Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из анализе са алгебром -

Функције комплексне променљиве

Ученик
Предраг Пилиповић 4а

Ментор
Милица Мисојчић

Београд, јун 2016.

Садржај

1 Увод

Комплексна анализа је једна од најлепших, као и најпримењивијих грана математике.

– Марej Р. Спигел

Комплексна анализа, позната као и теорија функције комплексне променљиве, свакако је занимљива и врло корисна сфера математике. Највиша достигнућа из ове области датирају из 19. века. Неки од познатих математичара који су се бавили овом делатношћу и постигли значајне резулате су Ојлер[1], Гаус[2], Риман[3] и Коши[4]. Комплексна анализа је врло примењива како у разним областима математике, тако и у сферама осталих природних наука, на пример у: аналитичкој геометрији, теорији бројева, аналитичкој комбинаторици, примењеној математици, као и хидродинамици и термодинамици. Што се тиче инжењерства комплексна анализа се користи и у нуклеарном, ваздушном, механичком и електротехничком инжењерству.

Идеја овог матурског рада јесте у упознавању са основним појмовима који се користе у комплексној анализе. Дефинисање граничне вредности и непрекидности функције комплексне променљиве, као првог извода и аналитичке функције

[1]Леонард Ојлер (1707−1783), швајцарски математичар
[2]Карл Фридрих Гаус (1777−1855), немачки математичар
[3]Бернхард Риман (1826−1866), немачки математичар
[4]Огистен Луј Коши (1789−1857), француски математичар

2 Функције комплексне промењиве

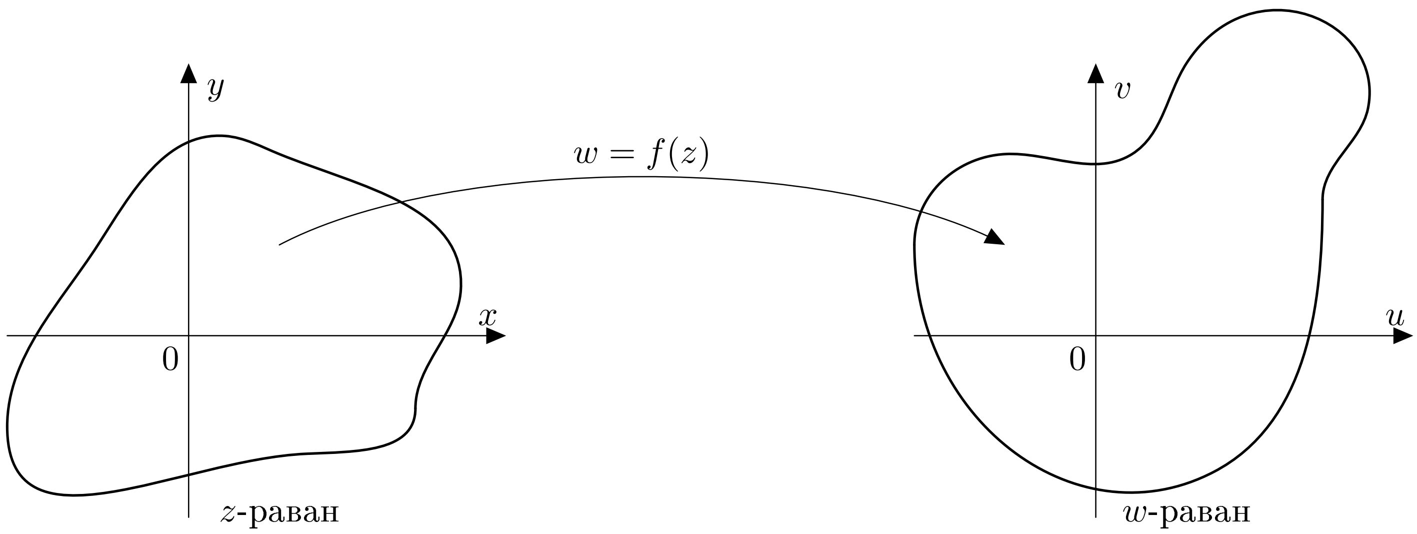
У досадашњем школовању научили смо шта је реална функција једне реалне промењиве, шта је њен график, на ком интервалу је област дефинисаности и још неке особине такве функције. Такође смо се упознали са појмом комплексног броја и комплексном функцијом реалне промењиве, односно, функцијом облика $f : D \to \mathbb{C}$, где је $D \subset \mathbb{R}$. Сада ћемо се упознати са комплексном функцијом комплексне промењиве.

2.1 Основна својства функције комплексне промењиве

Дефиниција 2.1. Ако је $D \subset \mathbb{C}$, пресликавање $f : D \to \mathbb{C}$ називамо **функцијом комплексне промењиве**. Пресликавање f промењивој $z \in \mathbb{Z}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ придружује вредност $w = f(z) \in \mathbb{C}$. Функцију још пишемо:

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z).$$

Видимо да комплексна функција комплексне промењиве зависи од две реалне промењиве x и y и можемо је записати као $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, где су функције u и v реалне функције са две реалне промењиве и једнаке су, редом, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$.

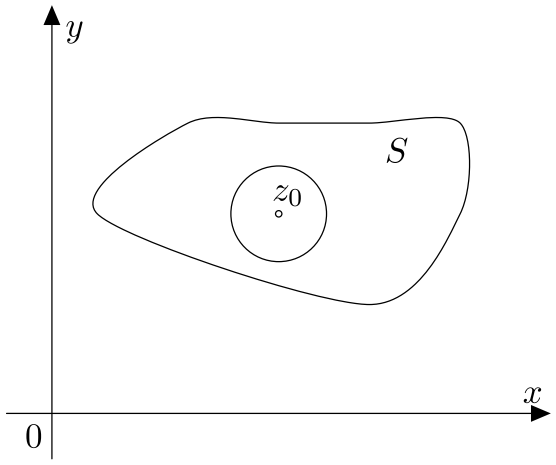


Слика 1: Функција комплексне промењиве

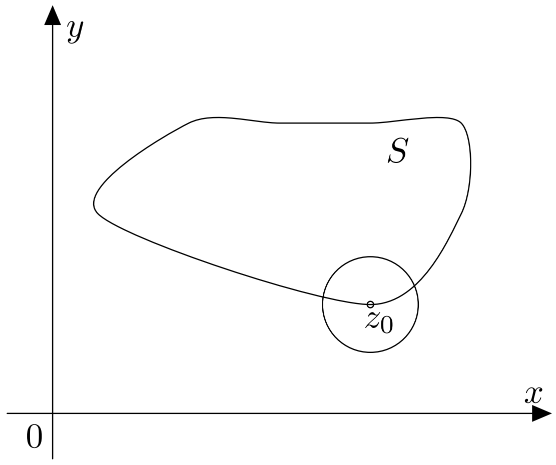
Дефиниција 2.2. Под **околином тачке** z_0 у комплексној равни подразумева се скуп свих тачака z у овој равни, у ознаци $U_\varepsilon(z_0)$, за које важи $|z - z_0| < \varepsilon$. Дата позитивна константа ε назива се **полупречником околине**.

