

Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД ИЗ ФИЗИКЕ

**ИСПИТИВАЊЕ ОСОБИНА
СФЕРНИХ И ПЛАНАРНИХ СОЧИВА
НА БАЗИ МЕТАМАТЕРИЈАЛА**

Ученик:
Огњен Трипуновић

Ментори:
Игор Илић и Петра Беличев

Београд, маја 2011.

САДРЖАЈ

1	Увод	2
2	Модел	5
2.1	<i>Планарно сочиво од метаматеријала</i>	6
2.2	<i>Сферно сочиво од метаматеријала</i>	7
3	Резултати и дискусија	8
3.1	<i>Суперсочиво</i>	9
3.2	<i>Сферно сочиво</i>	10
4	Закључак	13
5	<i>Литература</i>	<i>14</i>

1 Увод

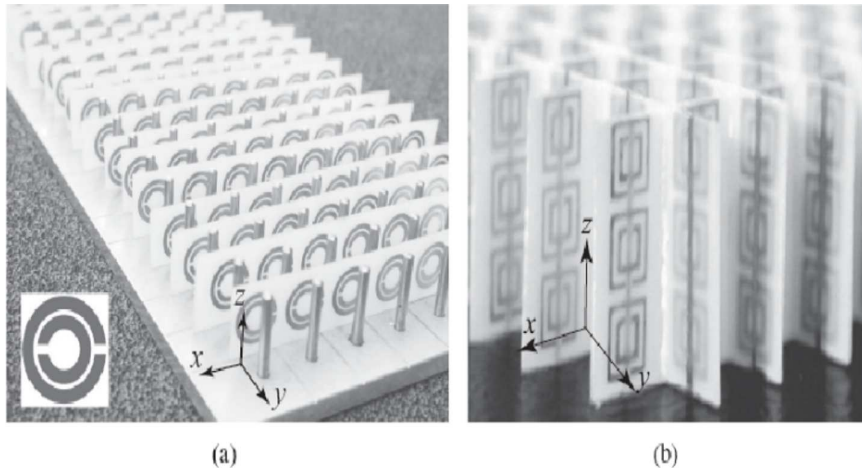
Низ променљивих електричних и магнетних поља, међусобно спрегнутих, који се шире кроз простор тако што индукују једно друго, чине електромагнетски талас (скраћено ЕМ талас)[8]. Када видљива светлост, посматрана са аспекта електромагнетске природе, пролази кроз стакло, атомска структура стакла, при његовом реаговању са светлошћу, губи на важности, због чињенице да таласна дужина видљиве светлости може бити и до неколико стотина пута већа од самих молекула стакла и од размака између њих. Тако, електромагнетске особине провидних (транспарентних) материјала се могу описати преко две адекватне величине: диелектрична пермитивност ε и магнетна пермеабилност μ . Код транспарентних средина које се могу наћи у природи, као што су стакло, кристал итд., ова два параметра (тј. њихови реални делови) су увек позитивне величине.

Метаматеријали представљају релативно нову групу вештачких материјала. За неке метаматеријале, у зависности од фреквенције таласа који се пушта кроз њих, може да важи $\varepsilon, \mu < 0$, што их чини јединственим материјалима, јер ниједна природна средина не испуњава овај услов. Такви метаматеријали се називају леворуки метаматеријали (LHM- left handed metamaterial) [1], зато што при проласку ЕМ таласа кроз њих, за његов вектор магнетног поља и вектор правца кретања, важи тзв. правило „леве руке”.

Историја метаматеријала почиње почетком двадесетог века идејом руског физичара Леонида Исаковича Манделштама о постојању супстанце са истовремено негативним вредностима ε и μ . Променом алгебарског знака тих параметара у четири Максвелове једначине [3], добија се леворука тројка електричног поља \mathbf{E} , магнетног \mathbf{H} и таласног вектора \mathbf{k} [1]. Ваља напоменути и руског физичара Виктора Веселага као особу која је имала највећи утицај на развој Менделштамове идеје на теоријском плану [2].

