**Математичка гимназија, Београд**

**Школска 2011/2012 година**

**Матурски рад из физике:**

# Моделирање инфлације коришћењем модификоване опште теорије релативности


**Ученик:** **Вања Шарковић,**

**Математичка гимназија, Београд**

**IV разред**

**Ментор:** **Душко Латас,**

**Математичка гимназија, Београд**

# Садржај

# УВОД

Универзум је настао пре око 13.7 милијарди година у страховитој експлозији коју називамо Велики прасак (енг. Big Bang). Након самог Великог праска Универзум се развијао у разним фазама. Прва од њих је била Планкова епоха која је трајала до $10^{-43}$ s након Великог праска и током ове епохе су све четири фундаметалне интеракције (гравитација, елетромагнетна, слаба и јака нуклеарна) биле једна јединствена интеракција. Након Планкове епохе је уследила епоха Великог Уједињења која је трајала од $10^{-43}$ до $10^{-36}$ s и сматра се да потом почиње епоха инфлације (Wienberg 2008). Инфлаторну епоху као додатак моделу Великог Праска је предложио Алан Гут 1980 године, након саслушавања низа предавања која су се бавила до тада необјашњеним проблемима свемира и теорији уједињења. Идеја Алана Гута је само првобина идеја која је даље развијана од стране како њега самог, тако и осталих физичара. Током времена су дати разни предлози за ову теорију, али у овом раду ћемо се бавити једном конкретном идејом – инфлацијом Старобинског. Пре него што детаљније уведемо ову врсту инфлације, укратко ћемо дати опис инфлације.

Инфлација је период који је трајао веома кратко и током ког се свемир ширио приближно експоненцијално. Инфлација је хипотеза која је постављена као додатак на основну теорију Великог праска јер објашњава више фундаменталних проблема на које Велики прасак без инфлације не пружа одговоре. Међу њима су проблем хоризонта (енг. “Horizon Problem”), проблем магнетних монопола (енг. “Monopoly problem”), проблем хомогености великих структура (енг. “Large scale homogenity problem”) и проблем равнине (енг. “Flatness Problem”). За ове проблеме инфлација даје прикладно решење.

Проблем хоризонта је првобитно уочен на следећи начин. Током посматрања позадинског зрачења забележено је да су температуре позадинског зрачења приближно једнаке у сваком делу неба, чак и да су делови свемира који су претходно били у контакту поседују приближно исту температуру. Овај проблем решава инфлација јер су се по инфлаторном моделу пре почетка инфлације ови делови свемира додиривали, омогућујући тим деловима свемира да остваре комуникацију.

Проблем равнине је уочен када се дошло до закључка да је тренутна густина свемира приближно једнака критичној густини, густини за коју је свемир раван. Самим тим би и густина у раном универзуму била приближна критичној густини, те би и простор у раном универзуму био раван – ово представља несугласицу јер је закривљеност била огромна. Овај проблем је решен инфлацијом јер током инфлације се закривљеност се смањује и на тај начин свемирски простор прелази из закривљеног у раван простор. Неравнине које су постојале пре инфлације су се током инфлаторног ширења рашириле на огроман простор давајући посматрачу утисак равнине простора.

Магнетни монополи су структуре које поседују само један од магнетних полова – на пример само северни магнетни пол без јужног магнетног пола и обрнуто. По великој теорији уједињења магнетни монополи би требало да представљају тополошке дефекте у простору. Проблем магнетних монопола је уочен крајем 1970-их. Ови објекти би требало да у огромним количинама постоје у врелом, раном Универзуму, што би требало да резултује у далеко већој густини од оне добијене посматрањима - с обзиром да никада није пронађен ниједан магнетни монопол. Огромно ширење простора током инфлације доводи до хомогености на великим скалама и до драстичног смањења густине монопола, те даје одговор на проблем хомогености на великим скалама и проблем монопола.