Дефиниција 2.3. Тачка z_0 је **унутрашња тачка** скупа $S \subset \mathbb{C}$ ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $U_\varepsilon(z_0) \subset S$.

Дефиниција 2.4. Тачка z_0 је **гранична тачка** скупа $S \subset \mathbb{C}$ ако у свакој $\varepsilon-$околини тачке z_0 постоје тачке које припадају S, а такође и тачке које не припадају S.



Слика 2: Унутрашња тачка



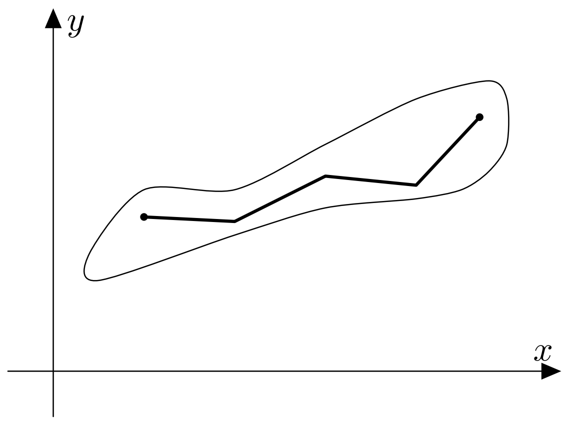
Слика 3: Гранична тачка

Дефиниција 2.5. Скуп свих граничних тачака скупа S образује **границу** скупа S.

Дефиниција 2.6. **Отворен скуп** је скуп чија је свака тачка унутрашња. **Затворен скуп** је скуп који садржи своју границу.

Напомена. Приметимо да је скуп затворен само када садржи своју границу, честа грешка је разумети затворен скуп као неотворен, док скуп лако може бити ни затворен ни отворен.

Дефиниција 2.7. **Повезан скуп** је скуп чије се сваке две тачке могу повезати полигоналном линијом која припада том скупу.



Слика 4: Повезан скуп

Дефиниција 2.8. **Област** је отворен и повезан скуп.

Главна разлика између реалне и комплексне анализе јесте у томе што је геометрија равни функције комплексне променљиве много више богатија од реалне осе. На пример, повезан подскуп скупа реалних бројева је интервал, док у комплексној анализи постоје много компликованији повезаних подскупова комплексних бројева.

Пример 1. За следеће скупове одредити граничне тачке и испитати да ли су отворени, затворени, или ни отворен, ни затворен.

(а) $S_1 = \{z|\ |z-3| < 4\}$; **(б)** $S_2 = \{z|\ |z+1| \leq 2\}$; **(в)** $S_3 = \{z|\ |z| < 3 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$.

Решење. Нека је G_i скуп граничних тачака, $i = 1, 2, 3$.

(а) $G_1 = \{z|\ |z-3| = 4\}$, S_1-отворен;

(б) $G_2 = \{z|\ |z+1| = 2\}$, S_2-затворен;

(в) $G_3 = \{z|\ (|z| = 3 \wedge \operatorname{Im} z > 0) \vee \operatorname{Im} z = 0\}$, S_3 није ни отворен ни затворен, јер садржи граничну вредност на једном делу скупа, а на другом не.

2.2 Елементарне функције комплексне променљиве

Сада ћемо се упознати са најчешће коришћеним функцијама комплексне променљиве и њиховим особинама. Те функције називамо још и **елементарним функцијама**. Пре тога дефинисаћемо два нова појма, вишезначну функцију и грану вишезначне функције:

Дефиниција 2.9. Функција $f(z)$ која има више слика w, за један оригинал z није права функција и назива се **вишезначна** или **мултиформна** функција. За вишезначне функције кажемо да су представљене скупом правих (једнозначних) функција које називамо **гранама** функције за сваки појединачни случај вредности променљиве z. Посебно истакнута грана функције зове се **главна грана** или **главна вредност** функције.

2.2.1 Потенцијална функција

$$f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Линеарна комбинација степена $1, z^2, z^3, ..., z^n$ назива се **комплексни полином**.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Функција облика $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, за комплексне полиноме P и Q, назива се **рационална функција**.

2.2.2 Корен

$$f(z) = w,\ w^n = z,\ n \in \mathbb{N}.$$

Корен је инверзна функција потенцијалне функције, такође је и вишезначна функција са n грана.

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

2.2.3 Експоненцијална функција

$$f(z) = e^z,$$
$$e^z \overset{\text{деф}}{=} \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Теорема 2.1. Функција $f(z) = e^z$ има следеће особине:

1. $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$;
2. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (Ојлерова формула);
3. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
4. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$;
5. $e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$;
6. За $z = x,\ x \in \mathbb{R}$ дата дефиниција поклапа се са дефиницијом експоненцијалне фунције у реалним бројевима;
7. Функција $f(z) = e^z$ је просто периодична са основним периодом $2\pi i$.

Доказ. Доказаћемо само прву особину, остале особине се могу доказати као последица прве:

За граничну вредност низа $z_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ можемо одредити модул и аргумент:

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = \lim_{n\to+\infty} \left|\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$
$$= \exp\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2xn+x^2+y^2}{n^2}\right)\right).$$

Како $\frac{2xn+x^2+y^2}{n^2} \to 0$ када $n \to +\infty$ можемо применити Маклоренов[1] развој за природни логаритам:

$$\exp\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2xn+x^2+y^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\cdot\frac{2xn+x^2+y^2}{n^2}\right)$$
$$= \exp\left(\lim_{n\to+\infty} \left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right)\right) = e^x,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \arg z_n = \lim_{n\to+\infty} n\cdot \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}. \tag{2.1}$$

Како је аркус тангенс непрекидан на свом домену, важи да је

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = \operatorname{arctg}\ 0 = 0,$$

па можемо применити Лопиталово[2] правило:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\ \frac{y}{n+x}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{-y}{x^2+2xn+n^2+y^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{y}{1+\frac{x^2+2xn+y^2}{n^2}} = y. \tag{2.2}$$

Из једначина 2.1 и 2.2 имамо следећи идентитет:

$$e^z = \lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} |z_n|(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z)) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

□

2.2.4 Логаритамска функција

$$f(z) = w = \operatorname{Ln} z,\ e^w = z.$$

Инверзна функција експоненцијалне функције. Нека је $w = u+iv$ и $z = |z|e^{i\varphi}$. Тада важе следеће једнакости:

$$e^w = z \iff e^u e^{iv} = |z|e^{i\varphi} \iff e^u = |z| \ \wedge\ e^{iv} = e^{i\varphi} \iff u = \ln|z| \ \wedge\ v = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Одакле следи да је логаритам једнак:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Као и код корена добили смо вишезначну функцију са бесконачно много грана. Функција облика $w_k = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, је грана вишезначне функције. Ако је φ главна вредност аргумента, тј. $\varphi = \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$ и $k = 0$, тако добијена функција $\operatorname{Ln}\ z = \ln|z| + i\arg z$, назива се главна грана или **главни логаритам**.

