Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

из предмета Математика

Кретање у пољу централне силе. Кеплерови закони

Ученик
Настасија Цонић, IVc

Ментор
др Борислав Гајић

Београд, мај 2019.

Увод

Кретање планета око Сунца описују Кеплерови закони. Кеплер[1] је формулисао три закона:

Први Кеплеров закон: Све планете се крећу по елиптичним путањама око Сунца, а у једној заједничкој жижи свих планетних елиптичних путања налази се Сунце;

Други Кеплеров закон: Радијус вектор Сунце-планета пребрише једнаке површине за једнаке временске интервале.

Трећи Кеплеров закон: Квадрат периода обиласка по елиптичним орбитама сразмеран је трећем степену велике полуосе елипсе.

Слика 1: Јохан Кеплер

Циљ овог матурског рада јесте управо доказ ових закона. Да би се доказали ови закони, проучаваће се проблем кретања материјалне тачке у пољу централне силе. Планета се може апроксимирати материјалном тачком, а сила којом Сунце привлачи планету централном силом.

Поље централне силе је један од система са централном симетријом, те га је најпогодније посматрати у поларном координатном систему. Према томе, у првој глави биће објашњен поларни координатни систем, као и трансформације поларног у Декартов координатни систем и обрнуто.

У другој глави биће дефинисани брзина и убрзање и представљени у поларном координатном систему.

У трећој глави биће доказани Кеплерови закони. Прво се доказује Други Кеплеров закон. Биће дефинисана секторска брзина и израчунаће се њен интензитет. Да је секторска брзина константна, биће доказано на два начина. Потом ће бити изведене једначине кретања материјалне тачке у пољу централне силе. Да би се систем лакше проучавао, биће редукован на систем са једним степеном слободе увођењем ефективног потенцијала. Од изузетног значаја је Бинеов образац из ког се добија једначина трајекторије материјалне тачке у експлицитном облику, те ће део треће главе бити посвећен и овом обрасцу. У наредном пододељку решаваће се Кеплеров задатак, чији је циљ налажење једначина кретања у пољу у каквом се крећу планете у Сунчевом систему. Такође, биће доказано да се планете заиста крећу

[1] Johannes Kepler (1571 - 1630), немачки математичар

у пољу деловања гравитационе силе Сунца, где та гравитациона сила делује као централна сила. Тиме ће потпуно бити доказан и Први Кеплеров закон. На самом крају, биће изложен доказ Трећег Кеплеровог закона.

Садржај

1 Поларни координатни систем

Поларни координатни систем је врло захвалан за рад са системима са централном симетријом, о којима ће у овом раду и бити реч.

Поларни координатни систем је систем координата у ком је позиција тачке A одређена њеном удаљеношћу од једне фиксне тачке O и углом φ који вектор $\overrightarrow{OA}$ заклапа са једном фиксном полуправом. Тачка O се назива пол система, вектор $\overrightarrow{OA}$ радијус вектор $\vec{r}$.

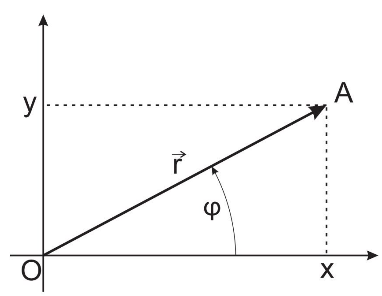
Координате тачке А су уређени пар (r, φ). Једино координате пола система, тачке O, нису дефинисане, јер је немогуће дефинисати угао.

1.1 Трансформације координата

1.1.1 Поларни у Декартов координатни систем

Када пол поставимо у координатни почетак Декартовог координатног система, поларну осу на x-осу (слика 2), тада следећи систем једначина трансформише поларне координате у Декартове:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$



Слика 2: Трансформације координата

1.1.2 Декартов у поларни координатни систем

Када координатни почетак Декартовог координатног система поставимо у пол поларног координатног система, x-осу на поларну осу, тада следећи систем једначина трансформише Декартове координате у поларне:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

