Математичка гимназија

Београд

Правилни политопи

Матурски рад из геометрије

Ученик:

Милица Гаљак IVц

Ментор:

Војислав Пантић

Београд, јун 2019. године

С А Д Р Ж А Ј

Страна

1. УВОД

Правилни политопи тематика је која ме је заинтересовала још у трећем разреду гимназије. Након изучавања планиметрије и стереометрије у нижим разредима, почела сам да се питам како би, нама већ позната тела у три димензије, изгледала да им се дода још једна – или више њих.

Пут до одговора нимало није лак, баш из тог разлога што су више димензије нешто сасвим ново, непознато и апстрактно за људски ум. Таква врста спознаје захтева изузетну способност визуелизације, имагинације и одмештања од калупа у коме се налазимо живећи у тродимензионалном свету од свог рођења.

Међутим, иако још увек нисам дошла до свог одговора, на путу до њега - који је уткан великим бројем аналогија које сам вукла, како између мени блиских димензија, тако и између треће и четврте, открила сам да чак и у овом, 3Д простору (за који сам мислила да ме не може изненадити), постоје интригантна тела врло лепих конструкција , особина и међусобних повезаности.

И читалац ће приметити да се највећи део мог рада односи управо на тродимензионалне политопе – полиедре. Трудила сам се да рад конципирам тако да уз што мање предзнања може да се што више разуме и усвоји. Такође ми је циљ био и да добрим делом рада крећем и ван домена школског градива, као и да већина полиедара и њихових односа буде адекватно пропраћена сликом.

Надам се да ће странице које следе читаоцу приближити појам и особине полиедара и подстакнути га да даље истражује, мисли и визуелизује различите политопе - управо на онај начин на који је рад на њима подстакао мене ☺.

2. ИСТОРИЈСКИ ОСВРТ

Политоп представља уопштење следећег низа: тачка, дуж, многоугао, полиедар... Термин *политоп* први је сковао немачки математичар *Ернст Хоп*, 1882 године, а у енглески језик га уводи ирска математичарка *Алиша Стот*, око 20ак година касније. Међутим, ранији концепт под именом *полишема*, који је представљао аналога полигонима и полиедрима у вишим просторима, приписује се швајцарском математичару *Лудвигу Шлефлију*, такође кључној личности у развоју појма виших димензија,

Теорија политопа у дводимензионалном и тродимензионалном Еуклидском простору, једна је од најстаријих грана математике. Још од античких времена била је интригантно подручје тадашњим математичарима, па су тако правилни полигони и полиедри чинили знатан део њихових проучавања. Претпоставља се да су чак и питагорејци били упознати с правилним полиедрима.

Особа која је прва систематично изнела теорију правилних полиедара био је *Еуклид (323–283 п. н. е.)*. У 13. књизи „Елемената”, посвећеној управо правилним полиедрима, Еуклид, уз њихову дефиницију, даје доказ њихове егзистенције, конструкције па и доказ да их постоји само пет.

Такође је значајна личност био и *Архимед* (*287 п. н. е. – 212 п. н. е.),* који је помоћу 96-оугла одредио тачност броја π на две децимале и проучавао такозвана *Архимедова тела.*

Значајна су и имена која се везују за звездолике полиедре – *Паоло Учело (1397 — 1475)* и *Вензел Јамницел* (*1508 – 1585)*, који су први дошли до нацрта звездоликих полиедара; *Томас Брадвардин* (*1300 – 1349)*, који их је први систематично истраживао; Нешто касније, *Јохан Кеплер (1571 —1630), Луј Пуансо (1777 – 1859)* и *Огист Луј Коши (1789 —1857)* се баве открићем нових облика ових полиедара.

Још два утицајна човека у вези са овом тематиком била су *Лудвиг Шлефли (1814 – 1895)*, један од првих људи који је радио на концепту виших димензија и човек који је први открио правилне политопе и саћа у четири димензије; други је био *Харолд Скот Мекдоналд Коксетер (1907 – 2003),* чија књига *Правилни политопи(1948)* не само што је учврстила и детерминисала правац каснијег развоја теорије и учења политопа, већ се и у њој изучавају и битни појмови попут група симетрија и посматрања правилних мапа као полиедара.

Свој допринос изучавању политопа даје и математичар *Џон Питри(1907 - 1972),* који, између осталог, 20их година прошлог века открива 2 бесконачна правилна полиедра у Еуклидском тродимензионалном простору.

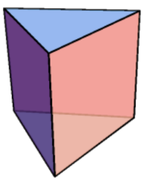
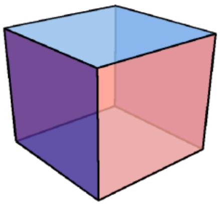
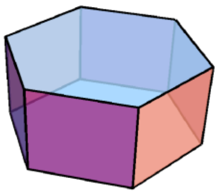
3. ПОЛИЕДАР

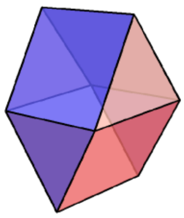
Дефиниција: Нека је *M* коначан скуп многоуглова простора тако да важи

1) Свака ивица неког многоугла из *M* је ивица тачно још једног многоугла из *M* (за та два многоугла кажемо да су суседна)
2) Никоја два суседна многоугла из *M* нису у истој равни
3) За свака два многоугла *m* и *m*' из *M* постоји низ многоуглова $m_1 m_2 \dots m_n$, у коме су свака два узастопна многоугла у низу суседна.