[1]Колин Маклорен (1698−1746), шкотски математичар
[2]Гијом де Лопитал (1661−1704), француски математичар

Теорема 2.2. Логаритам негативног реалног броја је комплексан број.

Доказ. Ако посматрамо логаритам комплексне променљиве $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$ и $z = -x$, где је x позитиван реалан број (тада је $\varphi = \pi$), имамо следећу једнакост:
$\mathrm{Ln}(-x) = \ln x + i(2k+1)\pi$. Како је $2k+1 \neq 0$ за свако $k \in \mathbb{Z}$, јасно је да је логаритам негативног броја комплексан број. □

2.2.5 Тригонометријске функције

$$\sin z,\ \cos z,\ \mathrm{tg}\, z,\ \mathrm{ctg}\, z;$$

$$\sin z \overset{\text{деф}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z \overset{\text{деф}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \mathrm{tg}\, z \overset{\text{деф}}{=} \frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctg}\, z \overset{\text{деф}}{=} \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Теорема 2.3. Тригонометријске функције комплексне променљиве имају следеће особине:

1. Основни период функција $\sin z$ и $\cos z$ је 2π, а функција $\mathrm{tg}\, z$ и $\mathrm{ctg}\, z$ је π;
2. Важе адиционе формуле:
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$
3. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;
4. Синусна функција је непарна, а косинусна је парна.

Доказ. Прве две особине су последице особина експоненцијалних функција. Прва особина се лако доказује преко шесте особине експоненцијалне фукнције. Адиционе формуле су директна последица друге особине експоненцијалне функције. Трећа и четрвта се изводе из адиционих формула.

□

2.2.6 Инверзне тригонометријске функције

$$\mathrm{Arcsin}\, z,\ \mathrm{Arccos}\, z,\ \mathrm{Arctg}\, z,\ \mathrm{Arcctg}\, z.$$

Изведимо формулу за $\mathrm{Arcsin}\, z$:

$$z = \sin w \iff \mathrm{Arcsin}\, z = w;$$

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \iff 2iz = e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}} \iff (e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Из добијене квадратне једначине имамо следећа решења $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1-z^2}$, одакле је даље

$$iw = \mathrm{Ln}\, \left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) \iff w = \frac{\mathrm{Ln}\, \left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right)}{i} \iff w = -i\,\mathrm{Ln}\, \left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right).$$

Аналогно за све инверзне тригонометријске функције добијамо следеће вредности:

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\, \left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right);$$
$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\, \left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right);$$
$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\, \frac{1+iz}{1-iz};$$
$$\mathrm{Arcctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\, \frac{z+i}{z-i}.$$

2.2.7 Општа потенцијална функција

$$f(z) = z^{\lambda},\ \lambda = \alpha + i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
$$z^{\lambda} = e^{\mathrm{Ln}\, z^{\lambda}} = e^{\lambda\, \mathrm{Ln}\, z} = e^{(\alpha+i\beta)(\ln|z|+i(\varphi+2k\pi))},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Општа потенцијална функција је вишезначна и има бесконачно много грана, главна грана се добија за $k = 0$ и $\varphi = \arg z,\ \varphi \in (-\pi, \pi)$, назива се главна вредност потенцијалне функције и једнака је $e^{(\alpha+i\beta)(\ln|z|+i\arg z)}$.

2.2.8 Општа експоненцијална функција

$$f(z) = a^z,\ a \in \mathbb{C}.$$

Врло слично као и општа потенцијална и ова функција је вишезначна и има бесконачно много грана.

$$a^z = e^{\mathrm{Ln}\, a} = e^{z\, \mathrm{Ln}\, a} = e^{z(\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Главна грана опште експоненцијалне функције једнака је $e^{z(\ln|a|+i\arg a)}$.

Дефиниција 2.10.
1° Све до сада поменуте функције су елементарне.
2° Ако су f и g елементарне функције онда су и $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g и $f \circ g$ елементарне функције (под условом да су дефинисане).
3° Све елементарне функције се добијају коначном применом претходна два правила.

Пример 2. Представити следеће вредности у алгебарском или тригонометријском облику:

(а) e^{i-1}; **(б)** $\sin(i+1)$; **(в)** i^i; **(г)** $1^{\sqrt{2}}$.

Решење.

(а) $e^{i-1} = \dfrac{e^i}{e^1} = \dfrac{\cos 1 + i\sin 1}{e}.$

(б) $$\sin(i+1) = \frac{e^{i(i+1)} - e^{-i(i+1)}}{2} = \frac{e^{i-1} - \dfrac{1}{e^{i-1}}}{2} = \frac{e^{2i-2} - 1}{2e^{i-1}} = \frac{\dfrac{\cos 2 + i\sin 2}{e^2} - 1}{2\dfrac{\cos 1 + i\sin 1}{e}} = \frac{\cos 2 + i\sin 2 - e^2}{2e(\cos 1 + i\sin 1)}$$
$$= \frac{(\cos 2 + i\sin 2 - e^2)(\cos 1 - i\sin 1)}{2e(\cos 1 + i\sin 1)(\cos 1 - i\sin 1)} = \frac{\cos 1 - e^2\cos 1 + i(\sin 1 + e^2\sin 1)}{2e\cos 2}.$$

(в) $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\ i} = e^{i(\ln|i|+i(\arg i+2k\pi))} = e^{i(\frac{i\pi}{2}+i2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}.$

(г) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\ 1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1|+i(\arg 1+2k\pi))} = e^{2i\sqrt{2}k\pi} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$

3 Непрекидност и гранична вредност

3.1 Непрекидност

Дефиниција 3.1. Нека је $f : D \to \mathbb{C}$ комплексна функција комплексне промењиве и z_0 тачка њеног домена. За функцију f кажемо да је **непрекидна у тачки** z_0 ако за савки комплексан број $\varepsilon > 0$ постоји комплексан број $\delta > 0$, такав да је $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, за све оне $z \in D$ за које је $|z - z_0| < \delta$. Ако у некој тачки z_0 свог домена функција f није непрекидна, кажемо да у тој тачки она има **прекид**. Математички записано:

$f : D \to \mathbb{C}$ је непрекидна у тачки $z_0 \in D$
$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D)(|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)$,

или:

$f : D \to \mathbb{C}$ је непрекидна у тачки $z_0 \in D$
$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D)(z \in U_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in U_\varepsilon(f(z_0)))$.

Теорема 3.1. Ако су f и g дефинисане и непрекидне у некој тачки $z_0 \in \mathbb{C}$ тада су функције $f \pm g$, $f \cdot g$ и f/g, $(g(z_0) \neq 0)$ непрекидне у тачки z_0.

