

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

Београд, Краљице Наталије 37

Матурски рад из физике

Њутново клатно

Ученик:

Стефан Милановић, IVц

Ментор:

Драгица Ивковић

Београд, јун 2013.

САДРЖАЈ

1. Увод.....	3
2. Теоријски увод	4
2.1 Енергија и З.О.Е.	4
2.2 Импулс и З.О.И.	6
2.2.1 Судари.....	7
2.2.2 З.О.И. у сударима.....	8
3. Коришћење и објашњавање рада Њутновог клатна.....	9
3.1 Конструкција.....	9
3.2 Анализа рада Њутновог клатна.....	9
3.3 Две или више куглица.....	13
4. Закључак.....	14
Литература.....	15

1. Увод

Исак Њутн, један од највећих умова које је овај свет познавао, поред разних формула, закона, принципа итд. изумео је и веома једноставну и корисну справу - Њутново клатно (енгл. Newton's cradle) или, како се још назива, Њутнова колевка (енгл. Newton's pendulum). Њутн је уз помоћ овог веома једноставног изума успео да на сликовит начин објасни два врло значајна закона са којим се сусрећемо сваки дан. Физичке основе ове справе су закон одржања импулса и закон одржања енергије, два основна закона кретања односно динамике.

Теоријски део овог матурског рада представља укратко објашњење рада ове справе, као и закона на које се ослања, и разне случајеве које разматрамо у зависности од броја и величине куглица.

Практични део матурског је можда и највећи разлог због којег сам одабрао ову тему пошто ја сматрам да је у физици једна од најважнијих ствари сам сусрет са физичким законима и разумевање тих закона у реалном свету. Наравно, исто толико је битна теорија, чак је некада и битнија од праксе, али мене је практични део овог матурског привукао ваљда због тога што једва чекам да применим своје знање. У њему ће бити визуелно приказани закони на чијим принципима „ради“ Њутново клатно и о којима ће бити говора у следећем поглављу.

Биће одговорено на сва мање или више збуњујућа питања везана за примену клатна у разним областима физике. Наравно овај рад може послужити и као упознавање света осцилација, енергије, импулса, судара...

2. Теоријски увод

У овом делу матурског рада укратко ће бити објашњени сви закони и области везани за Њутново клатно.

2.1 Енергија и З.О.Е.

У најопштијем случају и објашњену на најједноставнији начин енергију можемо дефинисати као физичку величину коју карактерише способност тела, или система тела да изврше рад. Ова дефиниција је део основних дефиниција савремене физике, и то у оном делу који треба да одговори на питање о узроку и пореклу природних феномена акције, дејства и силе. Разлика између крајњег и почетног стања тела у погледу садржаја енергије (ΔE) једнака је раду A извршеном приликом промене тог стања.

$$\Delta E = E_k - E_p = A$$

Енергија је величина која карактерише стање тела, док је рад величина која карактерише промену тог стања. Енергија је скаларна величина. Јединица за енергију је џул [J].

$$1 \text{ J} = \text{Nm} = \text{kg} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Облици енергије (поменућемо само оне које су битне за овај рад)

Потенцијална енергија: постоји као последица положаја који објекат има у односу на друге објекте;

Кинетичка енергија: која је последица кретања тела;

Потенцијална енергија

Тај облик енергије има потенцијал да промени стање других објеката у околини, на пример конфигурацију (геометријски распоред) или кретање. Потенцијална енергија се обично описује као особина коју тело има, а у вези је са положајем или обликом и спремно је да се претвори у кинетичку енергију. Механичка енергија је комбинација обе.

На малим висинама изнад Земље ова потенцијална енергија Земљине теже израчунава се према једначини:

$$E_p = mgh, \text{ где је } m \text{ маса тела}$$

h је висина

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ је вредност убрзања Земљине теже у близини површине Земље .

Кинетичка енергија

Сва тела која се крећу линеарно или ротирају поседују одређену кинетичку енергију. Кинетичка енергија се може дефинисати као рад потребан да се убрза тело одређене масе од стања мировања до садашње брзине тела. Једном кад је ова енергија добијена, она остаје стална док се брзина тела не промени. Негативан рад истог износа је потребан да се тело врати у стање мировања.