Унија многоугаоних површи одређених многоугловима из М назива се *полиедарска површ*. Те многоугаоне површи називају се пљосни,односно *стране* полиедарске површи. Странице и темена многоуглова из М су *странице* и *темена* те полиедарске површи. Две пљосни су суседне ако имају заједничку ивицу; два темена су суседна ако су инцидентна са истом ивицом.

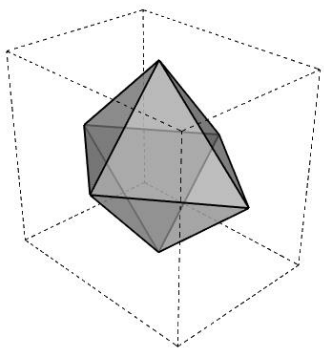
Полиедарска површ је *проста* ако никоје две несуседне пљосни те површи немају заједничких тачака, осим у случају када имају заједничко једно теме, при чему скуп свих пљосни које садрже то теме образују један рогаљ. Проста полиедарска површ у простору одређује две области, тако да тачно једна од те две области не садржи ниједну праву. Унија те области и просте полиедарске површи назива се ***полидеар*.**



Темена ивице и пљосни те полиедарске површи су *темена, ивице и пљосни* тог полиедра. Дужи одређене теменима полидера, које не припадају површи полиедра, су *дијагонале* тог полиедра. За све пљосни које су инцидентне са одговарајућим теменом полиедра кажемо да се сустичу у том темену.

Нека је *P* полиедар. Полиедар *P'* је *дуални полидеар* полиедра *P* ако су темена тог полиедра унутрашње тачке пљосни полиедра *P,* а два његова темена одређују ивицу ако и само ако припадају суседним пљоснима полиедра *P.* Ако је *P* број пљосни, *I* број ивица и *T* број темена полиедра *P,* дуалном полиедру *P'* одговара *P* темена , *I* ивица и *T* пљосни.



За полиедар *P* кажемо да је *рода r* ако је *r* највећи могући број полигона $p_1 p_2 \ldots p_r$ таквих да

1) је сваки од тих полигона састављен од ивица полиедара P
2) никоја два од тих полигона немају заједничких тачака
3) ниједан од тих полигона не дели полиедарску површ тог полиедра на више од једне области, нити је заједно деле на више од једне области.

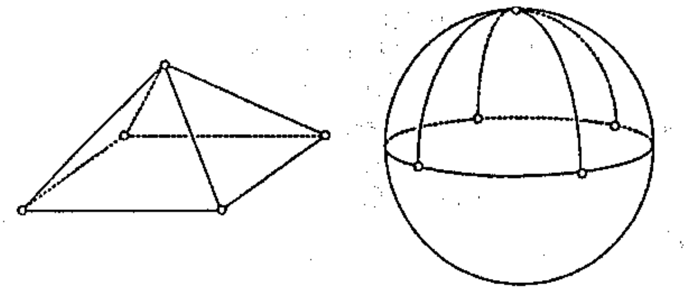
Сваки конвексни полиедар је нултог рода.

4. ОЈЛЕРОВА ТЕОРЕМА

У овом одељку одредићемо везу између броја пљосни темена и ивица одређене класе полиедара. Јасно је да та веза не зависи од метричких својстава полиедра: дужине ивица, мере углова итд, већ од начина на који су темена, ивице, а тиме и пљосни полиедра повезане.

Нека је *P* полиедар нултог рода и $\sum(S,r)$ сфера чији је центар, тачка S , унутрашња тачка тог полиедра. Може се доказати да том полиедру одговара такозвана мапа на сфери, која представља поделу сфере на одговарајуће области(тзв области мапе), тако да свакој области одговара једна пљосан поиедра. При томе су области „расподељене“ на исти начин као и код полиедра: ивицама полиедра одговарају лукови на сфери које раздвајају две области, а теменима полиедра тачке на сфери у којима се лукови сустичу. Те тачке називају се *темена мапе*; а сами лукови *ивице мапе*. Интуитивно, ту мапу добијамо деформисањем полиедра, „надувавањем“ у сферу.

Ако је полиедар конвексан, ту мапу можемо добити као *централну пројекцију* полиедра из тачке *S* на сферу $\sum$, при чему се произвољно теме А полиедра пресликава у пресечну тачку полуправе SA са том сфером. У том случају, ивице и пљосни пројектоваће се у одговарајуће лукове великих кругова на сфери и области на сферу, повезане на исти начин као и код полиедра.



Из претходног разматрања јасно је да мапа *M* која одговара полиедру *P* нултог рода има исти број ивица темена и области (пљосни) као тај полиедар и да су ти елементи на исти начин повезани. У том смислу мапа чува тополошка својства тог полиедра.