Доказ. Доказаћемо да теорема важи за збир. Нека је $z_0 \in \mathbb{C}$ тачка у којој су дефинисане и непрекидне функције f и g. За дато $\varepsilon > 0$ можемо да нађемо позитивне бројеве δ_1 и δ_2, такве да је:

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ када је } |z - z_0| < \delta_1,$$
$$|g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ када је } |z - z_0| < \delta_2.$$

Ако означимо са δ мањи од бројева δ_1 и δ_2, тј. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, δ је такође позитиван број. Ако је z у заједничком делу домена функција f и g и ако је $|z - z_0| < \delta$, важиће и $|z - z_0| < \delta_1$ и $|z - z_0| < \delta_2$, па важи и:

$$|(f(z) + g(z)) - (f(z_0) + g(z_0))| \leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

што се тиче разлике, доказ је сличан као код збира, док ће се производ и количник јавити као последица каснијих теорема. □

Теорема 3.2. Ако су функције комплексне промењиве $f : A \to B$ и $g : B \to \mathbb{C}$ непрекидне у тачкама $u_0 \in A$, односно, $v_0 = f(u_0), v_0 \in B$, тада је сложена функција $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$ непрекидна у тачки u_0.

Доказ. Нека је ε позитиван број. Како је функција g непрекидна у тачки $v_0 = f(u_0)$, то постоји број $\eta > 0$ такав да важи:

$$g(v) \in U_\varepsilon(g(v_0)) \text{ чим је } v \in B, v \in U_\eta(v_0).$$

Како је функција f непрекидна у тачки u_0, то се за број η може наћи $\delta > 0$, такво да важи:

$$f(u) \in U_\eta(f(u_0)) \text{ чим је } u \in A, g \in U_\delta(u_0).$$

За такве g ће онда важити $f(u) = g(f(u_0)) \in U_\varepsilon(g(v_0))$. Тиме је доказана непрекидност функције g у тачки u_0.

□

Теорема 3.3. Све елементарне функције су непрекидне у свакој тачки свог домена.

Доказ. Ова теорема је непосредна последица теорема 3.1 и 3.2. □

Теорема 3.4. Функција $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ је непрекидна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$ ако и само ако су функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрекидне у тачки (x_0, y_0).

Доказ. Посматрајмо прво директан смер ($\Rightarrow$):

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D)(|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

Модул $|z - z_0| < \delta$ можемо записати као $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, и када заменимо $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и $f(z_0) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)$ добијемо:

$$|u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

$$\sqrt{(u(x,y) - u(x_0,y_0))^2 + (v(x,y) - v(x_0,y_0))^2} < \varepsilon$$

$$\sqrt{|u(x,y) - u(x_0,y_0)|^2} + \sqrt{|v(x,y) - v(x_0,y_0)|^2} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |u(x,y) - u(x_0,y_0)| < \varepsilon \wedge \ |v(x,y) - v(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$

што је и требало доказати.
Докажимо сад обрнут смер ($\Leftarrow$):

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D) \ \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

$$\Longrightarrow |u(x,y) - u(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |v(x,y) - v(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Како је $|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{(u(x,y) - u(x_0,y_0))^2 + (v(x,y) - v(x_0,y_0))^2}$, следи да је:

$$|f(z) - f(z_0)| < \sqrt{|u(x,y) - u(x_0,y_0)|^2} + \sqrt{|v(x,y) - v(x_0,y_0)|^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

чиме је тврђење доказано. □

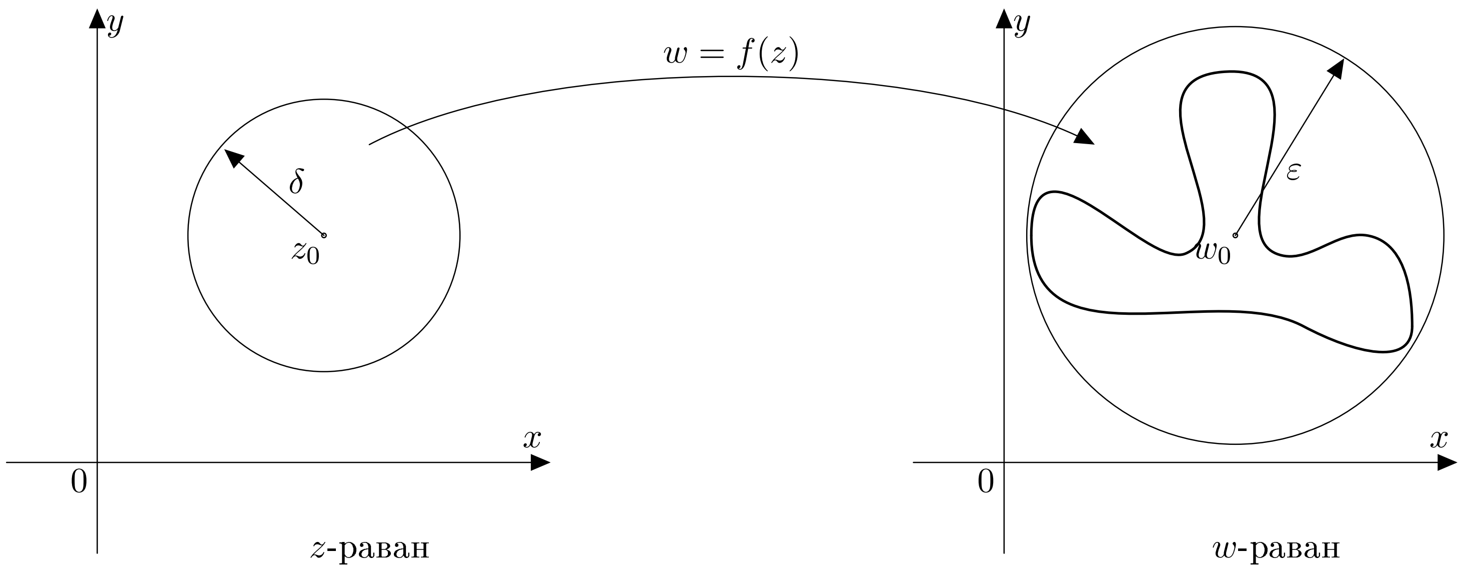
3.2 Гранична вредност

Дефиниција 3.2. Нека је $f : D \to \mathbb{C}$ функција комплексне променљиве. За функцију f кажемо да има **граничну вредност** или **лимес** w у тачки z_0 ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да је $|f(z) - w| < \varepsilon$ за све оне $z \in D$ за које је $z \neq z_0$ и $|z - z_0| < \delta$. Тада још кажемо да $f(z)$ **тежи** броју w када z тежи z_0 и пишемо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$. Математички записано:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon),$$

или:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D)(z \in U_\delta(z_0), \ z \neq z_0 \Rightarrow f(z) \in U_\varepsilon(w)).$$



Слика 5: Гранична вредност

Теорема 3.5. Функција f је непрекидна у тачки z_0 ако и само ако је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Доказ. Ова теорема је директна последица дефиниције непрекидности (дефиниција 3.1) и дефиниције граничне вредности (дефиниција 3.2). $\square$

На основу теореме 3.5. можемо закључити да за све елементарне функције f, и тачку z_0 њеног домена важи

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Теорема 3.6. Функција $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ има лимес $w = u + iv$ у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$ ако и само ако

$$u = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y),$$

$$v = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y).$$

Доказ. Посматрајмо прво директан смер ($\Rightarrow$):

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall z \in D)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w)| < \varepsilon)$$

$$|z - z_0| < \delta \iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \delta \wedge |y - y_0| < \delta$$

$$|f(z) - w)| < \varepsilon \iff |(u(x,y) + iv(x,y)) - (u + iv)| < \varepsilon$$

$$\sqrt{(u(x,y) - u)^2 + (v(x,y) - v)^2} \leq \sqrt{(u(x,y) - u)^2} + \sqrt{(v(x,y) - v)^2} < \varepsilon.$$

Одатле следи:

$$|u(x,y) - u| + |v(x,y) - v| < \varepsilon, \text{ па је } |u(x,y) - u| < \varepsilon \text{ и } |v(x,y) - v)| < \varepsilon,$$

што је и требало доказати.