За не-релативистичке брзине, а то су брзине много мање од брзине светлости, може се користити Њутнов израз за кинетичку енергију:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \text{ где је } m \text{ маса тела}$$

v брзина тела .

Закон одржања енергије- З.О.Е.

Укупна механичка енергија E (кинетичка и потенцијална) затвореног (изоливаног) система тела, између којих делују само конзервативне силе, остаје непромењена (константна).

Енергија може прелазити из једног у други облик и преносити се са једног на друго тело, али укупна енергија у затвореном систему тела у коме делују само конзервативне силе остаје константна.

$$E = E_k + E_p = \text{const.}$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

Енергија се не може створити нити нестати, већ само променити облик из једног у други.

2.2 Импулс и З.О.И.

У класичној механици импулс, (SI јединица $\text{kg}\cdot\text{m/s}$), је производ масе тела и његове брзине. У општем случају импулс неког тела концептуално се може схватити као настојање тог тела да настави кретање у истом правцу и смеру, уколико на њега не делује нека спољашња сила. У складу с тиме, он је природна последица Њутнових закона кретања. Импулс је конзервисана (одржана) величина, што значи да укупан импулс било којег изолованог система (који није под утицајем спољашњих сила) не може да се промени. Концепт импулса је уведен у класичну механику захваљујући већем броју великих мислилаца и експериментатора као што су Рене Декарт, Галилео Галилеј, Исак Њутн, Готфрид Лајбниц и други.

Када се неко тело креће у било којем референтном систему, оно у том систему има одређени импулс. Важно је уочити да је импулс зависан од референтног система, што значи да исто тело може да има одређени импулс у једном систему референције, а у другом систему неки други импулс који се разликује од првог. Бројна вредност импулса који неко тело поседује зависи од две физичке величине: масе и брзине покретног тела у одређеном систему референције. У физици се ознака импулса обично записује малим словом p , где се импулс израчунава по формули:

$$\vec{p} = m\vec{v} ,$$

где је m маса тела, а v брзина тела.

Укупан импулс неког механичког система тела је векторски збир импулса свих појединачних тела у систему:

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots + m_n\vec{v}_n ,$$

где је m маса тела, v брзина тела и n број тела у систему.

Закон одржања импулса- 3.О.И.

Принцип закона одржања импулса дат је тврђењем да се укупан импулс свих тела у свемиру (или импулс неког изолованог система) не мења (константан је). Једна од последица овога је да центар масе било ког система тела увек наставља да се креће истом брзином док нека спољашња сила не делује на њега.

Закон одржања импулса је последица хомогености простора, односно чињенице да у простору не постоје истакнуте тачке, него су све тачке у простору еквивалентне или равноправне. Такође важи и обрнуто. Односно, ако би неко тело у некој тачки простора променило своју брзину (свој импулс) без утицаја спољашње силе, тада би закључили да је та тачка по нечему другачија од других тачака простора, или краће речено, да је истакнута тачка, што би значило да овакав простор није хомоген.

У неком изолованом систему (у којем не делују спољашње силе) укупан импулс је константан, што је у складу са Њутновим законом инерције. Трећи Њутнов закон (закон акције и реакције) који тврди да су силе узајамног деловања два тела исте јачине и правца, а супротног смера, такође је у сагласности са законом одржања импулса.

2.2.1 Судар

Судар је краткотрајна узајамна интеракција између тела без утицаја спољашњих сила, у којој се више или мање испољавају еластичне особине тела. Узајамна интеракција се не мора остваривати контактним силама. Након судара, брзине тела се мењају, у општем случају, и по интензитету и по правцу, а део енергије се може претворити у топлоту.

Судари двају тела могу бити једнодимензионални (када се тела и пре и након судара крећу по истој правој линији) и дводимензионални.

Постоје две основне врсте судара, при чему обе ове врсте конзервишу (одржавају) импулс, а то су:

Еластични судари у којима се одржава кинетичка енергија и укупан импулс тела пре и после судара

Нееластични судари у којима се не одржава кинетичка енергија, али је укупан импулс одржан пре и после судара.

Еластични судари

Судар између две билијарске кугле је добар пример за скоро потпуно еластични судар. У нашем случају то би биле куглице Њутновог клатна. Осим што је импулс у овоме судару одржан, и збир кинетичких енергија кугли пре судара мора бити једнак збиру кинетичких енергија после судара:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2$$

У случају чеоног судара две кугле коначне (после судара) брзине се налазе према:

$$v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1,i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2,i}$$
$$v_{2,f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1,i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2,i}$$

Где су “i” и “f” ознаке за почетну и крајњу брзину.