Крајем двадесетог века осмишљене су структуре базиране на периодичном понављању блокова направљених од два основна елемента: танких металних жица (TW- metal thin wire) и прстенастих резонатора (SRR- metal split ring resonator). Градивни елементи блока, независно једни од других, у неким опсезима фреквенција упадног поља, поседују негативну диелектричну пермитивност (TW), односно магнетну пермеабилност (SRR). Комбинацијом оваква два елемента направљени су леворуки метаматеријали са електромагнетским својствима која се у природи не могу пронаћи (Слика 1), а

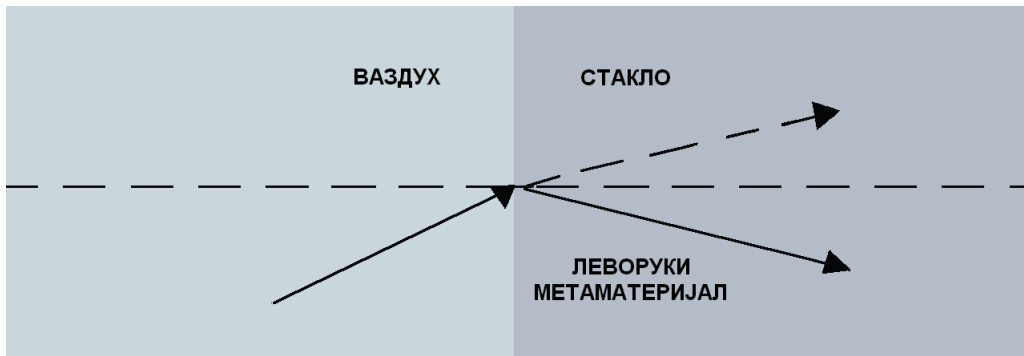
најзаслужнији људи за овакву екперименталну реализацију били су Џон Пендри и Дејвид Смит (David R. Smith, John B. Pendry)[9].



Слика 1: (а) једнодимензионална и (б) дводимензионална структура ЛНМ.

Битна особина метаматеријала јесте да им је просечна димензија јединичне ћелије много мања од таласне дужине упадног зрачења. У крајњем случају, она може износити четвртину вредности таласне дужине упадног зрачења. То је услов који осигурава да при преламању таласа кроз метаматеријал не дође до ефеката расејања и дифракције [1].

Индекс преламања неке средине ($n = n' + in''$, где су n' и n'' реалан и имагинаран део индекса преламања, респективно) зависи од поменутих двеју величина ϵ и μ . Иако се обично сматра да је $n' > 0$, релација $n' < 0$ не крши никакве фундаменталне законе. Материјал са истовремено негативним реалним деловима диелектричне пермитивности ϵ' и магнетне пермеабилности μ' ће увек поседовати негативан ефективни индекс преламања (убудуће само индекс преламања). Главна особина ових материјала је инверзан Снелов закон. Закон преламања је дат изразом $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ при чему су α_1 и α_2 упадни, односно преломљени угао, а n_1 и n_2 индекс преламања средине из које талас долази, односно материјала кроз који се талас прелама. Пошто је индекс преламања ЛН метаматеријала негативан, значи да се кроз такву средину светлост прелама под негативним углом, тј. са исте стране нормале на раздвојну површину као и упадни талас (Слика 2).



Слика 2: Светлост се прелама под „негативним” углом кад пролази кроз леворуки метаматеријал.

Потребно је напоменути да индекс преламања зависи и од фреквенције и да у зависности од упадног угла (Брустеров угао) може доћи до тоталне рефлексije, појаве при којој ниједан део светлости не пролази кроз метаматеријал, већ се сва светлост, са друге стране нормале на раздвојну површину, одбија од њега под истим углом, као од огледала. У овим материјалима примећени су и феномени инверзног Доплеровог ефекта, обрнуте Черенкове радијације итд. [4].

Због мноштва специфичних својстава, метаматеријали би у великој мери могли допринети развоју оптике, медицине и разних научних грана. Наиме, предвиђања указују на то да би се од њих могла произвести тзв. суперсочива која би била планарна за разлику од конвенционалних и давала оштрију слику предмета, значајно смањујући аберацију. Ова појава следи из чињенице да би код оваквих сочива био превазиђен дифракциони лимит, па би се она могла применити и у медицини за нпр. посматрање минијатурних ћелија рака [1]. Суперсочива би се могла користити у циљу повећања капацитета меморије код оптичких дискова и као појачавачи антена [5]. Још једна необична примена метаматеријала јесте прављење плашта за невидљивост. Наиме, направљене су структуре које приморавају ЕМ зрак да заобиђе предмет који се налази унутар њих, па предмет, на тај начин, постаје невидљив за наше око.