Докажимо сад обрнут смер ($\Leftarrow$):

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall z \in D)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

$$\Longrightarrow |u(x,y) - u| < \frac{\varepsilon}{2},\ |v(x,y) - v| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|f(z) - w| = \sqrt{(u(x,y) - u)^2 + (v(x,y) - v)^2}$$

$$|f(z) - w| \leq |u(x,y) - u| + |v(x,y) - v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

чиме је тврђење доказано. $\square$

За разлику од реалне функције, ка некој тачки z_0, у комплексној равни, променљива z може се приближавати из бесконачно много праваца, што значи да морамо увести нов термин **гранична вредност у правцу**.

Дефиниција 3.3. Гранична вредност функције комплексне променљиве f у тачки z_0, дуж вектора $\overrightarrow{a}$, са почетком у тачки z, који гради угао α са реалном осом назива се лимес у правцу и дефинише се на следећи начин:

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\overrightarrow{a}}} f(z) = \lim_{|z|\to 0^+} f(z_0 + |z|e^{i\alpha}).$$

3.3 Бесконачно мала функција

Дефиниција 3.4. За функцију $\alpha : D \to \mathbb{C}$, $(D \in \mathbb{C})$ за коју је $\lim\limits_{z\to z_0} \alpha(z) = 0$ кажемо да је **бесконачно мала** када $z \to z_0$, (z_0 може бити замењена неком од бесконачности).

Теорема 3.7.

1. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$ ако и само ако је $f(z) = w + \alpha(z)$, где је $\alpha(z)$ бесконачно мала функција када $z \to z_0$.
2. Збир, односно разлика две бесконачно мале функције је бесконачно мала функција.
3. Производ бесконачно мале функције и ограничене функције је бесконачно мала функција.

Доказ.

1. Посматрајмо прво директан смер ($\Rightarrow$):
   Нека је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$ и означимо $\alpha(z) = f(z) - w$. За $\varepsilon > 0$ изаберемо $\delta > 0$ такво да је $|f(z) - w| < \varepsilon$ за $0 < |z - z_0| < \delta$. Тада је за такве z и $|\alpha(z)| = |f(z) - w| < \varepsilon$, што значи да је $\lim\limits_{z\to z_0} \alpha(z) = 0$, па је α бесконачно мала функција када $z \to z_0$.
   Докажимо сад обрнут смер ($\Leftarrow$):
   Нека је $f(z) = w + \alpha(z)$, где је $\lim\limits_{z\to z_0} \alpha(z) = 0$ и нека је $\varepsilon > 0$. Тада је за $|\alpha(z)| < \varepsilon$ за погодно одабрано $\delta > 0$ и $0 < |z - z_0| < \delta$. Тада је и $|f(z) - w| = |\alpha(z)| < \varepsilon$ за такве z, што значи да је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$.

2. Нека су α и β бесконачно мале функције када $z \to z_0$ и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Изаберимо позитивне бројеве δ_1 и δ_2 такве да је:

   $$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

   $$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Ако узмемо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, биће за $0 < |z - z_0| < \delta$:

   $$|\alpha(z) + \beta(z)| \leq |\alpha(z)| + |\beta(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   што значи да је $\alpha + \beta$ бесконачно мала функција када $z \to z_0$. Доказ за разлику је сличан.

3. Нека је $f(z)$ ограничена функција: $f(z) \leq M$ и $\alpha(z)$ бесконачно мала функција када $z \to z_0$. За дато $\varepsilon > 0$ нађимо $\delta > 0$ такво да је $|\alpha(z)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ за свако z за које важи $0 < |z - z_0| < \delta$. За такве z је онда

   $$|\alpha(z)f(z)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

   па је $\alpha \cdot f$ бесконачно мала фунцкија када $z \to z_0$, чиме је доказ завршен.

□

3.4 Особине лимеса

Теорема 3.8. Ако функција $f(z)$ у тачки z_0 има коначан лимес, онда постоји околина $U_\delta(z_0)$ те тачке, таква да је функција f ограничена на скупу $U_\delta(z_0)\backslash\{z_0\}$.

Доказ. Нека је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$ и $\varepsilon > 0$ произвољно. Изаберимо $\delta > 0$, такво да је $|f(z) - w| < \varepsilon$ за $0 < |z - z_0| < \delta$. Тада је $w - \varepsilon < f(z) < w + \varepsilon$ за $0 < |z - z_0| < \delta$, што и значи да је f ограничена на скупу $U_\delta(z_0)\backslash\{z_0\}$. □

Теорема 3.9. Нека је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = u$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = v$. Тада важи:

1. $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = u \pm v$;
2. $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z)g(z)) = uv$;
3. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{u}{v}$ ако је $v \neq 0$ и $g(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Доказ. Према теореми 2.10 став 1, можемо писати $f(z) = u + \alpha(z)$, $g(z) = v + \beta(z)$, где су α и β бесконачно мале функције када $z \to z_0$.

1. Такође је по истој теореми став 2, и $\alpha \pm \beta$ бесконачно мала функција када $z \to z_0$. Како је
$$f(z) \pm g(z) = (u \pm v) + (\alpha(z) \pm \beta(z)),$$
то је, по истој теореми став 3, $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = u \pm v$.

2. $$f(z)g(z) = uv + (u\beta(z) + v\alpha(z) + \alpha(z)\beta(z))$$
Како су прва два сабирка у загради производи константе и бесконачно мале функције, по теореми 2.10 став 3, то су бесконачно мале функције, што се тиче последњег сабирка то је производ две бесконачно мале функције, на основу теореме 2.11 оне су ограничене па је то такође бесконачно мала функција. У загради се налази збир три бесконачно мале функције, то је по теореми 2.10 став 2, бесконачно мала функција. Сада применом првог става теореме 2.10 добијамо да је $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z)g(z)) = uv$.