1.2 Јединини вектори

Јединични вектор је вектор произвољног правца и смера чији је интензитет један. У Декартовом координатном систему, јединични вектор у правцу и смеру x-осе је $\vec{i}$, а у правцу и смеру y-осе $\vec{j}$, и они су међусобно нормални. У поларном систему координата, јединични вектор у правцу и смеру радијус вектора положаја је $\vec{e}_r$, а јединични вектор угла, који је у правцу тангенте на круг у посматраној тачки и оријентисан је као и угао, јесте $\vec{e}_\varphi$ и важи $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\varphi$:

$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\varphi| = |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1.$$

Јединични вектори у поларном координатном систему $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$ могу се изразити преко јединичних вектора у Декаторовом координатном систему $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и угла φ:

$$\vec{e}_r = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}, \tag{1}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}. \tag{2}$$

Вектор $\vec{r}$ изражен преко јединичних вектора једнак је

$$\vec{r} = r\vec{e}_r. \tag{3}$$

2 Брзина и убрзање

У најширем смислу, брзина је промена неке величине у јединици времена. У механици, када се говори о брзини, најчешће се говори о **тренутној брзини**, која је једнака првом изводу вектора положаја материјалне тачке по времену

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Интензитет брзине је

$$v = |\dot{\vec{r}}|.$$

Убрзање је промена брзине у јединици времена, тј. други извод вектора положаја материјалне тачке по времену

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Интензитет убрзања је

$$a = |\dot{\vec{v}}|.$$

У поларном координатном систему брзина и убрзрање се могу изразити преко јединичних вектора $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$. Најпре треба одредити прве изводе јединичних вектора по времену. На основу једначина (1) и (2) следи

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}_r} &= -\sin\varphi\vec{i}\dot{\varphi} + \cos\varphi\vec{j}\dot{\varphi} \\ &= \dot{\varphi}(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) \\ &= \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}_\varphi} &= -\sin\varphi\vec{j}\dot{\varphi} - \cos\varphi\vec{i}\dot{\varphi} \\ &= \dot{\varphi}(-\sin\varphi\vec{j} - \cos\varphi\vec{i}) \\ &= -\dot{\varphi}\vec{e}_r. \end{aligned} \tag{5}$$

Брзина и убрзање у поларном координатном систему могу се изразити користећи једначине (3), (4) и (5):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}_r} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}_r} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r(\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{\vec{e}_\varphi}) \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}_r} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r \\ &= \vec{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}). \end{aligned} \tag{7}$$

3 Кретање у пољу централне силе

Централно кретање је кретање материјалне тачке под дејством централне силе.

Дефиниција 3.1. *Сила је* ***централна****, ако је облика*

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r, \qquad r = |\vec{r}|, \qquad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r},$$

где је $f(r)$ интензитет централне силе.

Једначине кретања добијају се из **Другог Њутновог закона** који каже да је сила која делује на материјалну тачку једнака производу масе материјалне тачке и њеног убрзања:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

За проучавање централног кретања погодан је поларни координатни систем. На основу дефиниције 3.1 и једначине (7) следи

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi = f(r)\vec{e}_r. \tag{8}$$

Централна сила делује само дуж правца радијус вектора положаја. На основу једначине (8) следи

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \quad / \cdot r,$$
$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0.$$

Израз са леве стране представља извод функције $r^2\dot{\varphi}$. Како је он једнак нули, закључује се да је $r^2\dot{\varphi} = const$. У наставку рада користиће се ознака c за претходно наведену константу:

$$r^2\dot{\varphi} = c. \tag{9}$$

Дефиниција 3.2. ***Секторска брзина*** *је део површине коју радијус вектор положаја пребрише у јединици времена.*

Теорема 3.1. *Секторска брзина је једнака*

$$C = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Доказ. Нека је $S(t)$ површина сектора који радијус вектор $\vec{r}(t)$ пребрише за време t. За време Δt радијус вектор пребрише површину

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t) = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \Delta\vec{r}|,$$
$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|.$$

Када $\Delta t \to 0$, тада

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}| \\ &= \frac{1}{2}|r\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{r}_\varphi)| \\ &= \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}|\vec{e}_z|,\end{aligned}$$

где је $\vec{e}_z$ јединични вектор ортогоналан на раван кретања материјалне тачке чија се секторска брзина одређује.