Циљ рада је испитивање особина планарних сочива на бази метаматеријала, односно израчунавање услова при којима се ово сочиво може окарактерисати као суперсочиво. Такође су испитивана својства сферног сочива конструисаног од леворуког метаматеријала као и могућност његове употребе као рутера у оптичким (телекомуникационим или рачунарским) системима.

2 Модел

Релативна диелектрична пермитивност и магнетна пермеабилност у метаматеријалима се моделују на различите начине, у складу са особинама периодичне структуре. Најчешће коришћен модел је Лоренцов модел [6]. Према том моделу, релативна диелектрична пермитивност, магнетна пермеабилност и индекс преламања дати су изразима:

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \cdot \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\omega\Gamma_e} \right), \quad (1)$$

$$\mu = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma_m}, \quad (2)$$

$$n = \pm\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}, \quad (3)$$

где су ε_∞ позадинска диелектрична константа, ω фреквенција упадног таласа, ω_p плазма-фреквенција која представља јачину интеракције осцилатора са електричним пољем, ω_r резонантна фреквенција електричног дипола, F јачина интеракције електричног и магнетног поља, ω_0 резонантна фреквенција магнетног дипола, а Γ_e и Γ_m фактори пригушења у електричном и магнетном пољу, респективно. Уколико је задовољен услов $(\varepsilon' < 0 \wedge \mu' < 0) \vee (\varepsilon' \cdot \mu'' + \varepsilon'' \cdot \mu' < 0)$ вредност индекса преламања у једначини (3) ће бити негативна. У осталим случајевима индекс преламања је позитиван.

Апсорпција представља слабљење светлости при проласку кроз неку средину и њена вредност се креће у опсегу од 0 до 1. Апсорпција ЕМ таласа кроз метаматеријал је дата следећим изразом [7]:

$$A = \frac{1}{\gamma_0 |E_0|^2} \int_0^L \left[\mathbf{Im}(\gamma_b^2) |E_y(x)|^2 - \mathbf{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E' E_y^* \right) \right] dx,$$

где је E_0 амплитуда упадног електричног поља, E_y^* конјуговано комплексна вредност y -компоненте електричног поља у суперсочиву, $\gamma_0 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s \mu_s - \beta^2}$, где је k_0 таласни број у вакууму, β константа пропагације таласа, а ε_s и μ_s пермитивност и пермеабилност околне средине, респективно. Поље унутар метаматеријала на позицији x , означено је са $E_y(x)$ док су остале релевантне величине дате изразима $\mu' = \frac{d\mu}{dx}$, $E'_y = \frac{dE_y}{dx}$, $\gamma_b = \sqrt{\varepsilon_s \cdot \mu_s + \varepsilon \cdot \mu \cdot \sin^2 \alpha}$, при чему је α упадни угао таласа на површину упадног сочива.

При сваком преласку зрака светлости у нову средину, један њен део се рефлектује, док се остатак трансмитује. Процент свет-

лости који се трансмићује дат је следећом релацијом:

$$T = 1 - \left(\frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)} \right)^2,$$

где α и β представљају упадни тј. преломљени угао, респективно. Део светлости који прође кроз метаматеријал је дат следећом формулом:

$$T_{uk} = T_1 \cdot T_2 \cdot (1 - A),$$

где су T_1 и T_2 коефицијенти трансмисије при уласку, односно изласку из метаматеријала.