3. Посматрајмо вредност следећег израза:
$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{u}{v} = \frac{u + \alpha(z)}{v + \alpha(z)} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\alpha(z) - uv - u\beta(z)}{vg(z)} = \frac{v\alpha(z) - g\beta(z)}{vg(z)}. \tag{3.1}$$
Како функција u никад није у нули постоји вредност m за коју је $|g(z)| > m > 0$. Па је
$$\left|\frac{1}{vg(z)}\right| = \frac{1}{|v| \cdot |g(z)|} < \frac{1}{|v| \cdot m}$$
ограничена функција. На основу теореме 2.10 бројилац разломак из израза 3.1 је бесконачно мала функција, док је именилац ограничена функција, што је на основу исте теореме бесконачно мала функција. Тиме је доказано да је $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{u}{v}$.

□

4 Извод функције

Дефиниција 4.1. Нека је f функција комплексне промељиве дефинисана у области G, и вектор $\overrightarrow{a} \subset G$ са почетком у тачки z која заклапа угао α са позитивним смером x-осе. Ако је следећи лимес

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \overrightarrow{a}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

одређен и коначан, каже се да функција f има извод у тачки z_0 у правцу α и ова гранична вредност се означава са $f'_\alpha(z_0)$ или $(f(z_0))'_\alpha$.

Ако се уведу поларне координате, тада је $z - z_0 = |\Delta z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |\Delta z| \operatorname{cis}\alpha$, па се извод у правцу α може записати

$$f'_\alpha(z_0) = \lim_{|\Delta z| \to 0^+} \frac{f(z_0 + |\Delta z| \operatorname{cis}\alpha) - f(z_0)}{|\Delta z| \operatorname{cis}\alpha},$$

под условом да овај лимес постоји.

Дефиниција 4.2. Ако за функцију комплексне променљиве f дефинисану у области G постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z, z_0 \in G}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

каже се да функција f **има извод у тачки** z_0 или да је **диференцијабилна у тачки** z_0. Овај извод означава се са $f'(z_0)$.

Извод функције комплексне променљиве у произвољној тачки можемо представити као

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

где је $\Delta z = z - z_0$, односно ако је $z = x + iy$, онда је $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

4.1 Коши-Риманови услови

Дефиниција 4.3. Извод у тачки $x = x_0$ функције $f(x, y_0)$ назива се **парцијални извод првог реда** функције $f(x, y)$ по аргументу x у тачки $z_0 = x_0 + y_0 = (x_0, y_0)$ и означава се са

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Аналогно за аргумент y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Теорема 4.1. (Потребни услови диференцијабилности.) Да би функција

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

била диференцијабилна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$, потребно је да у овој тачки постоје парцијални изводи

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

и да су испуњени **Коши-Риманови услови** (краће К-Р услови):

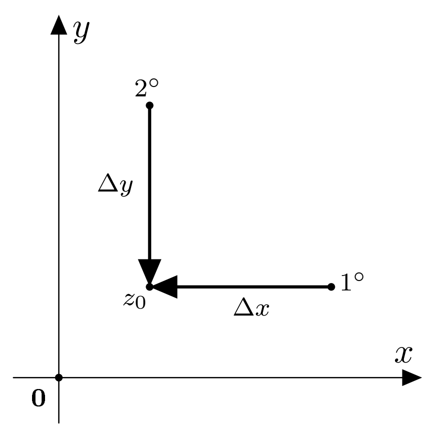
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Доказ. Нека је f диференцијабила у тачки $z_0 \in G$. Тада гранична вредност

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \text{ односно,}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \tag{4.1}$$

постоји без обзира из ког правца тачка $z \in G$ тежи тачки z_0, када $\Delta z \to 0$.
Како $f'(z)$ не зависи од правца, можемо узети два правца из којих ће тачка z тежити тачки z_0, тако да је $\Delta \to 0$.



1° дуж полуправе са почетком у тачки z која заклапа угао $\alpha = 0$ са позитивним смером x-осе, тј. $\Delta y = 0$, па је $\Delta z = \Delta x$;

2° дуж полуправе са почетком у тачки z која заклапа угао $\alpha = \frac{\pi}{2}$ са позитивним смером x-осе, тј. $\Delta x = 0$, па је $\Delta z = \Delta y$.

Ако убацимо сада у извод једначину 4.1, ова два случаја имамо:

$$f_0'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

$$f_{\pi/2}'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$
$$= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Како су изводи у правцу једнаки јер је функција диференцијабилна у тачки, после изједначавања два извода у правцу (њихових реалних и имагинарних делова) добијемо да важе К-Р услови, односно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

□

Коришћењем К-Р услова можемо одредити да ли је функција може бити диференцијабилна у скупу комплексних бројева.

Пример 3. Испитати да ли функција $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$ може бити диференцијабилна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$.

Решење. Како је $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, тада је $f(z) = \overline{z} = x - iy$. Ако функцију f запишемо као $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, јасно је да је $u(x,y) = x$ и $v(x,y) = -y$. Парцијални изводи ових функција су

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Приметимо да овако добијени парцијални изводи не задовољавају К-Р услове, према томе $f(z) = \overline{z}$ није диференцијабилна ни у једној тачки комплексне равни.

Теорема 4.2. (Довољни услови диференцијабилности.) Ако су функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ диференцијабилне у тачки (x_0, y_0) и ако су у тој тачки задовољени К-Р услови, онда је функција $f(z)$ диференцијабилна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$.

Доказ. Нека су α_1, α_2, β_1, β_2 бесконачно мале функције када $\Delta z \to z_0$. Како су функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ диференцијабилне у тачки (x_0, y_0), следи:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y,$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_2 \Delta x + \beta_2 \Delta y.$$

Када се тако добијене вредности и К-Р услови

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

замене у следећем изразу

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

добија се:

$$\begin{aligned}
&= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + i\alpha_2 \Delta x + i\beta_2 \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + i\alpha_2 \Delta x + i\beta_2 \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x - \frac{\Delta y}{i}}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y}{\Delta x + \Delta y} + \frac{\alpha_2 \Delta x + \beta_2 \Delta y}{\Delta x + \Delta y}.
\end{aligned}$$

Са обзиром на то да је $\frac{-1}{i} = i$, добија се да је:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y}{\Delta x + \Delta y} + \frac{\alpha_2 \Delta x + \beta_2 \Delta y}{\Delta x + \Delta y}.$$

Збир последња два сабирка горњег израза је бесконачно мала функција када $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, па је:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

□

Напомена. Из претходне теореме следе формуле

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Пример 4. Испитати диференцијабилности и у случају диференцијабилности одредити извод у тачки следећих функција:

(а) $f(x,y) = x^4 + iy^4$; **(б)** $f(z) = \overline{z}z^2$; **(в)** $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Решење.

(а) $f(x,y) = u(x,y)+iv(x,y) = x^4+iy^4$, па је $u(x,y) = x^4$, $v(x,y) = y^4$. Како парцијални изводи постоје, на основу К-Р услова имамо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 4y^3.$$

За $x = y$, функција $f(z)$ је диференцијабилна на скупу $G = \{x+iy \mid x = y\}$. Извод функције f у тачки $z_0 \in G$ једнак је $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 4x_0^3$.