Како је секторска брзина дефинисана и као $C = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$, следи да је интензитет секторске брзине

$$C = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}.$$

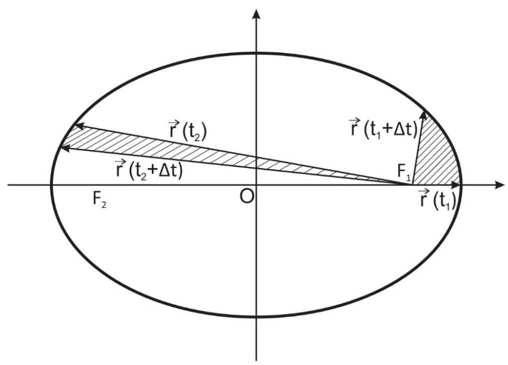
■

На основу једначине (9) је

$$C = \frac{c}{2}, \tag{10}$$

из чега следи да је секторска брзина констнтна, односно да су површине које радијус вектор положаја пребрише за исте временске интервале Δt једнаке.

На слици 3 приказани су сектори, осенчене површине, које радијус вектор положаја $\vec{r}$ преприше за време Δt у случају кретања материјалне тачке по елиптичној путањи.



Слика 3: Сектори које радијус вектор положаја $\vec{r}$ пребрише за време Δt

Овиме је доказан **Други Кеплеров закон**.

Да је секторска брзина констнтна, може се доказати на још један начин.

Момент централне силе у полу координатног система, тачки O, једнак је нули:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times f(r)\vec{e}_r = 0.$$

Када је момент силе једнак нули, **момент импулса** у тачки O је константан:

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = const.$$

Примењујући једначину (6) добија се следеће:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi \\ &= mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z. \end{aligned}$$

Дакле, момент импулса је ортогоналан на раван кретања. Интензитет момента импулса је

$$L_O = |\vec{L}_O| = mr^2\dot{\varphi}. \tag{11}$$

Како је момент импулса константан, следи да је $r^2\dot{\varphi} = const$, тј. да је секторска брзина константна.

Став 3.1. *Централна сила је* ***конзервативна****:*

$$U(r) = -\int f(r)dr,$$

где је $U(r)$ ***потенцијална енергија*** *на растојању* r *од центра деловања силе.*

Интензитет силе на растојању r од пола система изражен преко потенцијалне енергије је

$$f(r) = -\frac{dU(r)}{dr}.$$

Укупна енергија честице масе m у пољу централне силе једнака је збиру кинетичке и потенцијалне енергије

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + U(r),$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r). \tag{12}$$

Заменом $\dot{\varphi}$ у једначини (12) применом једначине (11) добија се

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} + U(r).$$

Дакле, проблем кретања честице у централном пољу се редукује на проучавање кретања система са једним степеном слободе. Тим поводом уводи се нова променљива, а то је **ефективни потенцијал** U_{eff}. Енергија честице може се записати и као

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r), \tag{13}$$

где је ефективни потенцијал U_{eff} једнак

$$U_{eff}(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} + U(r), \tag{14}$$

односно, заменом интензитета момента импулса из једначине (11), а потом применом једачине (9):

$$U_{eff}(r) = \frac{mc^2}{2r^2} + U(r). \tag{15}$$

Решавањем редукованог система налази се $r = r(t)$. Остаје још да се нађе једначина трајекторије, тј. $r = r(\varphi)$, и на крају да се нађе закон кретања по тој трајекторији, тј. $\varphi = \varphi(t)$. Тражење уопштене функцијске зависности угла од времена превазилази оквире овог матурског рада.

Из једначине (13) следи

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}\right)}, \tag{16}$$

однсоно

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}\right)}}. \tag{17}$$

Ако је у почетном тренутку $r_0 = r(t_0)$, онда следећа једначина даје зависност радијалне координате од времена $r = r(t)$:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}}}. \tag{18}$$

Једначина трајекторије честице $\varphi = \varphi(t)$ добија се на следећи начин:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dt}{d\varphi}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\dot{\varphi}}\dot{r} = \frac{r^2}{c}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}\right)},$$

$$\varphi = \int \frac{cdr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}\right)}}. \tag{19}$$

Кретање је могуће уколико је $U_{eff} \leq E$. Тада се трајекторија материјалне тачке налази унутар прстена чији је унутрашњи полупречник r_{min}, а спољашњи r_{max}. Уколико је $E = (U_{eff})_{min}$, материјална тачка се креће по кругу, јер је тада $r_{min} = r_{max} = r$.