Ојлерова теорема: Ако је *P* број пљосни, *T* број темена и *I* број ивица неког полиедра нултог рода, тада је

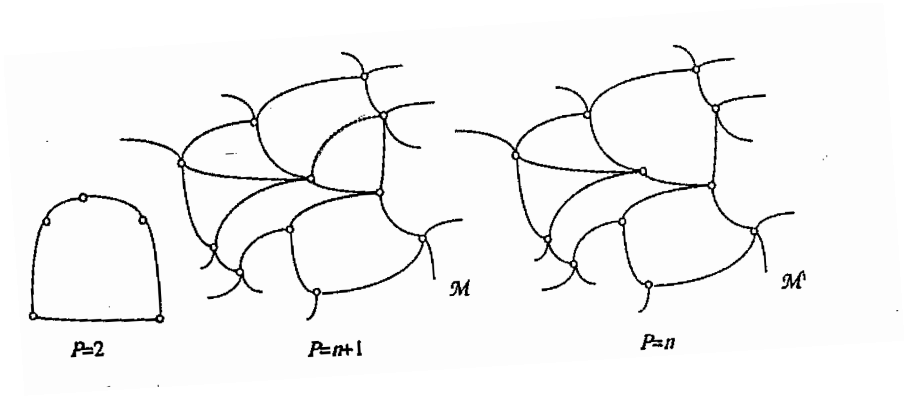
$$T + P = I + 2$$

Доказ: На основу претходног разматрања, довољно је доказ извести за произвољну мапу *M* на некој сфери $\sum$ која има *P* области, *I* ивица и *T* темена.

Доказ ћемо извести индукцијом по броју области.

У случају да мапа *M* има *P*=2 области (та мапа додуше не одговара ни једном полиедру) , за ту мапу је *T = I = k*, па важи *T + P = I + 2*.

Претпоставимо да једнакост из тврђења важи за све мапе за које је $P = n$. Доказаћемо да тада та једнакост важи и за све мапе за које је $P = n + 1$. Нека је *M* мапа која има $P = n + 1$ области, *I* ивица и *T* темена. Та мапа има бар две области, па је нека ивица ове мапе заједничка за тачно две области. Дакле, њеним уклањањем настаје мапа *M’* од $P' = P - 1 = n$ области, $I' = I - 1$ ивица и $T = T'$ темена. На основу индукцијске хипотезе, за мапу *M’* важи једнакост $T' + P' = I' + 2$, па је и $T + P - 1 = I - 1 + 2$, односно $T + P = I + 2$. Према томе једнакост из тврђења важи и за мапу *M*.



Уопштење ове теореме огледа се у дефиницији *Ојлерове карактеристике:*

Дефиниција: Ојлерова карактеристика χ полиедра је

$$\chi = T + P - I,$$

где T, P, I представљају број темена, пљосни и ивица тог полиедра , респективно.

Такође важи и релација

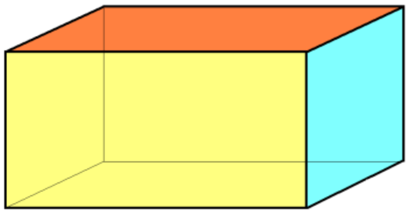
$$\chi = 2 - 2r$$

где је r род посматраног полиедра.

5. ТОПОЛОШКИ ПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ

Дефиниција: Полиедар нултог рода *P* је ***тополошки правилан*** ако је свака његова пљосан инцидентна са истим бројем од *n* ивица и свако теме инцидентно са истим бројем од *m* ивица. Кажемо тада да је тај полиедар *типа (n,m).*

Дакле, у случају тополошке правилности полиедра, није неопходно да су све његове ивице подударне. На пример, коцка је пример тополошки правилног полиедра типа (4,3), али то могу бити и квадар ,четворострана призма итд.



Доказаћемо постојање тачно 5 типова тополошки правилних полиедара. Испитајмо који су то могући типови:

Теорема: Ако је *P* тополошки правилан полиедар типа *(n,m)*, тада:

$$n, m \in \{(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)\}$$

Доказ: нека је *P* тополошки правилан полиедар типа *(n,m)* и *P,I,T* бројеви његових пљосни, ивица и темена редом. Како је свака пљосан инцидентна са *n* ивица, свако теме са *m* ивица,а полиедар је нултог рода, важи

$$\begin{cases} 2I = nP \\ 2I = mT \\ T + P = I + 2 \end{cases}$$

Решавајући тај систем по *P,I,T* добијамо

$$I = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}, P = \frac{4m}{2m + 2n - mn}, T = \frac{4n}{2m + 2n - mn}$$

Како су *P, I, T* позитивни бројеви, потребно је да важи:

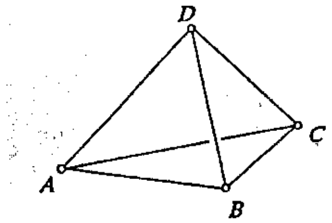
$$2n + 2m - nm > 0,$$

Односно, после сређивања

$$(n-2)(m-2) < 4$$

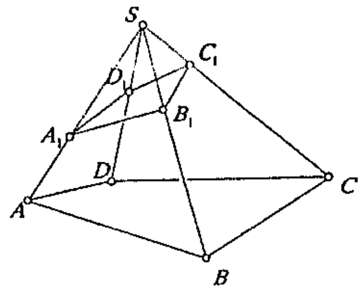
Ако су *n* и *m* цели бројеви већи од два, једина решења те неједначине су $(n, m) \in \{(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)\}$.