Што се даље може лако преуредити у:

$$m_{1,f} \cdot v_{1,f} + m_{2,f} \cdot v_{2,f} = m_{1,i} \cdot v_{1,i} + m_{2,i} \cdot v_{2,i}$$

2.2.2 Закон одржања импулса у сударима

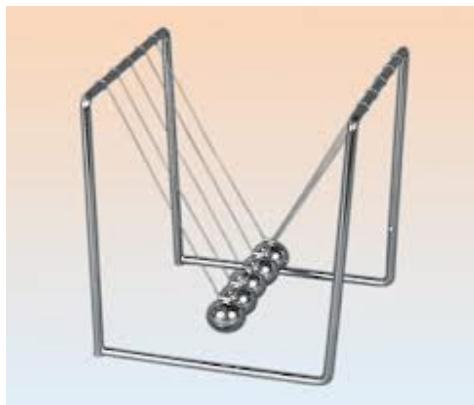
Импулс има специјално својство да се у изолованим системима одржава чак и приликом судара тела у систему. С друге стране, кинетичка енергија система тела се не одржава, осим ако су судари тела апсолутно еластични. Пошто се импулс одржава његов закон одржања обично се и користи да би се израчунале (предвиделе) брзине тела након судара. Уобичајени проблем у физици који захтева коришћење ове чињенице је судар два тела или честице. Пошто се импулс увек одржава сума импулса честица пре судара мора да буде једнака суми импулса после судара:

$$m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}$$

3. Коришћење и објашњење рада Њутновог клатна

3.1 Конструкција

Конструисана је помоћу серије клатана (најчешће је тај број непаран) која се ослањају једно на друго. Свако клатно је закачено за оквир љуљашке помоћу две нити једнаке дужине које се удаљавају под косим углом једна од друге. Овакав распоред нити ограничава клатна да се крећу само у једној, истој, равни.



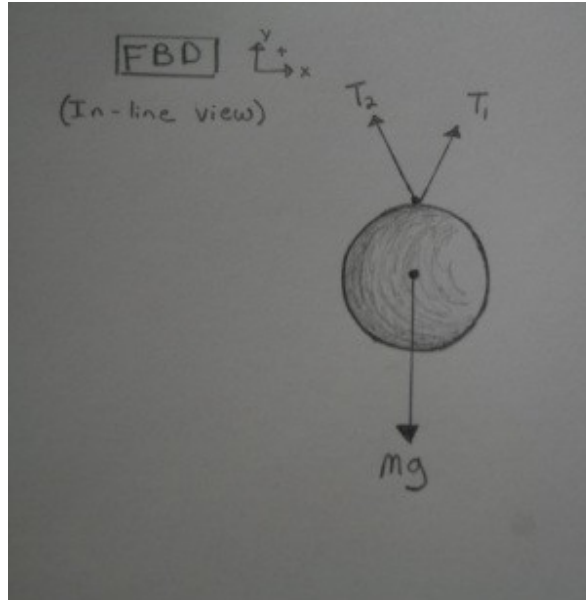
3.2 Анализа рада Њутновог клатна

Његово коришћење је веома једноставно, благо повлачење једне или више куглица у супротном смеру од места на којем остају остале куглице у мировању. Једино о чему мора да се води рачуна је то да се приликом повлачења куглице не поремете оне које морају да остану у мировању. Уз помоћ већ поменутих и објашњених физичких закона овде ће бити изанализиран рад самог клатна кроз четири фазе:

1. Фаза – куглице у стању мировања

Прва ситуација је када клатно стоји на равној површи и ниједна од куглица није у покрету, односно када је цео систем у стању мировања. У овом случају брзина је једнака нули па самим тим и импулс и кинетичка енергија. Осим тога, ми смо у овом случају поставили наш координантни систем тако да x -оса пролази кроз центре наших куглица и одатле добијамо да је и потенцијална енергија једнака нули пошто за куглице важи да је $y = 0$. То не значи да на куглице не делује ниједна сила. На слици сл. 1 су приказане силе које утичу на сваку куглицу. Силе су у равнотежи и у вертикалном и у хоризонталном правцу. По y -оси гравитациона сила је једнака збиру вертикалних компонената силе затезања