Пример 3.1. *Материјална тачка масе m налази се на растојању r_0 од центра силе, чији је потенцијал*

$$U = \frac{kr^3}{3},$$

где је k позитивна константа. Почетна брзина материјалне тачке заклапа угао $\pi/2$ са радијус вектором. Наћи вредност почетне брзине за коју ће се материјална тачка кретати по кругу.

Решење. Као што је малопре речено, материјална тачка се креће по кругу уколико је U_{eff} минимално, односно први извод ефективног потенцијала једнак нули. На основу једначине (14) рачуна се ефективни потенцијал

$$U_{eff}(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} + \frac{kr^3}{3}.$$

Први извод ефективног потенцијала по удаљености од центра деловања силе једнак је нули:

$$U'_{eff}(r) = -\frac{L_O^2}{mr^3} + kr^2 = 0.$$

Одавде следи

$$r = \sqrt[5]{\frac{L_O^2}{mk}}.$$

Пошто се материјална тачка све време креће по кругу, $r = r_0$. Интензитет момента импулса је једнак $L_O = mvr_0$, па одавде следи да је брзина материјалне тачке

$$v = \sqrt{\frac{kr_0^3}{m}},$$

а како је она константна, то је и интензитет почетне брзине

$$v_0 = \sqrt{\frac{kr_0^3}{m}}.$$

■

3.1 Бинеов образац

За проучавање централног кретања материјалне тачке веома је значајан Бинеов образац, чијим решавањем се одређује трајекторија честице у експлицитном облику $r = r(\varphi)$.

Теорема 3.2. *(Бине[2]) Нека је $\rho = \frac{1}{r}$ и $\rho = \rho(\varphi)$ једначина орбите. Тада је*

$$m\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\rho}U_{eff}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Доказ. Из једначине (8) следи

$$f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2),$$

односно

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= f(r) + mr\dot{\varphi}^2 \\ &= -\frac{dU(r)}{dr} + \frac{mc^2}{r^3} \\ &= -\frac{d}{dr}(U(r) + \frac{mc^2}{2r^2}) \\ &= -\frac{d}{dr}U_{eff}(r). \end{aligned} \tag{20}$$

Користећи се условом датим у теореми и једначином (20) добија се Бинеов образац (21):

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{c},$$

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{d\left(-\frac{\dot{r}}{c}\right)}{d\varphi} = -\frac{1}{c}\frac{d\dot{r}}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\ddot{r}}{c}\frac{1}{\dot{\varphi}} = -\frac{\ddot{r}}{c}\frac{r^2}{c} = -\frac{1}{c^2\rho^2}\ddot{r},$$

$$m\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{1}{c^2\rho^2}\frac{d}{dr}U_{eff}(r),$$

$$m\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{1}{c^2\rho^2}\frac{d}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}U_{eff}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{c^2\rho^2}\frac{d}{\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)d\rho}U_{eff}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$m\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\rho}U_{eff}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{21}$$

■

Бинеов образац се може записати у још једном облику, а то је:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{mc^2}\frac{d}{d\left(\frac{1}{r}\right)}U_{eff}(r) \\ &= -\frac{1}{m\dot{\varphi}^2r^4}\frac{d}{\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr}(U(r) + \frac{mc^2}{2r^2}) \\ &= \frac{1}{m\dot{\varphi}^2r^2}\frac{d}{dr}(U(r) + \frac{mc^2}{2r^2}) \\ &= -\frac{1}{m\dot{\varphi}^2r^2}(f(r) + \frac{mr^4\dot{\varphi}^2}{r^3}) \\ &= -\frac{1}{r} - \frac{1}{m\dot{\varphi}^2r^2}f(r), \end{aligned}$$