2.1 Планарно сочиво од метаматеријала

Нека је дато планарно сочиво дебљине d и нека се тачкасти извор светлости налази на растојању p од сочива (Слика 3). Фреквенција светлости је таква да задовољава услов $n' < 0$. Нека је θ_s угао под којим неки зрак упада на сочиво. Ако је n_s индекс преламања средине, према Снеловом закону, угао преламања дат је следећим изразом:

$$\theta = \arcsin \left(\frac{\sin \theta_s \cdot n_s}{|n|} \right).$$

Оптичка (главна) оса садржи извор светлости и нормална је на сочиво. С друге стране сочива, зрак сече главну осу у тачки L . Како је $AB = PB \cdot \operatorname{tg} \theta_s$ и $AB = BC \cdot \operatorname{tg} \theta$, изједначавањем добијамо:

$$BC = BE - CE = PB \frac{\operatorname{tg} \theta_s}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (4)$$

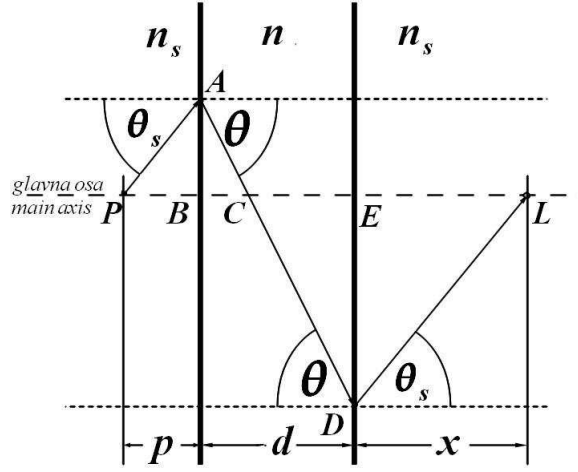
Аналогно се добија да важи:

$$CE = EL \frac{\operatorname{tg} \theta_s}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (5)$$

Имајући у виду да је $PB = p$, $BE = d$ и $EL = x$, из једначина (4) и (5) следи:

$$x = d \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta_s} - p. \quad (6)$$

У случају када је $x < 0$, пресечна тачка L је имагинарна и налази се са друге стране праве DE .



Слика 3: Планарно сочиво направљено од метаматеријала.

2.2 Сферно сочиво од метаматеријала

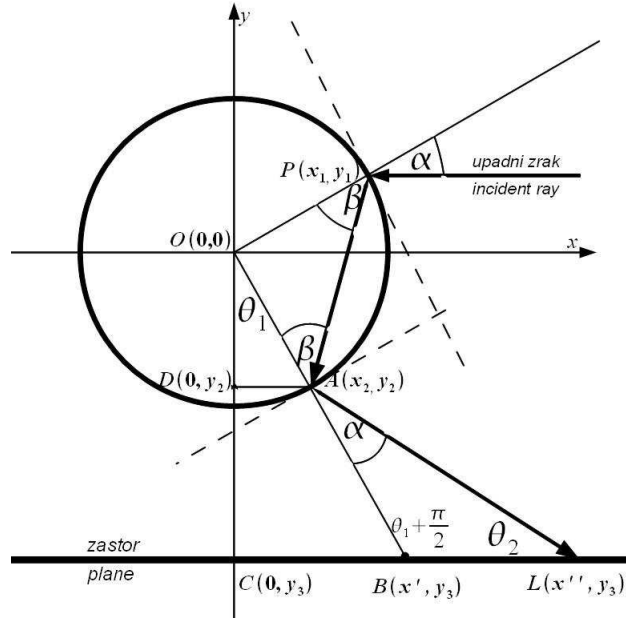
Посматра се 2-D модел хомогене сфере полупречника R_s направљене од метаматеријала у (x, y) координатном систему (Слика 4). Уколико, паралелно x -оси, кроз сферно сочиво пустимо светлосни зрак чија фреквенција задовољава услов $n' < 0$ он ће се два пута преломити, као што је приказано на Сlici 4. Ради детекције, са друге стране x -осе можемо поставити застор на коме ће овај зрак падати у тачку $L(x'', y_3)$. Уколико са $P(x_1, y_1)$ означимо тачку у којој зрак пада на површину сферичног сочива, положај координате x'' тачке L може се израчунати на начин описан у следећем пасусу.