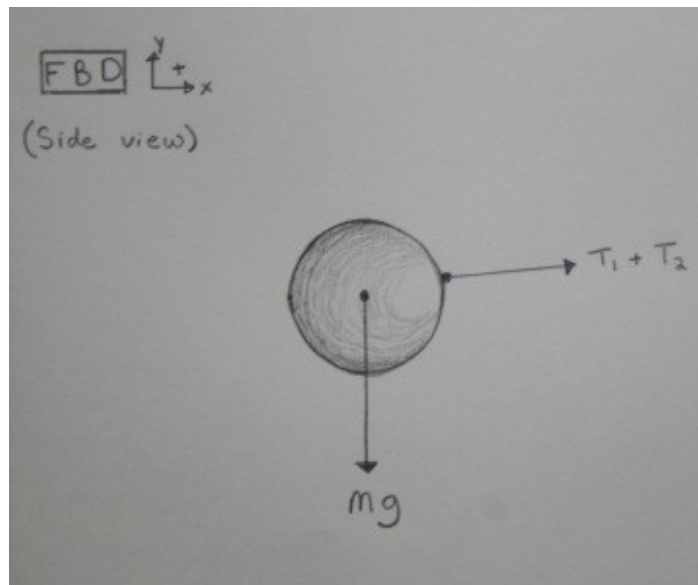
нити, док по x-оси су куглице у равнотежи (не померају се лево десно) због тога што су хоризонталне компоненте силе затезања нити једнаке и делују у истом правцу, али у различитим смеровима.



сл. 1

2. Фаза – повучена куглица

Друга ситуација је када се једна од куглица избаци из равнотежног положаја од стране спољашње силе (људске руке). На слици сл. 2 је приказана ова ситуација са бочне стране.



сл. 2

Сада приказане силе више нису у равнотежи и након пуштања куглице због тога ће постојати убрзање, али о томе у 3. фази.

ИМПУЛС: Тренутно на куглицу утиче спољашња сила, сила гравитације, која ће променити импулс куглице, након њеног пуштања, који је и даље једнак нули.

ЕНЕРГИЈА: У почетку брзина куглице је нула па је и вредност кинетичке енергије једнака нули ($E_k = 0$). Али пошто је куглица подигнута до неке висине h њена потенцијална енергија је: $E_p = mgh$, све вредности су различите од нуле па је и потенцијална енергија различита од нуле. Одатле добијамо да је укупна почетна енергија једнака потенцијалној енергији.

$$E_0 = E_p + E_k, E_k = 0 \Rightarrow E_0 = E_p$$

3. Фаза – судар са другим куглицама

Трећа ситуација се одвија све од пуштања куглице па до њеног непосредног судара са куглицама које мирују. Пошто се брзина куглице повећава, повећава се и импулс и кинетичка енергија. Пре самог судара куглица је буквално у истом положају као у 1. фази, док је још била у стању мировања. Међутим, у овом случају куглица поседује импулс и кинетичку енергију и то максималну.



сл. 3

ИМПУЛС: Ми сада желимо да знамо шта ће се десити после судара. Почетни импулс, непосредно пре судара, је максималан пошто је и брзина максимална. Уз помоћ закона одржања импулса и еластичног судара, који су већ објашњени, закључујемо да је производ масе и брзине једне куглице једнак производу масе и брзине остатка система који се одбио. Наравно, то нам онда даје две опције:

након судара или се остале куглице крећу заједно много спорије него она прва пре судара или се само последња куглица креће истом брзином као и прва пред судара. Наравно, ми знамо да је ипак у питању други случај.

$$p_0 = mv, v = v_{\max} \Rightarrow p_0 = p_{\max}$$

$p_0 = p_k, mv_0 = mv_k$, где су p_0 и p_k импулси непосредно пре и непосредно после судара (исто важи и за брзине).