[2]Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856), француски математичар

односно

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=-\frac{mr^2}{L^2}f(r). \tag{22}$$

Пример 3.2. *Честица масе m креће се у пољу централне силе по логаритамској спирали $r=ke^{\alpha\varphi}$, где су k и α константе. Одредити силу и потенцијал, као и једначину кретања честице у параметарском облику, $r=r(t)$ и $\varphi=\varphi(t)$. У почетном тренутку је $\varphi(t=0)=\varphi_0$. Момент импулса честице је L.*

Решење. Нека је $\rho=\frac{1}{r}=\frac{e^{-\alpha\varphi}}{k}$. Тада је

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=\left(\frac{-\alpha}{k}e^{-\alpha\varphi}\right)'=\frac{\alpha^2}{k}e^{-\alpha\varphi}=\alpha^2\rho,$$

односно

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\alpha^2}{r}.$$

На основу једначине (22) добија се интензитет силе

$$f(r)=-\frac{L^2(1+\alpha^2)}{mr^3}.$$

Потенцијал је тада

$$U(r)=-\int f(r)dr=\int\frac{L^2(1+\alpha^2)}{mr^3}dr=-\frac{L^2(1+\alpha^2)}{2mr^2}.$$

Остаје још одредити $\varphi=\varphi(t)$. Из једначине (11) следи

$$\dot{\varphi}=\frac{L}{mr^2},$$

односно

$$e^{2\alpha\varphi}d\varphi=\frac{L}{mk^2}dt.$$

Интеграљењем претходне једначине добија се

$$\left.\frac{e^{2\alpha\varphi}}{2\alpha}\right|_{\varphi_0}^{\varphi}=\frac{L}{mk^2}t,$$

јер је услов задатка $t_0=0$. Коначно, добија се функција угла у зависности од времена

$$\varphi=\frac{1}{2\alpha}\left(\ln\frac{2\alpha L}{mk^2}t+e^{2\alpha\varphi_0}\right),$$

чиме је задатак решен. ■

3.2 Кеплеров задатак

Кеплеров задатак је налажење једначина кретања материјалне тачке масе m у пољу са потенцијалом

$$U = -\frac{k}{r}.$$

Тада је ефективни потенцијал једнак

$$U_{eff} = -\frac{k}{r} + \frac{mc^2}{2r^2}.$$

Када се овај ефективни потенцијал замени у једначини (19), добија се

$$\varphi = \int \frac{cdr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{k}{r} - \frac{mc^2}{2r^2}\right)}}. \tag{23}$$

Може се увести смена

$$x = \frac{c}{r}, \qquad dx = -\frac{c}{r^2}.$$

Тада се интеграл (23) трансформише у

$$\varphi = -\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{4k^2}{m^2c^2} - \left(x - \frac{2k}{mc}\right)^2}}.$$

Решавањем овог интеграла добија се

$$\varphi = \arccos \frac{x - \frac{2k}{mc}}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{4k^2}{m^2c^2}}} + C.$$

За константу C може се узети вредност нула, тако да одавде следи

$$\cos\varphi \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{4k^2}{m^2c^2}} = \frac{c}{r} - \frac{2k}{mc}.$$

Растојање од центра деловања силе до материјалне тачке масе m и енергије E је

$$r = \frac{\frac{mc^2}{2k}}{1 + \sqrt{1 + \frac{mc^2E}{2k^2}}\cos\varphi}.$$

Претходна једначина може се записати у облику

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{24}$$

где је p **полупараметар** једнак

$$p = \frac{mc^2}{2k}, \tag{25}$$

а e **нумерички ексцентрицитет**

$$e = \sqrt{1 + \frac{mc^2E}{2k^2}}. \tag{26}$$

У зависности од вредности нумеричког ексцентрицитета, једначина (24) може представљати фокалну једначину елипсе, параболе или хиперболе. Нумерички ексцентрицитет је $e < 1$ за $E < 0$ и тада је трајекторија по којој се креће материјална тачка елипса. У случају $e = 1$, $E = 0$, материјална тачка се креће по параболи, а у случају $e > 1$, $E > 0$, креће се по хиперболи.