Ради једноставности рецимо да је $x'' > 0$. Нека је (x, y) комплексна равна. Тачка A се добија ротацијом тачке P око центра сочива за угао $2\beta + \pi$. Отуда важи:

$$(x_1 + iy_1)e^{i(2\beta + \pi)} = x_2 + iy_2. \quad (7)$$

Ако је $\gamma = 2\beta + \pi$, реални и комплексни делови леве стране једначине (7) дати су изразима $x_2 = x_1 \cos \gamma - y_1 \sin \gamma$ и $y_2 = y_1 \cos \gamma + x_1 \sin \gamma$, респективно. Из сличности троуглова $\triangle DAO$ и $\triangle CBO$ следи да је $x' = x_2 \frac{y_3}{y_2}$. На сличан начин се добија да је $|AB| = R_s \frac{y_3 - y_2}{y_2}$. Такође важи да је $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x_2}{R_s}$, па је угао код тачке L једнак $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \alpha$. Примењујући синусну теорему на троугао $\triangle BLA$ добија се да је $|BL| = |AB| \frac{\sin \alpha}{\sin \theta_2}$. Сабирањем дужи CB и BL добијена је тражена координата тј. $x'' = x' + |BL|$. Уколико светлост падне на леву страну застора у некој тачки, сличним поступком је могуће одредити њене координате. Координата y_3 је одређена положајем застора.

Потребно је напоменути да, за разлику од планарних, у пракси до сада нису конструисане сферичне структуре на бази метаматеријала, тако да је, нажалост, сферни појам метаматеријала још увек у доменима теорије.

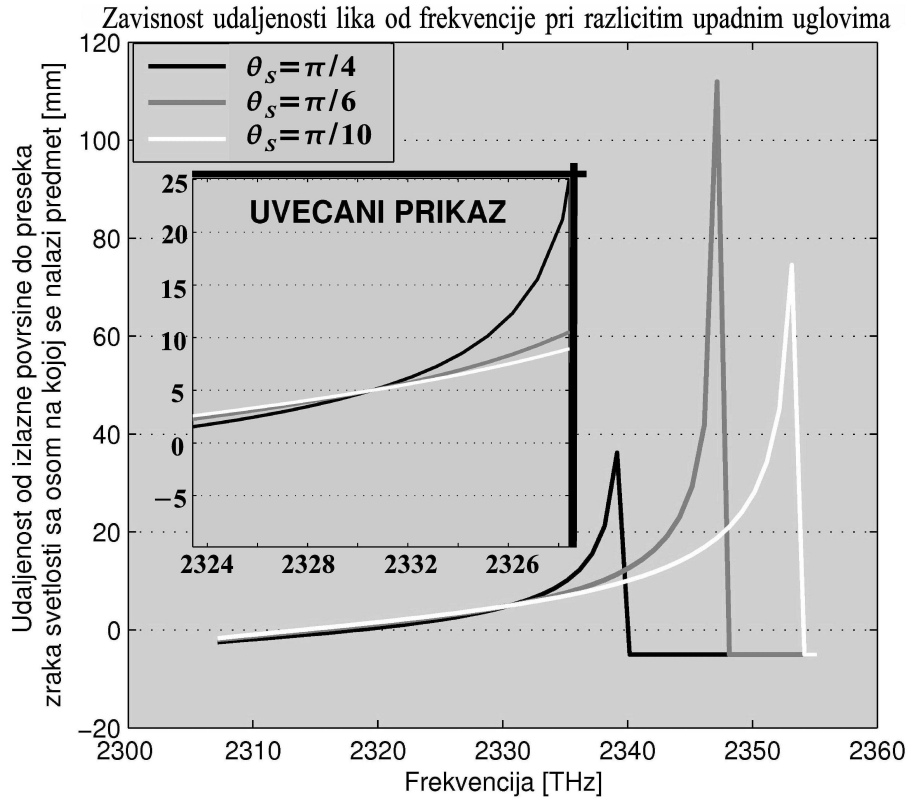


Слика 4: 2-D модел сферног сочива направљеног од метаматеријала.

3 Резултати и дискусија

При проучавању модела метаматеријала потребно је изабрати особине истог које су окарактерисане параметрима из једначина (1) и (2). У овом раду коришћени су параметри из рада [7]. За тако одабране параметре, опсег таласних дужина у ком је индекс преламања негативан креће се између 799nm и 818nm. Вредности параметара су: $\omega_p = 2700\text{THz}$, $\omega_r = 0$, $\omega_0 = 2300\text{Hz}$, $F = 0.052$, $\varepsilon_\infty = 3.1$, $\Gamma_e = 35\text{THz}$, $\Gamma_m = 35\text{THz}$ и $R_s = 50\text{nm}$.