ЕНЕРГИЈА: После пуштања куглица, силе које су биле у неравнотежи дају куглици убрзање на криволинијској путањи. Она добија кинетичку а губи потенцијалну енергију, односно потенцијална се претвара у кинетичку. Уз помоћ једноставних израчунавања добијамо да је потенцијална енергија пре пуштања куглице једнака кинетичкој пре судара. На веома лак начин одатле можемо одредити и вредност саме брзине пре судара, ако знамо висину до које смо отклонили куглицу.

$$E_k = E_p, \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

4. Фаза – након судара

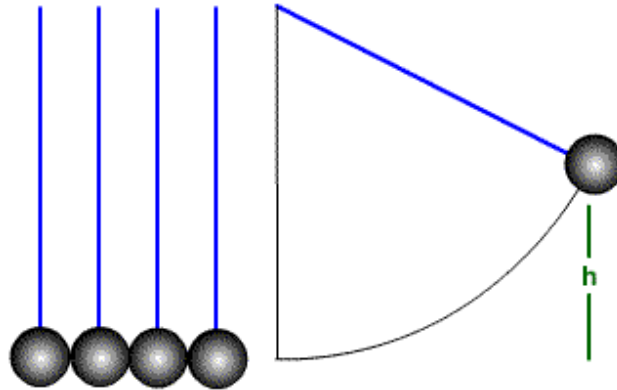
У последњој ситуацији, куглица „расипа“ енергију у друге кугле, пошто су куглице круте, и тај ударни талас носи исту количину енергије кроз куглице све до последње којој предаје исту количину енергије коју је предала прва куглица при судару.



сл. 4

Тај прелазак енергије и импулса са куглице на куглицу је објашњено законима одржања и еластичним сударима. На крају, последња куглица ће достићи висину h са које је пуштена

прва куглица и уз помоћ гравитационе силе вратиће се до куглица које мирују и цело поступак ће да се понови.



3.3 Две или више куглица

Претпоставимо да из равнотежног положаја отклонимо n куглица једнаких маса m . После судара из 3.О.И. важи:

$$(1) p = nmv = MV,$$

где је M укупна маса куглица које су се одбиле, а V брзина куглица које су се одбиле.

Исто, из 3.О.Е. важи:

$$(2) E_k = \frac{1}{2}nmv^2 = \frac{1}{2}MV^2$$

Наћи брзину

Из једначине (1) добијамо:

$$m = MV/nv$$

Убацавањем у једначину (2) добијамо:

$$\frac{1}{2}nmv^2 = \frac{1}{2}MV^2$$

$$\frac{1}{2}nv^2MV/nv = \frac{1}{2}MV^2$$

$$v = V$$

Другим речима, куглице на другом крају ће се покренути брзином v .

Наћи масу

Из једначине (1) добијамо:

$$v = MV/nm$$

Квадрирањем ове једначине:

$$v^2 = M^2V^2/n^2m^2$$

Убацивањем у једначину (2) добијамо:

$$\frac{1}{2}nmv^2 = \frac{1}{2}MV^2$$

$$\frac{1}{2}nmM^2V^2/n^2m^2 = \frac{1}{2}MV^2$$

$$M/nm = 1$$

$$M = nm$$

Укупна маса куглица које су се помериле је једнака укупној маси куглица које су отклоњене и пуштене.

Из ових закључака можемо рећи да пошто све куглице имају једнаку масу ако повучемо две куглице и пустимо, након судара ће се на другом крају одбити исто две куглице и то истом брзином коју су имале прве две пре судара. Наравно, ово важи и за више куглица.

4. Закључак

У савршеном систему, последњи сценарио и резултати би били важећи и валидни.

Међутим, с обзиром на отпор, трење, непотпуно еластичне сударе итд, ови резултати се не могу сматрати као тотално тачни. То објашњава зашто Њутново клатно не функционише у вечност, али у сваком случају Њутново клатно ће увек бити одличан пример закона одржања енергије и импулса. Оба ова закона су валидна, али увек треба узети у обзир и утицај околине.

Литература:

1. <http://www.lhup.edu/~dsimanek/scenario/cradle.htm>
2. В. Brogliato: Nonsmooth Mechanics. Models, Dynamics and Control, Springer, 2nd Edition, 1999.
3. www.school-for-champions.com/science/newtons_cradle_derivation.htm
4. Наташа Чалуковић, Физика 1 за први разред Математичке гимназије, 2005.
5. http://ffden-2.phys.uaf.edu/212_spring2011.web.dir/Joel_Teune/index.html
6. James D. Kerwin, Velocity, Momentum, and Energy Transmissions in Chain Collisions, 1999.