Постоји мноштво различитих модела којима се описује инфлација, али независно од детаља, заједничке особине свих њих су посматрачки проверене (на пример једна од потврда представља поклапање резултата посматрања ситних нехомогености у микроталасном позадинском зрачењу са предвиђањима датим на основу теорије инфлације), тако да се може рећи да ова теорија стоји на чврстом тлу – поткрепљеним теоријом и посматрањима. (Weinberg 2008).

Узрок инфлације се најчешће доводи у везу са раздвајањем јаке од електромагнетне и слабе интеракције при чему је ослобођена велика количина енергије која је изазвала јако ширење свемира за кратко време. Међутим проучавање сингуларитета у општој теорији релативности (међу којима је и Велики прасак) показало је да се модификацијом ОТР за велике кривине простор-времена избегавају сингуларитети, а такође се испоставља да се уз неке једоставније модификације може наћи задовољавајући оквир за опис инфлације – попут инфлације Старобинског која не укључује физику честица већ узима један облик модификованих једначина опште теорије релативности.

Инфлација Старобинског замењује скаларну кривину $R$ (Ричијев скалар) са функцијом $f(R)$ чији облик може да се мења – битно је да у њој фигурише Ричијев скалар различитих степена. У изложеном моделу узета је функција која се за мале кривине своди на стандардни облик – степено ширење, а у случају великих закривљености (великих вредности Ричијевог скалара) има другачије понашање – експоненцијално ширење.

Циљ овог рада је да се установи да ли инфлација Старобинског са унетим модификацијма ОТР може да испуни неке основне захтеве инфлаторног модела – експоненцијално ширење током инфлације, ред величине за који се свемир раширио и да ли постоји гладак прелазак из експоненцијалног у стандарно ширење на крају инфлације.

# ТЕОРИЈСКИ УВОД

ОТР одлично описује гравитацију и не постоји ниједно посматрање, ни експеримент који долази у несугласицу са овом теоријом. Ипак један од великих проблема теорије је постојање сингуларитета у којима кривина простор-времена постаје бесконачна, дакле у оваквим ситуацијама теорија практично престаје да важи. Међутим, уколико се модификују полазне једначине ОТР оне могу да реше неки од проблема сигуларитета. Модификација о којој је реч представља модификацију Ајнштајн-Хилбертовог дејства.

Ајнштајнове једначине поља су скуп једначина из ОТР које објашњавају гравитациону интеракцију као резултат простор-времена избаци као резултат простор-времена. То су тензорске једначине и могу да се запишу као:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

где је $R_{\mu\nu}$ Ричијев тензор закривљености, $R$ Ричијев скалар закривљености, $g_{\mu\nu}$ метрички тензор, $\Lambda$ космолошка константа и $T_{\mu\nu}$ енергетски тензор ($(\mu,\nu)\epsilon(0,1,2,3)$). Ова наизглед једноставна једначина представља елегантно записан систем од десет једначина. Она описује гравитационо поље под утицајем материје и енергије које савијају простор. Ајнштајнове једначине су изведене из Ајнштајн-Хилбертовог дејства, користећи Хамилтонов принцип најмањег дејства. Ајнштајн-Хилбертово дејство је изражено преко формуле:

$$S = -\frac{1}{2k} \int R\sqrt{-g}\, d^4x \tag{2}$$

где $g$ представља детерминату метричог тензора $g_{\mu\nu}$, $R$ Ричијев скалар, $S$ дејство и $k$ константу која износи $\frac{8\pi\gamma}{c^4}$.

Фридман-Лемантре-Робертсон-Волкерова метрика (FLRW) описује решења Ајнштајнових једначина у свемиру који је хомоген, изотропан, изометричан, нестатичан и повезан. Математички, ова метрика може да се прикаже као:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1+Kr^2} + r^2 d\theta + r^2 sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{3}$$

где је $a(t)$ фактор скалирања, $s$ метрика, $r$ i $\theta$ поларне координате и $K$ је константа која показује да ли је свемир закривљен (износи 0 за раван свемир, 1 за позитивно закривљен свемир, -1 за негативно закривљен свемир). Фактор скалирања говори о начину на који се свемир развија током времена $\frac{a(t)}{a(t_0)}$, представља однос удаљености између две произвољне тачке простора у тренутцима t и $t_0$.