У одабраном моделу занемарени су фактори пригушења. Дебљина сочива износи $d = 1\text{cm}$, а удаљеност тачкастог извора је $p = 0.5\text{cm}$. За коефицијент индекса преламања средине узимано је $n_s = 1$.



Слика 5: Удаљеност пресечне тачке L од сочива у зависности од фреквенција упадног зрачења за различите упадне углове.

3.1 Суперсочиво

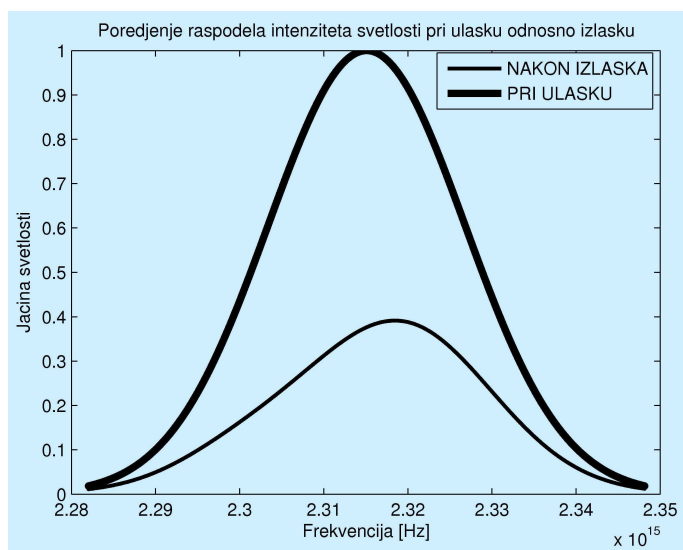
На Слици 5 приказано је мерено растојање пресечне тачке L од површине сочива у зависности од фреквенције (једначина (6)). Прорачун је рађен за више различитих упадних углова. Пикови на Слици 5 представљају фреквенције при којима долази до тоталне рефлексије зрака, тако да при већим фреквенцијама од тих, зраци не секу главну осу. Одатле видимо да се опсег дозвољених фреквенција смањује са повећањем упадног угла (поредиши по угловима са Слике 5, видимо да је за $\theta_s = \frac{\pi}{4}$ опсег је најмањи, а за $\theta_s = \frac{\pi}{10}$ највећи). Тачка пресека за коју важи да је $x = d - p = 5\text{mm}$ одговара случају када је $n_s = -n$ (увећани део на Слици 5), што значи да је ово потребан и довољан услов да овакво сочиво испољава особине суперсочива. На увећаном делу Слике 5 можемо очитати фреквенцију при којој је дати услов задовољен. Са Слике 5 се види да су, за мање фреквенције упадне светлости, нека растојања негативна, што значи да је у сваком од тих случајева пресек

зрака са главном осом имагинаран. Овај проблем се превазилази смањењем удаљености тачкастог извора p од суперсочива, тако да сваки зрак сече главну осу и унутар сочива.

3.2 Сферно сочиво

Код сферне геометрије вршени су прорачуни за два случаја (Слика 4): први, када је упадни зрак занемарљиво мале ширине, и други, када је лансиран ласерски тј. гаусовски импулс.

У првом случају зрак носи таласе различитих фреквенција светлости чија је јачина одређена Гаусовом расподелом по фреквенцијама. На Слици 6 дат је упоредни приказ расподела јачина светлосног зрака при уласку у сочиво и при њеном изласку. Упадни угао је износио 0.4 радијана.