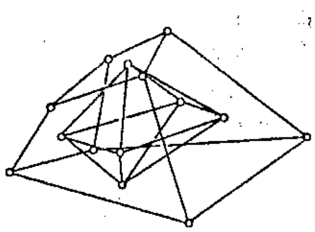
Овим смо доказали да су $(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)$ једини могући типови тополошки правилних полиедара. Сада ћемо доказати постојање сваког од њих:



1. Нека је ABC произвољан троугао и D тачка која не припада равни ABC. Полиедар одређен троугловима ABC, ABD, ACD, BCD као пљоснима је тополошки правилан полиедар типа (3,3). Тај полиедар се назива *тетраедар.*

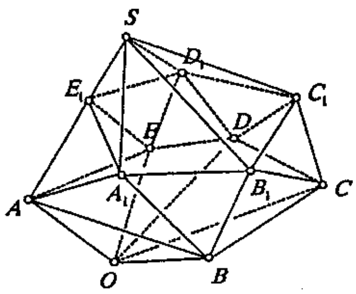
2. Нека је $ABCD$ произвољан четвороугао неке равни, S тачка ван те равни и A_1, B_1, C_1, D_1 пресеци правих SA, SB, SC, SD са равни која не садржи ни једну од тачака A, B, C, D, S , при чему је $\beta(S, A, A_1)$, $\beta(S, B, B_1)$, $\beta(S, C, C_1)$, $\beta(S, D, D_1)$. Полиедар одређен пљоснима $ABCD, A_1B_1C_1D_1,\ BCB_1C_1$, $A\,B\,A_1B_1, CDC_1D_1, DAD_1A_1$ је правилан полиедар типа (4,3) и назива се *хексаедар.*



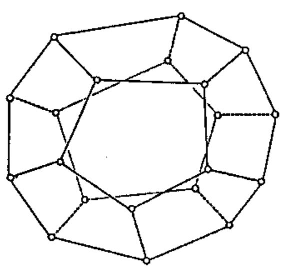


3. Полиедар дуалан хексаедру, дакле, полиедар чија су темена унутрашње тачке пљосни хексаедра је правилан полиедар типа (3,4) и назива се *октаедар.*

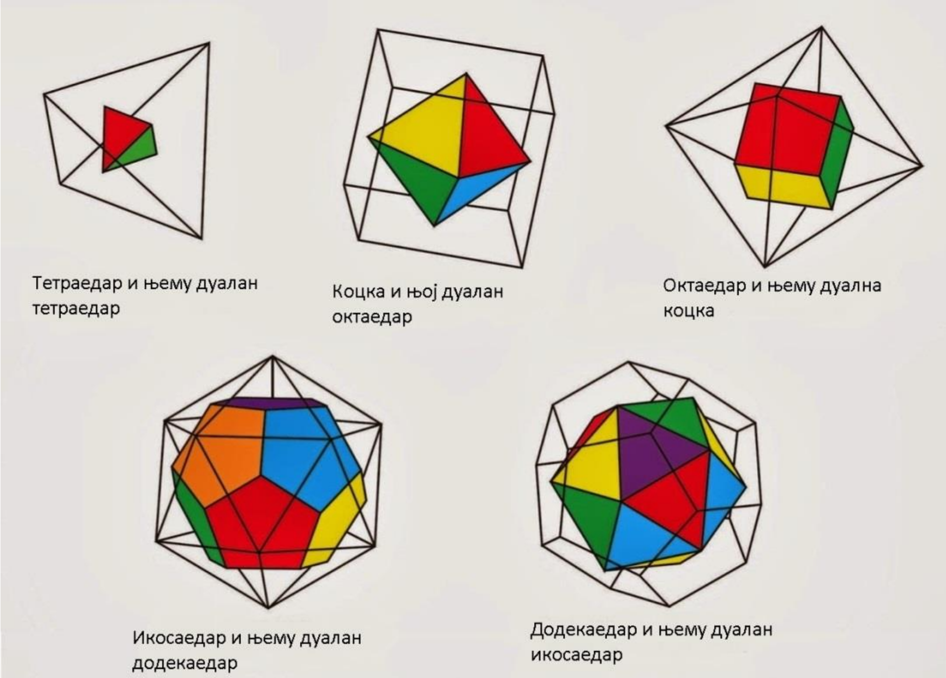
4. Нека су $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ два петоугла која припадају паралелним равнима α и α' , при чему никоје две одговарајуће ивице нису паралелне, а O и S две произвољне тачке такве да је $S, A \div \alpha_1, O, A_1 \div \alpha$. Полиедар одређен троугловима: $ABA_1, A_1B_1A, B_1CB_1 \dots E_1A_1A$ (њих десет) ; $AOB, BOC, \dots EOA$(њих пет); $A_1SB_1, B_1SC_1, \dots E_1SA_1$ (њих пет) као пљоснима је правилан полиедар типа (3,5) и назива се *икосаедар*



5. Полиедар дуалан икосаедру, дакле, полиедар чија су темена унутрашње тачке пљосни икосаедра је правилан полиедар типа (5,3) и назива се *додекаедар.*



Из конструкције пет врста тополошки правилних полиедара закључујемо да су полиедри (*n,m*) и *(m,n)* дуални. Дакле, дуални су хексаедар и октаедар, икосаедар и додекаедар, док је тетраедар дуалан сам себи.