(б) $f(z) = (x-iy)(x+iy)^2 = (x-iy)(x^2+2ixy-y^2) = x^3 - xy^2 + 2xy^2 - ix^2y + iy^3 + 2ix^2y$.

$f(z) = x^3+xy^2+i(x^2y+y^3)$, па је $u(x,y) = x(x^2+y^2)$ и $v(x,y) = y(x^2+y^2)$. Изводи потребни за К-Р услове су:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2+y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial v}{\partial y} = x^2+3y^2.$$

Како не важе следеће једнакости

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

ни за једно $z_0 \neq 0$, следи да је функција $f(z)$ диференцијабилна само у тачки $z_0 = 0$ и извод у овој тачки једнак је 0.

(в) $f(z) = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, одатле видимо да је $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$. Израчунајмо сада працијалне изводе за К-Р услове:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Видимо да је функција $f(z)$ диференцијабилна у свакој тачки z_0 из домена, и њен извод једнак је $f'(z_0) = \dfrac{-x_0^2+y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} + i\dfrac{2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$.

Теорема 4.3. Нека су функције комплексне променљиве дифернецијабилне у тачки z_0 и нека је $c \in \mathbb{C}$. Тада су функције $f+g$, $f-g$ и cf диференцијабилне у тачки z_0 и важи:

$$\begin{aligned}(f+g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0),\\ (f-g)'(z_0) &= f'(z_0) - g'(z_0),\\ (cf)'(z_0) &= cf'(z_0).\end{aligned}$$

Доказ. Докажимо правило за збир, остала два правила доказују се врло слично.

$$\begin{aligned}(f+g)'(z_0) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(f+g)(z+\Delta z) - (f+g)(z_0)}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) + g(z+\Delta z) - f(z_0) - g(z_0)}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z_0) + g(z+\Delta z) - g(z_0)}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} + \lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z+\Delta z) - g(z_0)}{\Delta z}\\ &= f'(z_0) + g'(z_0).\end{aligned}$$

□

Теорема 4.4. Нека су f и g диференцијабилне функције комплексне променљиве у тачки z_0. Тада су функције fg и f/g диференцијабилне у тачки z_0, ако је $g(z_0) \neq 0$ и важи:

$$\begin{aligned}(fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0),\\ (\frac{f}{g})'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}.\end{aligned}$$

Доказ. Доказаћемо само правило за количник, правило производа се доказују врло слично.

$$\begin{aligned}(\frac{f}{g})'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\frac{f}{g})(z+\Delta z) - (\frac{f}{g})(z_0)}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{f(z+\Delta z)}{g(z+\Delta z)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)}}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)g(z_0) - f(z_0)g(z+\Delta z)}{g(z+\Delta z)g(z_0)\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0) + f(z_0)g(z_0) - f(z_0)g(z+\Delta z)}{g(z+\Delta z)g(z_0)\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z_0)}{g(z+\Delta z)\Delta z} - f(z_0) \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z) - g(z_0)}{g(z+\Delta z)g(z_0)\Delta z}\\ &= \frac{f'(z_0)}{g(z)} - f(z_0)\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)} = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}.\end{aligned}$$

□

Теорема 4.5. Нека су f и g функције комплексне променљиве и нека је z_0 тачка, таква да је функција g диференцијабилна у тачки z_0, а функција f диференцијабилна у тачки $g(z_0)$. Тада је функција $f \circ g$ диференцијабилна у тачки z_0 и њне извод је

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Доказ.

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(f \circ g)(z+\Delta z) - (f \circ g)(z_0)}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(g(z+\Delta z)) - f(g(z_0))}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(g(z+\Delta z)) - f(g(z_0))}{\Delta z} \cdot \frac{g(z+\Delta z) - g(z_0)}{g(z+\Delta z) - g(z_0)}\\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(g(z+\Delta z)) - f(g(z_0))}{g(z+\Delta z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z+\Delta z) - g(z_0)}{\Delta z}\\ &= f'(g(z_0))g'(z_0).\end{aligned}$$

□

Пример 5. Израчунати извод функције $f(z) = (iz+4)^3(z^2+1)^2$

Решење.

$$\begin{aligned}f'(z) &= 3(iz+4)^2 i(z^2+1)^2 + (iz+4)^3 2(z^2+1)2z\\ &= (z^2+1)(iz+4)^2(3iz^2 + 3i + 4iz^2 + 16z)\\ &= (z^2+1)(iz+4)^2(7iz^2 + 16z + 3i).\end{aligned}$$

4.2 Извод неких елементарних функција

4.2.1 Извод потенцијалне функције

$$f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}\Delta z + ... + \Delta z^n - z^n}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} nz^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2}\Delta z ... + \Delta z^{n-1} = nz^{n-1}. \end{aligned}$$

На исти начин можемо израчунати извод полинома

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2, ..., n,$$

који је једнак

$$P(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + ... + a_1.$$

4.2.2 Извод експоненцијалне функције

$$\begin{aligned} &f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y. \\ &u(x,y) = e^x \cos y,\ v(x,y) = e^x \sin y, \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y. \\ &f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x \operatorname{cis} y = e^z. \end{aligned}$$

Врло слично, извод функције e^{az} је ae^{az}, $a \in \mathbb{C}$.

4.2.3 Извод логаритамске функције

Посматрајмо функцију

$$f(z) = e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln|z| + i \arg z} = e^{\ln|z|}e^{i \arg z} = |z| \operatorname{cis}(\arg z) = z, -\pi < \arg z < \pi.$$

Како је $e^{\operatorname{Ln} z}$ сложена функција и како је извод $z' = 1$, добијамо:

$$f'(z) = (e^{\operatorname{Ln} z})' = e^{\operatorname{Ln} z} \cdot (\operatorname{Ln} z)' = (z)' \Longrightarrow (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

4.2.4 Извод тригонометријских функција

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$f'(z) = \left(\frac{e^{iz}}{2i} - \frac{e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz}}{2i} - \frac{-ie^{iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

На исти начин се добије да су изводи тригонометријских функција једнаки:

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \qquad (\operatorname{ctg} z)' = \frac{-1}{\sin^2 z}.$$

5 Аналитичка функција

Дефиниција 5.1. Функција комплексне променљиве f је **аналитичка у тачки** z_0 ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да је f диференцијабилна у $\varepsilon-$околини тачке z_0.

Дефиниција 5.2. **Степени ред**[1] дефинише се као ред облика

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ...$$

где је a_n коефицијент $n-$тог сабирка, z_0 је константа, а z је променљива у некој околини тачке z_0.

Дефиниција 5.3. Нека је функција f дефинисана у околини тачке z_0 и нека се функција f може представити степеним редом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

који конвергира у некој околини тачке z_0. Тада је функција f аналитичка у тачки z_0.

Дефиниција 5.4. Функција комплексне променљиве f је аналитичка у једној области ако је аналитичка у свакој тачки те области.

Пример 6. Испитати да ли је функција $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ аналитичка у тачки $z_0 = 0$.

