш ваљак напуњен гасом задате запремине  $V$ . Нека наша сапуница има коефицијент површинског напона који износи  $\sigma$ . Тада је укупна потенцијална енергија ваљка дата изразом:

$$E_u = \sigma S_u = \sigma(2B + M)$$

Из претходног израза сада следи да ваљку минималне површине одговара минимална потенцијална енергија а самим тим и стање стабилне равнотеже. Из услова равнотеже силе површинског напона и притиска гаса на горњу базу ваљка добијамо:

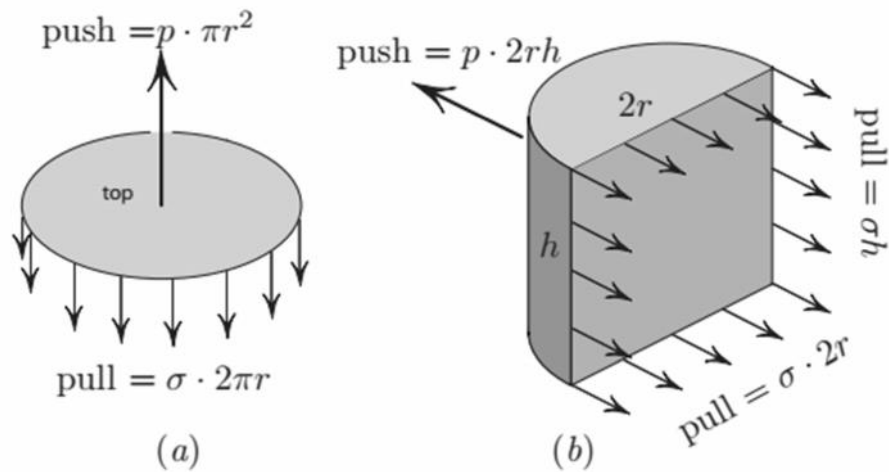
$$\sigma \cdot 2r\pi = p \cdot r^2\pi$$

Са друге стране, посматрајући полуцилиндар кога чине гас и сапуница из услова равнотеже сила површинског напона и притиска гаса имамо:

$$\sigma(4r + 2h) = p \cdot 2rh$$

Одатле непосредно следи однос:  $h = 2r$ . Сада је минимална површина једнака:

$$S = 2r\pi(r + h) = 6 \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2} \pi. \blacksquare$$



Слика 30. Приказ сила које су у равнотежи када посматрамо базу ваљка односно једну његову половину

## 6. Закључак

Изгледа да је дошао крај још једном покушају да се прикаже међусобни утицај једне науке на другу и њихово међусобно прожимање у сврху описивања света који нас окружује. Мислим да је норма која је потребна да бисмо добили један скуп адекватно описаних појава које покривају елементарне области средњошколске физике у потпуности испоштована. Користећи се законима одржања енергије, моментима сила, статиком и динамиком идеалних флуида, особинама електричне струје и електричних кола, силама површинског напона и још многим мање или више битним идејним целинама показали смо доста тврђења из планиметрије, дотакли се мало теорије бројева, показали доказе неких најпознатијих теорема као што је Питагорина и крочили у грану математике насталу искључиво под утицајем физичке појаве центра масе - геометрију маса. Чини ми се да је главна мотивација овог рада јасна од самог почетка - пронаћи одговарајући однос који описује међусобни положај математике и физике на хијерархијској лествици научног значаја и доприноса.

Има још јако много доказа који потврђују повезаност ове две науке а за које није било могућности нити простора да се убаце. Покушавши да идејно заокружим причу о различитим приступима решавању проблема у овом раду, наводио сам одређене интерпретације неких идеја пронађених у приложеној литератури која се мање или више разликује од оних наведених. Сва оригинална решења као и још доста додатака могу се пронаћи у одговарајућим књигама.

За сам крај, истакао бих да је мој закључак да се математика и физика понашају као два кварка. Неминовно је њихово изоловано постојање али што више покушавамо да их раздвојимо то је сила која их повезује све јача.

## 7. Литература

- [1] "Геометрия масс", М.Б.Балк, В.Г.Болтянский (Библиотечка "КВАНТ", выпуск 61)
- [2] "The mathematical mechanic", Mark Levi (Princeton Univeristy Press)
- [3] "Физика 1", Наташа Чалуковић (Уџбеник за први разред Математичке гимназије)
- [4] "Некоторые приложения механики к математике", В.А.Успенский (Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1958.