У прилогу је табела која садржи број пљосни, ивица и темена сваког од тополошки правилног полиедра. Број његових пљосни оправдава назив полиедра:

Полиедар	тип	P	I	T
тетраедар	(3,3)	4	6	4
хексаедар	(4,3)	6	12	8
октаедар	(3,4)	8	12	6
додекаедар	(5,3)	12	30	20
икосаедар	(3,5)	20	30	12

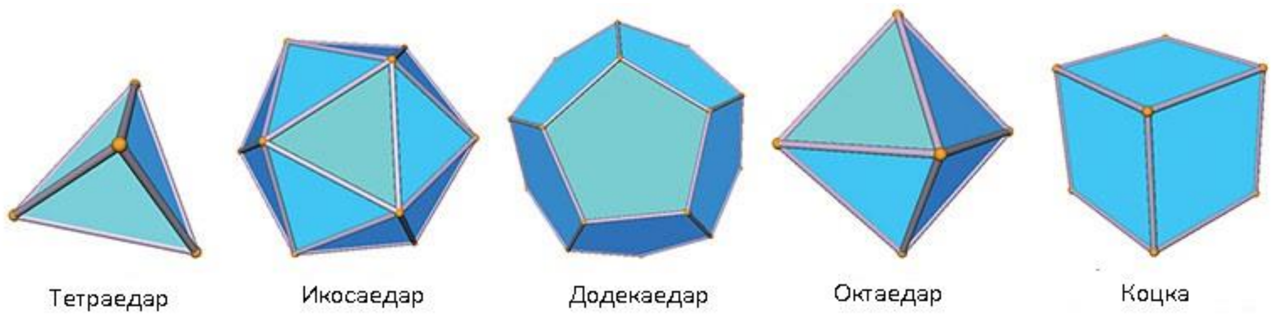
6. МЕТРИЧКИ ПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ

Дефиниција: Тополошки правилан тетраедар (*n,m*) је и ***метрички правилан*** ако су му све пљосни правилни многоуглови. Метрички правилни полиедри називају се *Платонова тела.*

Лако се доказује да су код метрички правилног полиедра све ивице, а онда и све пљосни подударне. Такође, лако се доказује постојање свих пет Платонових тела

1. У случају конструкције тополошки правилног тетраедра $ABCD$, он је метрички правилан ако су му све пљосни правилни троуглови
2. Метрички правилан хексаедар (4,3) настаје ако је четвороугао $ABCD$ тополошки правилног хексаедра квадрат, а тачке A_1, B_1, C_1, D_1 настају транслацијом темена тог квадрата за вектор управан на раван квадрата и чија је дужина једнака ивици квадрата.
3. Октаедар (3,4) је метрички правилан ако је хексаедар који га генерише као дуалног метрички правилан
4. Метрички правилан икосаедар (3,5) можемо конструисати као у случају конструкције тополошки правилног икосаедра, при чему се сви троуглови који одређују икосаедар конструишу као правилни (петоуглови од којих почињемо ту коснтрукцију су правилни и у одговарајућем положају)
5. Додекаедар (5,3) је метрички правилан ако је икосаедар који га генерише као дуалног метрички правилан.

Ако су тетраедар, хексаедар, октаедар, додекаедар и икосаедар метрички правилни, зову се правилан тетраедар, правилан хексаедар, правилан октаедар, правилан додекаедар и правилан икосаедар. Правилан хексаедар назива се и коцка.



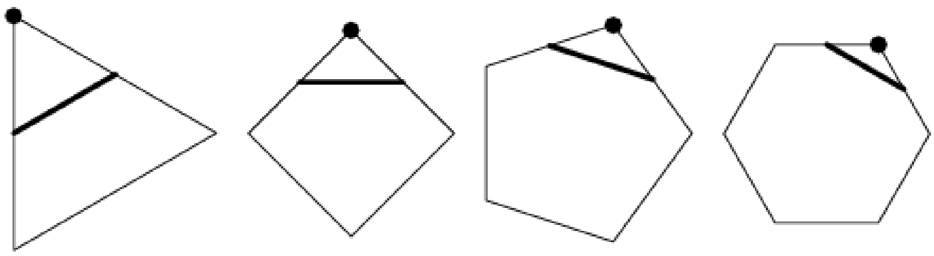
Класична дефиниција правилности полиедра укључује три исказа:

1. правилне стране
2. подударне стране
3. подударне рогљеве.

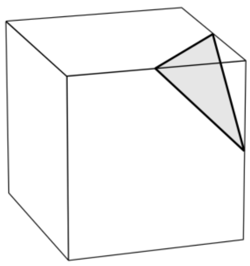
Занимљиво је поставити и другу дефиницију, која укључује само два исказа, сасвим довољна да имају исти учинак. У њој замењујемо разматрање рогљева и страна теменим фигурама.

Темена фигура код темена О полигона је дуж која спаја средишта двеју страница кроз тачку О.За многоугао $\{p\}$ странице $2l$, то је дуж дужине

$$2l\cos\frac{\pi}{p}$$



Темена фигура код темена О полиедра је многоугао чије су странице темене фигуре свих страница које окружују О. Дакле, његова темена су средишта свих ивица кроз О. На пример, темена фигура коцке у сваком темену је троугао.



Сада је, по новој дефиницији, полиедар правилан ако су

1. Све његове стране правилне
2. Све његове темене фигуре правилне.