Решење. Проверимо прво да ли је ова функција диференцијабилна у тачки $z_0 = 0$, тј. проверимо да ли важе К-Р услови:

$$\begin{aligned}
&f(z) = (x+iy)\operatorname{Re}(x+iy) = x^2 + ixy.\\
&u(x,y) = x^2,\ v(x,y) = xy,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = x.
\end{aligned}$$

Видимо да функција јесте диференцијабилна само у тачки $z_0 = 0$ и њен извод у тој тачки је $f'(z_0) = 0$. Како функција није диференцијабилна ни у једној тачки различитој од нуле, самим тим ни у околини тачке z_0, можемо закључити да функција $f(z)$ није аналитичка у тачки z_0.

Дефиниција 5.5. Функција комплексне променљиве која је аналитичка у свим тачкама коначне равни назива се **цела функција**.

Примери целих функција јесу функције e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Теорема 5.1. Ако је функција f аналитичка у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$, тада је f непрекидна у тачки z_0.

Доказ. Нека је f аналитичка у тачки z_0, односно репрезентативна је степеним редом. Одатле следи да је $f(z_0) = a_0$. Како степени ред конвергира, гранична вредност и бесконачна сума могу заменити места, односно:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z\to z_0} a_n(z-z_0)^n = a_0 = f(z_0).$$

□

[1]Конвергентне особине степеног реда превазилазе оквире овог матурског рада, према томе тај део биће изостављен. У сваком нашем посматраном случају овај ред конвергира.

Теорема 5.2. Ако је функција f аналитичка у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$, тада је f' такође аналитичка у тачки z_0.

Доказ ове теореме је доста компликованији од осталих теорема у овом матурском раду, према томе биће изостављен.

Последица 1. Нека је функција f аналитичка у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$, представљена редом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Тада је за свако $k \in \mathbb{N}$ функција $f^{(k)}$ аналитичка у тачки z_0, и важи $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

5.1 Хармонијска функција

Нека је $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитичка функција, тада важе К-Р услови

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ако диференцирамо прву једначину по x, а другу по y, добијамо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Сада се види да важе следеће једнакости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \wedge \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{5.1}$$

Дефиниција 5.6. Једначине 5.1 називају се **Лапласове[2] парцијалне једначине са две променљиве**.

Дефиниција 5.7. Функција која задовољава Лапласову једначину назива се **хармонијска функција**.

Теорема 5.3. Ако је функција $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитичка у области G, функције u и v су хармонијске у истој области.

Доказ. Нека је $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитичка функција у тачки z_0. Њен извод

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

је такође аналитичка функција у истој тачки z_0 (теорема 5.2). Други извод је такође функција аналитичка у тачки z_0 (последица 1), тј.

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Сада добијамо Лапласове парцијалне једначине

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \wedge \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

односно функције u и v су хармонијске у области G. □

[2] Пјер Симон Лаплас (1749−1827), француски математичар

Како се на основу аналитичке функције могу одредити хармонијске функције, поставља се питање обратног проблема, односно да ли се на основу две хармонијске функције може конструисати аналитичка функција.

Пример 7. Дате су функције $u(x, y) = x$ и $v(x, y) = -y$. Испитати да ли су дате функције хармонијске, и ако јесу да ли је функција $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитичка.

Решење. Како су други изводи ове две функције једнаки нули, важе Лапласове једначине, па су ове две функције хармонијске, док функција $f(z) = x - iy = \overline{z}$ није аналитичка.

5.2 Сингуларне тачке

Дефиниција 5.8. Тачке у којима функција f није аналитичка називају се **сингуларне тачке**.

Дефиниција 5.9. Синугалрна тачка z_0 је **изоловани сингуларитет** ако постоји $\varepsilon-$околина $U_\varepsilon(z_0)$ тачке z_0 која не садржи друге сингуларитете осим z_0.

Пример 8. Испитати сингуларитете и изоловане синугалритете следећих функција:

(а) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; **(б)** $f(z) = \overline{z}$.

Решење.

(а) Како функција $f(z) = \dfrac{1}{z}$ није аналитичка у тачки $z_0 = 0$, та тачка јесте сингуларна. С обзиром на то да је аналитичка у свим осталим тачкама комплексне равни, тачка $z_0 = 0$ је изоловани сингуларитет.

(б) Како функција $f(z) = \overline{z}$ није аналитичка ни у једној тачки комплексне равни, кажемо да је сингуларна на целом скупу $\mathbb{C}$. Према томе нема излолованих сингуларитета.

Постоје три врсте изолованих сингуларитета:

1. **Отклоњив сингуларитет** – тачка $z = z_0$ је отклоњив или привидни сингуларитет ако је $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ коначан број, а функција није дефинисана у тачки z_0.
2. **Пол** – изоловани сингуларитет z_0 је пол ако је $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
3. **Есенцијални сингуларитет** – тачка $z = z_0$ је есенцијални сингуларитет ако $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не постоји.

6 Закључак

Области које покрива овај матурски рад не досежу до сржи комплексне анализе. Теорија комплексне анализе као једна од грана математике не може да стане у један уџбеник, а камоли у матурски рад. Моја идеја била је упознавање са основним појмовима из ове области, да би се на вишем степену образовања лакше савладала. Зауставио сам се код аналитичких функција и сингуларитета, јер већ следећи корак био би увођење интегралних облика, што је област сама за себе.

Важно је напоменути да помоћу интеграла функције комплексне променљиве, врло једноставно могу се израчунати интеграли реалне променљиве, који нису лаки за рачунање. Овај метод је познат као **метод контуре интеграције** и можда је најкласичнији пример зашто је комплексна анализа примењива. Још неки пример примењености комплексне анализе је **Лијувилова**[1] **теорема** која води до једног од стандардних доказа основне теореме алгебре[2]. Поред ове теореме ту је и **Риманова зета−функција** која је без сумње најважнија функција теорије бројева, због своје везе са расподелом простих бројева. Постоје још много важних примена комплексне анализе које нам помажу да боље изучавамо реалне бројеве, што чини ову област јако атрактивном и занимљивом за проучавање.

[1] Жозеф Лијувил (1809−1882), француски математичар

[2] Поље комплексних бројева је алгебарски затворено.

Литература

[1] др Б. Станковић, *Теорија функција комплексне промењиве*, Универзитет у Новом Саду, Београд, 1972.

[2] П. Ђерасимовић, *Функције комплексне промењиве Еулер-ови интеграли Беселове функције*, Универзитет у Београду, Београд, 1971.

[3] др Д. С. Митриновић, *Комплексна анализа*, Грађевинска књига, Београд 1977.

[4] М. Матијевић, *Комплексне функције*, Математички факултет у Београду, Београд, 2006.

[5] М. Никић, *Основи комплексне анализе*, Научна књига, Београд, 1990.

[6] С. Ланг, *Complex analysis*, Спрингер-Велралг, Њујорк, 1999.

[7] К. Кодаира, *Complex analysis*, Универзитет у Кембрицу, Кембриџ, 2008.