Сада ће бити доказано да је управо једначина (24) **фокална једначина елипсе** уколико је $e < 1$.

У Декартовом координатном систему једначина елипсе је

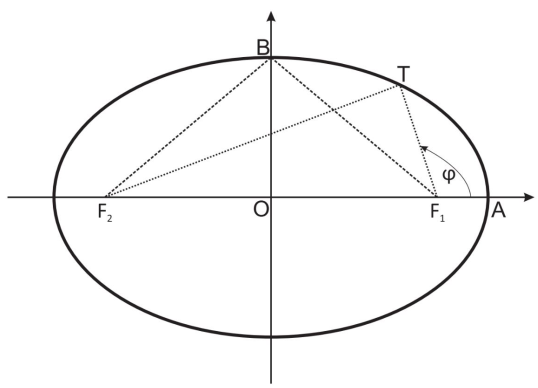
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где је тачка $A(a, 0)$ пресек са x-осом, а тачка $B(0, b)$ пресек са y-осом елипсе чији је центар у координатном почетку (слика 4). Тачке $F_1(f, 0)$ и $F_2(-f, 0)$ су жиже (фокуси) елипсе. Особина елипсе је да је збир растојања сваке тачке на њој од жижа једнак $2a$. На основу Питагорине теореме примењене на троугао $\triangle BOF_1$ важи и:

$$a^2 = f^2 + b^2 \tag{27}$$

Нека је дата тачка T на растојањима r_1 и r_2 од жижа елипсе и нека је угао $\sphericalangle TF_1A = \varphi$. Тада важи

$$r_1 + r_2 = 2a.$$



Слика 4: Елипса

На троугао $\triangle F_1F_2T$ може се применити косинусна теорема.:

$$r_2^2 = (2f)^2 + r_1^2 + 4fr_1 \cos\varphi,$$

$$(2a - r_1)^2 = (2f)^2 + r_1^2 + 4fr_1 \cos\varphi,$$

$$(2a)^2 - 4ar_1 + r_1^2 = (2f)^2 + r_1^2 + 4fr_1 \cos\varphi,$$

$$r_1(a + f\cos\varphi) = a^2 - f^2,$$

$$r_1(1 + \frac{f}{a}\cos\varphi) = \frac{a^2 - f^2}{a},$$

$$r_1 = \frac{\frac{a^2-f^2}{a}}{1 + \frac{f}{a}\cos\varphi}.$$

Претхода једначина може се записати у облику једначине (24)

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{28}$$

где e и p представљају

$$e = \frac{f}{a}, \qquad p = a(1 - e^2). \tag{29}$$

И заиста, како је $f < a$, то је $e < 1$, па према томе и $p > 0$, што је и требало доказати.

Дакле, тачка се у пољу са негативним потенцијалом обрнуто сразмерним растојању од центра деловања силе креће по елиптичној путањи.

Пошто се Први Кеплеров закон односи на кретање планета по елиптичним путањама око Сунца, потребно је доказати да је систем Сунце-планета заиста систем у ком се планета може посматрати као материјална тачка на коју делује централна сила, гравитациона сила.

Нека је маса Сунца m_1, а маса планете m_2. Сила која делује на Сунце је $\vec{F_1}$, а сила која делује на планету је $\vec{F_2}$. Проблем се решава у референтном систему у ком центар масе нема убрзање.
Центар масе дефинисан је као

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{r}_c, \tag{30}$$

односно

$$\vec{r}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2. \tag{31}$$

Убрзање центра масе једнако је нули:

$$\ddot{\vec{r}_c} = 0. \tag{32}$$

Из Другог Њутновог закона следи

$$m_1\ddot{\vec{r}_1} = \vec{F_1}, \tag{33}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}_2} = \vec{F_2}, \tag{34}$$

где су $\ddot{\vec{r}_1}$ и $\ddot{\vec{r}_2}$ редом убрзања Сунца и планете. Нека је $\vec{r}$ дато као