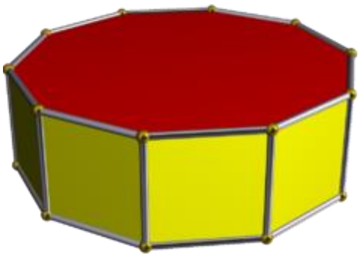
Како су стране правилне, све ивице морају бити једнаке дужине ,рецимо $2l$. Слично, како су све темене фигуре правилне, све стране морају бити подударне, јер ће се у супротном код темена О јавити темена фигура која ће иматиимати неједнаке странице, дужине $2l\cos\frac{\pi}{p}$ за две различите вредности p. Такође, сви диедарски углови су једнаки јер они који се појављују код било ког темена припадају правилној пирамиди чија је основа темена фигура. Свака бочна страна ове пирамиде је једнакокраки троугао са странама $l, l, 2l\, cos\frac{\pi}{p}$. Број страна базе не може да варира без промене угла диедра. Дакле, овај број, који ћемо назвати q , исти је за сва темена и све темене фигуре морају бити подударне. На овај начин имамо правилан полиедар $\{p, q\}$. Његова страна је $\{p\}$ дужине странице $2l$, а темена фигура је $\{q\}$ странице $2l\cos\frac{\pi}{p}$.

7. ПОЛУПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ

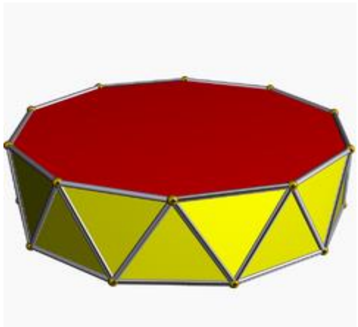
Дефиниција: Конвексан полиедар је *полуправилан* ако су му:

1) Све пљосни правилни многоуглови
2) Одговарајући рогљеви у свим теменима међусобом подударни

Сви метрички правилни полиедри су уједно и полуправилни. Из претходног



разматрања јасно је да је и једнакоивична n-income тострана призма полуправилан полиедар; код ње се у сваком темену сустиче један n-тоугао и два квадрата. Због тога ћемо рећи да је она полуправилан полиедар типа $n \cdot 4 \cdot 4$ односно $n \cdot 4^2$.



У теменима једнакоивичне антипризме, која се састоји од два n-тоугла и $2n$ троуглова који те многоуглове повезују, сустиче се тачно 3 троугла и један n –тоугао, те су оне полуправилни полиедри типа $n \cdot 3^3$.

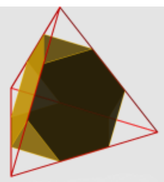
Уопште за неки полуправилан полиедар рећи ћемо да је типа $n_1^{p1} n_2^{p2} \dots n_k^{pk}$, ако се у сваком његовом темену редом сустиче p_1 n_1-тоуглова, p_2 n_2-тоуглова ... p_k n_k-тоуглова. Тако је коцка полуправилан полиедар типа 4^3; и уопште сваки метрички правилан полиедар типа (*n,m*) је полуправилан полиедар типа n^m.

Природно се поставља питање колико има полуправилних полиедара.

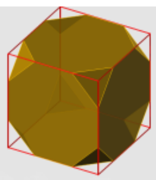
Теорема: Једини полуправилни полиедри су:

i. Метрички правилни полиедри типа $3^3, 4^3, 3^4, 5^3, 3^5$
ii. Једнакоивичне призме типа $n \cdot 4^2$
iii. Тзв једнакоивичне антипризме типа $n \cdot 3^3$
iv. Полиедри типа $3 \cdot 6^2, 3 \cdot 8^2, 4 \cdot 6^2, 3 \cdot 10^2, 5 \cdot 6^2, 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3, 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3, 4 \cdot 6 \cdot 8, 3 \cdot 4^3, 4 \cdot 6 \cdot 10, 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4, 5 \cdot 3^4, 3^4 \cdot 4$ *(Архимедова тела)*

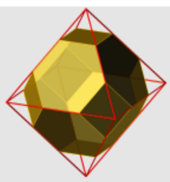
Пет Архимедових тела добија се погодним одсецањем врхова Платонових тела: $3 \cdot 6^2, 3 \cdot 8^2, 4 \cdot 6^2, 3 \cdot 10^2, 5 \cdot 6^2$.



Крњи тетраедар
{3, 6, 6}

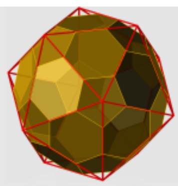


Крњи хексаедар
{3, 8, 8}



Крњи октаедар
{4, 6, 6}

Крњи додекаедар
{3, 10, 10}

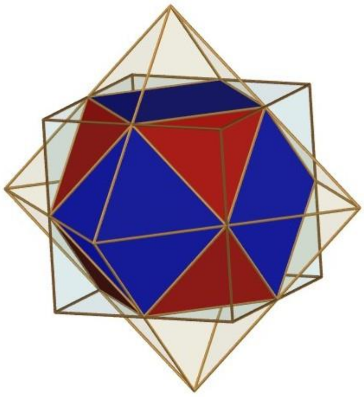


Крњи икосаедар
{5, 6, 6}

На следећим сликама су приказана и преостала Архимедова тела:

Приметимо и да се неки од полуправилних полиедара, попут $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ и $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$. добијају као полиедри чија су темена средишта ивица Платонових тела – у овом случају коцке/октаедра и додекаедра/икосаедра, респективно.

8. КВАЗИПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ



Правилан полиедар $\{p, q\}$ и њему дуалан $\{q, p\}$ могу формирати још један полиедар, у ознаци $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$, који има N_1 темена - средишта свих ивица или једног или другог од та два полиедра. Његове стране чине $\{q\}$-ови и $\{p\}$-ови, који су темене фигуре од $\{p, q\}$ и $\{q, p\}$, редом. У сваком темену се састају четири ивице, па тако укупно има $2N_1$ ивица.