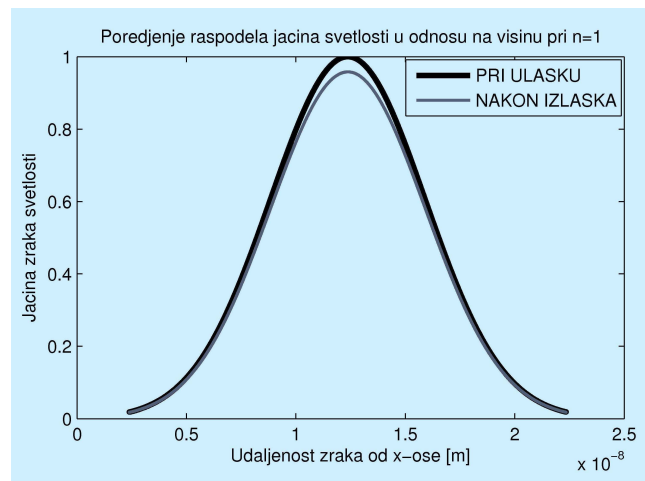
Слика 6: Поређење расподела заступљености фреквенција зрака светлости при уласку односно изласку из сферног сочива (за упадни угао од 0.4 rad).

Са Сликe 6 се види да се максимум јачине таласа при уласку разликује од максимума јачине таласа при изласку, и да је фреквенција другог мало виша. Расподела се деформисала, јер су се,

при преламању упадног зрака, због различитих индекса преламања, таласи различитих фреквенција преламали под различитим угловима и на тај начин прелазили различите путеве при проласку кроз сферу. Ова појава има за последицу различитост у коефицијенту трансмисије сваког од таласа којег носи упадни зрак. Велика варијабилност индекса преламања метаматеријала узрокује распршивање оваквог зрака при преламању кроз исти.

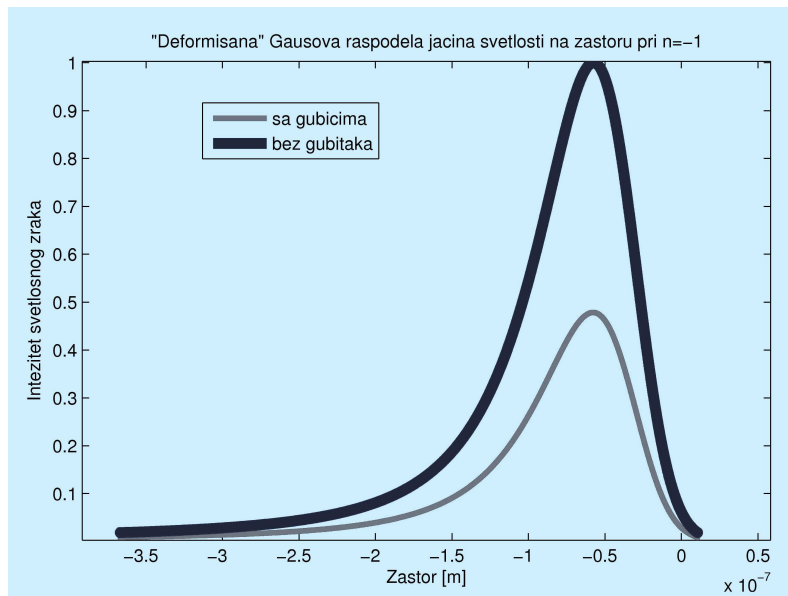
Види се да су губици релативно велики (око 50%). За различите упадне углове добијани су релативно слични графици, с тим што је при упадним угловима већим од 0.5 радијана дозвољени опсег фреквенција веома узак, тј. долази до потпуне рефлексije неких таласа у посматраном опсегу. Поредџи губитке, установљено је да су они увек максимални за талас фреквенције $\omega_{GUB} \approx 2345\text{THz}$, независно од упадног угла. Утврђено је да је за ту фреквенцију индекс преламања најмањи и да износи око -1.3. Фреквенције за које су губици минимални зависе од упадног угла и крећу се до 40%.

У другом случају посматран је ласерски импулс чија је ширина реда величине полупречника сфере. Јачина импулса је дата просторном Гаусовом расподелом (по ширини импулса) за одређену фреквенцију светлости. Ако се одабере фреквенција ω_1 таква да индекс преламања метаматеријала износи 1, тада при проласку зрака кроз сферу не долази до рефлексije; коефицијенти обе трансмисије једнаки су јединици, па су тада губици најмањи. На Слици 7 се види да су губици сведени на минимум и износе око 3%.



Слика 7: Поређење расподела јачина светлости при уласку односно изласку из сферног сочива у односу на висину, за $n = 1$.