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \tag{35}$$

Силе којима се привлаче Сунце и планета једнаке су

$$\vec{F_1} = \frac{k}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{k}{|\vec{r}|^3}\vec{r}, \tag{36}$$

$$\vec{F_2} = \frac{k}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{k}{|\vec{r}|^3}\vec{r}, \tag{37}$$

где је k константа.
Из једначине (35) следи

$$\begin{aligned} m_1 m_2\ddot{\vec{r}} &= m_1 m_2(\ddot{\vec{r}_1} - \ddot{\vec{r}_2}) \\ &= m_2\vec{F_1} - m_1\vec{F_2} \\ &= -m_2\vec{F_2} - m_1\vec{F_2} \\ &= -(m_1 + m_2)\vec{F_2}, \end{aligned} \tag{38}$$

јер су $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ супротних смерова деловања, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.
Из претходне једначине следи

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = -\vec{F}_2. \tag{39}$$

Дакле, Сунце привлачи планету као тело масе

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{40}$$

Маса m се назива **редукована маса**.

Овиме је доказан **Први Кеплеров закон**.

3.3 Трећи Кеплеров закон

Трећи Кеплеров закон гласи: ***Квадрат периода*** *обиласка по елиптичним орбитама сразмеран је* ***трећем степену велике полуосе елипсе****.*

Нека је T период и S површина елипсе, односно површина коју радијус вектор положаја пребрише за један период. Површина елипсе је

$$S = ab\pi.$$

Из једначина (27) и (29) следи

$$b = \sqrt{ap}.$$

На основу једначине (10) секторска брзина материјалне тачке је

$$C = \frac{c}{2}.$$

Изједначавањем површине коју радијус вектор положаја пребрише за време T и површине елипсе добија се

$$\begin{aligned}\frac{c}{2}T &= ab\pi \\ &= a\sqrt{ap}\pi \\ &= a\sqrt{a}\frac{2c\sqrt{m}}{\sqrt{k}}\pi.\end{aligned}$$

Одавде следи

$$\frac{T}{a\sqrt{a}} = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\pi,$$

односно када се квадрира

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{16m\pi^2}{k} = const. \tag{41}$$

Закључак

Након што је Кеплер извео своје законе посматравши кретање планета око Сунца, показало се да ти закони важе и за системе планета и њихових сателита, односно за све системе у свемиру, с тим што константа из Трећег Кеплеровог закона за сваки систем има другачију вредност због другачије вредности редуковане масе. Ово је дало подлогу Њутну да постави темеље небеске механике, омогућило нагли развој математике и физике, а посебно утицало на стварање једног новог поимања света у коме више није круг тај који доминира у природи, већ елипса.

У овом раду разматрано је уопштено кретање материјалне тачке у пољу централне силе, а онда су посебно изведени закони под условима које је дефинисао Кеплер.

У раду је речено да тражење функцијске зависности угла од времена превазилази оквире овог матурског рада, али овде ће сада бити изложена идеја како то може да се уради.

На основу формула (9) и (24) може се записати

$$\frac{p^2\dot{\varphi}}{(1+e\cos\varphi)^2} = c,$$

односно

$$p^2\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = c(t-t_0).$$

За решавање овог интеграла користи се смена

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}.$$

На крају се добија трансцедентна једначина

$$u - e\sin u = n(t-t_0),$$

где је

$$n = \frac{c}{p^2(1-e^2)^{3/2}}.$$

Решавањем ове једначине добија се тражена зависност $\varphi = \varphi(t)$.

Тиме је кретање материјалне тачке у пољу централне силе потпуно одређено.

На крају желим да се захвалим свом ментору и професору Бориславу Гајићу, који ми је дао идеју да пишем матурски рад на ову тему, помогао у проналажењу литературе, посвећено ишчитавао сваку верзију рада и указивао на грешке, да би рад изгледао овако како сада изгледа.

Литература

[1] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics* (Moscow: Nauka, 1989 [in Russian, 3-rd edition]).

[2] V. I. Arnol'd , V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics/ in Dynamical systems III* (Berlin: Springer-Verlag, 1988).

[3] Воја Радовановић, *Теоријска механика* (Физички факултет, Универзитет у Београду, Београд, 2016).

[4] *www.overleaf.com*

[5] *www.wikipedia.org*