Када је $p = q = 3$, овај изведени полиедар је октаедар (тетратетраедар), јер су све његове стране троуглови, а четири се састају у сваком темену:

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = \{3,3\}$$

У осталим случајевима p и q се разликују, али још увек важи да су све ивице једнаке и да свака од њих раздваја по један $\{p\}$ и $\{q\}$.

Дефиниција: Квазиправилан полиедар је полиедар који има све правилне стране, док његове темене фигуре, иако нису правилне, јесу цикличне ,односно могу се уписати у кругове и имају једнаке наизменичне странице.

Из ове дефиниције следи да су све ивице квазиправилног полиедра једнаке, рецимо дужине $2l$, и да су сви диедарски углови једнаки, а да се полиедарска површ састоји од тачно две врсте многоуглова, те ће свака страна престављена једном врстом многоугла бити потпуно окружена странама друге врсте.

Све темене фигуре су подударне. Ако се у једном темену сустиче r $\{p\}$-ова и r $\{q\}$ –ова, онда ће се исто толико $\{p\} -$ ова и $\{q\}$ –ова сустицати у сваком темену квазиправилног полиедра. Темена фигура је онда *2r* – гон једнаких унутрашњих углова, са наизменичним страницама дужине $2L \cos\frac{\pi}{p}$ и $2L \cos\frac{\pi}{q}$. Ивични углови код једног темена тог $2r$ – гона имају збир

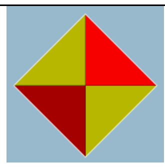
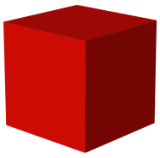
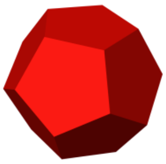
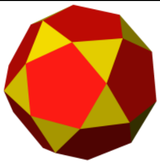
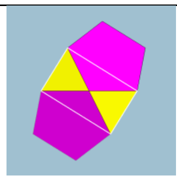
$$r\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi + r\left(1 - \frac{2}{q}\right)\pi,$$

који мора бити мањи од 2π. Та неједнакост еквивалентна је следећем изразу:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

Како p и q не могу бити мањи од 3, то је онда $r = 2$, а $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$ је $\left\{ \frac{3}{3} \right\}$, $\left\{ \frac{3}{4} \right\}$ или $\left\{ \frac{3}{5} \right\}$.

Формално се само кубоктаедар $\left\{ \frac{3}{4} \right\}$ и икосидодекаедар $\left\{ \frac{3}{5} \right\}$ сматрају квазиправилним телима.

Правилни полиедар	Њему дуалан полиедар	Квазиправилан полиедар	Темена фигура
 тетраедар	 тетраедар	 тетратетраедар	
 коцка	 октаедар	 кубоктаедар	
 додекаедар	 икосаедар	 икосидодекаедар	

Посматрајући моделе октаедра, кубоктаедра или икосидодекаедра, уочавамо одређен број *екваторијалних* квадрата, шестоуглова или десетоуглова - полигона који леже у равни кроз центар, а који су уписани у велике кругове описане сфере. Пошто је $r = 2$, темена фигура $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$ је правоугаоник , страница $2L\cos\frac{\pi}{p}$ и$2L\cos\frac{\pi}{q}$,а два наспрамна темена овог правоугаоника чине средишта двају суседних страница екваторијалног полигона. Ако је овај полигон $\{h\}$, онда је његова темена фигура дужине $2L\cos\frac{\pi}{h}$. Међутим, ова темена фигура је и дијагонала правоугаоника , те важи релација:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{h}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)$$

Можемо проверити да је $h = 4$ за $\left\{ \frac{3}{3} \right\}$, 6 за $\left\{ \frac{3}{4} \right\}$ и 10 за $\left\{ \frac{3}{5} \right\}$.

Свака ивица од $\left\{\frac{p}{q}\right\}$,којих има $2N_1$, припада тачно једном екваторијалном $\{h\}$-гону, тако да је њихов укупан број $\frac{2N_1}{h}$. Како сваки екваторијални h-гон сече сваки преостали екваторијални h-гон у пару својих наспрамних темена, број тих преосталих

екваторијалних полигона биће једнак половини h, те важи релација :

$$\frac{2N_1}{h} - 1 = \frac{h}{2}$$

Одакле је

$$4N_1 = h(h+2)$$

и $h = \sqrt{4N_1 + 1} - 1$.

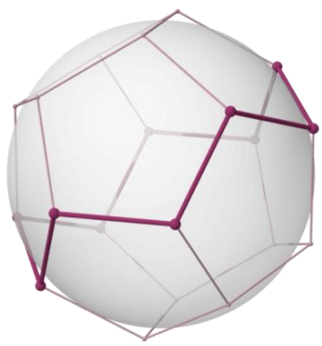
Када смо дефинисали квазиправилне полиедре, установили смо да су темена од $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ средишта ивица од $\{p, q\}$. Темена екваторијалног $\{h\}$ −гона су средишта посебне затворене линије од h ивица полиедра $\{p, q\}$, које чине искошени(просторни) полигон који се назива *Питријев полигон.*

На други начин он може бити дефинисан као просторни полигон такав да сваке две узастопне, али не и три, странице припадају истој страни правилног полиедра.