Следећи пример посматра застор постављен као на Слици 4, тако да је $y_3 = -2R_S$. Ако је фреквенција ω_2 ласерског зрака таква да је индекс преламања негативан, зрак ће падати на застор. Фреквенција ω_2 је одабрана тако да је $n' = -1$. На Слици 8 се јасно види како се гаусијан на застору при овој фреквенцији ласерског импулса спустио због губитака и деформисао. До деформације је дошло јер су се зраци светлости који су на уласку били ближи x -оси, преламали под релативно малим углом и прешли највећи пут до застора. Услед тога се деформација гаусијана на изласку може смањити подизањем доњег дела ласерског импулса, јер би на тај начин све компоненте снопа падале ближе y -оси и добијени гаусијан би био ужи. Губици су приближно износили 52%. Ради провере прорачунат је и случај за фреквенцију ω_{GUB} , када су се добили највећи губици који су износили 65%. Али упркос томе, то је „сигурна” фреквенција, јер је гранични упадни (Брустеров) угао при коме долази до тоталне рефлексије највећи.



Слика 8: Расподела интензитета светлости на застору са губицима, односно без њих при $n = -1$.

Уколико би се поставио још један застор вертикално у II квадрант, избором фреквенције упадног зрака (ω_1 или ω_2), могуће би било диктирати правац простирања светлости кроз овакво сферно сочиво. Наиме, за прву фреквенцију светлост би скренула лево, док би за другу наставила простирање у истом смеру завршивши на овом застору. На овај начин, могуће је реализовати оптички

рутер који би избором фреквенције усмеравао зрак у жељеном правцу.

4 Закључак

Индекс преламања метаматеријала је због своје природе веома променљив у зависности од карактеристика ЕМ зрака који се пушта кроз њега. Доказано је да, у опсезима фреквенција које су коришћене, а у складу са датим параметрима, суперсочиво може постојати искључиво ако је његов коефицијент индекса преламања једнак негативном коефицијенту индекса преламања средине. Примећено је да до највећих губитака, при проласку ЕМ таласа кроз сферно сочиво направљено од метаматеријала, долази када је индекс преламања најмањи који је могуће постићи. Интересантно је и то да на губитке готово не утиче упадни угао зрака.

Пројекат би се могао побољшати и када би се у обзир узело да у реалном случају ласерски импулс није одређен само једном, главном фреквенцијом. Наиме, ласерски импулс садржи низ таласа чије су фреквенције блиске главној фреквенцији зрачења ласера. Њихова заступљеност је дата Гаусовом расподелом. На тај начин би на застор у једну тачку стизали зраци више фреквенција који би морали да се слажу и по фазама. Ипак, описана анализа излази из оквира рада.

Конструкција сферних сочива би могла да допринесе развоју нове генерације рутера, уређаја који би, у зависности од фреквенције сигнала који шаљемо, омогућили скретање сигнала у жељеном смеру.

5 Литература

- [1] *C. Caloz and T. Itoh, Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications, John Wiley & Sons, (2006)*
- [2] *V.G. Veselago, The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ , Sov. Phys. Usp. 10, 509-514 (1968)*
- [3] *K.Kawano and T.Kitoh, Introduction to optical waveguide analysis (solving Maxwell's equations and the Schrödinger equation), John Wiley & Sons (2001)*
- [4] *P.W.Milloni, Fast Light, Slow Light and Left-Handed Light, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (2005)*
- [5] *A. Patel, The Key to the Secret garden I, Science, Issue 1, 16-17 (2005)*
- [6] *R. Ruppin, Electromagnetic energy density in a dispersive and absorptive material, Phys. Lett. 299, 309-312 (2002)*
- [7] *I.Ilic, P.P.Belicev, V. Milanovic and J. Radovanovic, Analysis of tunneling times in absorptive and dispersive media, J. Opt. Soc. Am. B, 25, 11, 1800-1804 (2008)*
- [8] *Н.Каделбург, В.Рананић, ФИЗИКА 3 за трећи разред Математичке гимназије, стр. 196, „КРУГ” Београд (2008)*
- [9] *D.R.Smith, Metamaterials and Negative Refractive Index, et al. Science 305, 788 (2004)*