Питријев полигон је врста цик – цак линије, док његова наизменична темена чине два $\left\{\frac{1}{2}h\right\}$-гона у паралелним равнима. Другим речима, његова темена и странице су темена и бочне ивице $\frac{1}{2}h$-угаоне антипризме.

Пошто $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ има $\frac{2N_1}{h}$ екваторијалних полигона, правилан полиедар $\{p, q\}$ има $\frac{2N_1}{h}$ подударних Питријевих полигона. Реципрочни полиедар $\{q, p\}$ има исти број Питријевих полигона, али су они другачијег облика,
осим када је $p = q$.

На следећој слици је приказан Питријев полигон за правилан додекаедар – просторни десетоугао:

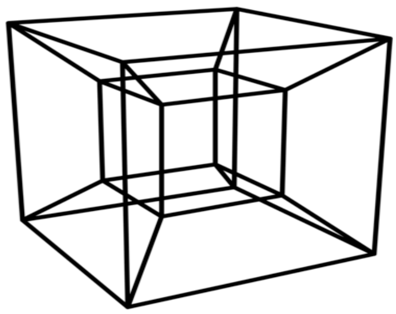


9. ПОЛИТОПИ У ВИШИМ ПРОСТОРИМА

Постоје три начина приступа Еуклидској геометрији 4 и више димензија: аксиоматички, алгебарски(аналитички) и интуитивни.

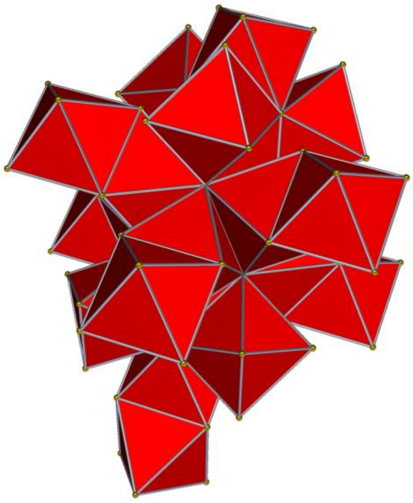
Врло мали број људи је икада достигло ту вештину да визуелизују хипер равни једноставно и природно као што остали људи замишљају полиедре. Способност тог типа може се стећи посматрањем аналогија између прве и друге димензије, друге и треће па треће и четврте. Овакав интуитивни приступ је веома плодоносан у навођењу на резултат који би требало да очекујемо. Додуше, постоји опасност од тога да дођемо до погрешних закључака ако се не припомогнемо неким од преостала два приступа.

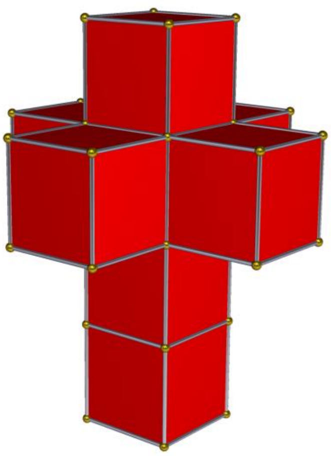
На пример, пошто је површина круга $2\pi r$, а површина сфере $4\pi r^2$, један од могућих закључака је да ће хипер – површина хипер-сфере бити $6\pi r^3$ или $8\pi r^3$. Оваква аналогија не би нас никада довела до тачног резултата, који је $2\pi^2 r^3$.



Ипак, за пример здраве аналогије узећемо следећу дедукцију: дуж састоји од скупа тачака, полигон од скупа дужи, полиедар од скупа полигона – на тај начин се и четвородимензионално тело формира од скупа тродимензионалних тела, односно полиедара.

Неки од познатијих примера правилних политопа у четвородимензионалном простору су *''24 cell'',* чија се мрежа састоји од 24 правилних октаедара и *тесеракт(хиперкоцка)*, чију мрежу чини 8 коцки.





11. ЗАКЉУЧАК

У овом раду дотакла сам се свих оних теза за које сматрам да су иоле битне за разумевање правилних политопа у простору. Приметан је и знатан број различитих класификација тих политопа, као и њихова međусобна повезаност, које сам кроз појмове тополошке и метричке правилности, полуправилности,квазиправилности, дуалности итд, потенцирала у свом раду.

Međутим, овде прича не стаје. Геометрија је једна дивна наука која пружа безброј могућности ономе ко се у њу упусти. Дуж и попреко простора свих димензија чека нас још безброј тела која тек треба да буду откривена, описана и што је најбитније - схваћена.

Желела бих да се овом приликом захвалим свим професорима геометрије који су ми овај предмет у средњој школи предавали и приближили: Аиди Золић, Бориславу Гајићу и Ђорђу Баралићу.

Takođe, изразиту захвалност дугујем свом ментору, Воји Пантићу, на бескрајном стрпљењу, подршци и смерницама у раду, и љубави према геометрији коју поседује и која је takođe уткана у странице овог рада.

12. ЛИТЕРАТУРА

[1] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover Publications, New York, 1973

[2] Милан Митровић, Михајло Вељковић, Милан Вугделија, *Стереометрија за други разред математичке гимназије*

[3] http://alas.matf.bg.ac.rs/~vsrdjan/files/geometrija_cas12.pdf

[4] http://elearning.rcub.bg.ac.rs/moodle/file.php/38/Predavanje3-prva_godina.ppt

[5] https://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/11-12/summer-research11/Course_notes.pdf