Метрички тензор $g_{\mu\nu}$ за FLRW метрику је следећег облика:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1+Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

Применом ове метрике на Ајнштајнове једначине и уз претпоставке да енергетски је тензор $T_{\mu\nu}$ хомоген и изотропан добијене су Фридманове једначине које важе за већ описани свемир. Карактеристично је да модел свемира коришћен одговара нашем свемиру. Фридманове једначине у њиховом општем облику изгледају овако:

$$(\frac{1}{a(t)}\frac{da(t)}{dt})^2 = \frac{8\pi\gamma}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2(t)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{a(t)}\frac{d^2a(t)}{(dt)^2} = -\frac{4\pi\gamma}{3}(\rho + \frac{3P}{c^2}) \quad (6)$$

где је $\rho$ густина енергије, а $P$ притисак. Ове једначине описују динамику ширења свемира која је садржана у еволуцији фактора скалирања.

Ове једначине не описују добро свемир током периода инфлације – да би успешно описале свемир и током ове епохе најчешће се додаје један члан који представља скаларно поље (инфлатон) које је било узрок инфлације. У овом раду се уводи модификација Ајнштајн-Хилбертовог дејства, и она одговара формули:

$$S = -\frac{1}{2k}\int f(R)\sqrt{-g}d^4x \quad (7)$$

Основна замисао модела је да се скаларна кривина $R$ (Ричијев скалар) замени функцијом $f(R)$ која се за мале кривине своди на стандардни облик, а у случају великих закривљености има другачије понашање које може да отклони проблем сингуларитета. Међутим овакве модификације могу имати и космолошке последице јер утичу и на понашање Универзума у раним фазама еволуције када је закривљеност простор-времена била јако велика.

Као једна од могућих модификација може да се размотри функција облика $f(R) = R + \alpha R^n$, $(\alpha > 0, n \in N)$ (De Felice et al. 2010), јер има јако једноставну форму, укључује два параметра, па је самим тим згодна за коришћење. Сем тога, додатни члан $\alpha R^n$ заузима велике вредности за велике закривљености – велике вредности $R$, док за мале вредности $R$ функција $f(R)$ постаје приближно $R$, па Ајнштајнове једначине добијају свој класичан облик. Овај тип модификације биће коришћен у овом раду за опис инфлаторног ширења Универзума.

Да би се описао модел Универзума у овако модификованој теорији потребно је решити модификоване Фридманове једначине.

Претходно поменутим модификацијама ОТР-а Фридманове једначине попримају нов облик (De Felice et al. 2010):

$$3F(R)H^2 = \frac{F(R)R - f(R)}{2} - 3HF(\dot{R}) + k^2\rho \tag{8}$$

$$3F(R)H^2 = F(\ddot{R}) - 3HF(\dot{R}) + k^2(\rho + P) \tag{9}$$

при чему је $F(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}$. Треба да се примети да се модификоване једначине за случај $f(R) = R$ своде на стандардне Фридманове једначине.

За моделирање универзума Фридманове једначине нису довољне саме по себи и потребан је додатан услов у облику једначине за одржање енергије, ова једначина се своди на једначину континуитета (Peebles, 1993). Једначина континутитета је дата формулом:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \tag{10}$$

где је P притисак идеалног флуида. Једначине (8) и (9) су међусобно еквивалентне уколико једначина континутитета (10) важи. Да би се добио модел Универзума решава се систем једначина (8), (10) односно (9), (10) уз задавање одговарајућих услова.

Једначина континуитета даје зависност густине од времена:

$$\rho \sim a(t)^{-3(1+w)}\rho_0 \tag{11}$$

где је $w$ - фактор дефинисан као $w = \frac{P}{\rho}$ . Овај параметар је једнак као $w = 0$ за обичну материју, $w = \frac{1}{3}$ за зрачење, а $w = -1$ за тамну енергију.

Скаларна кривина је у случају равног, хомогненог и изотропног свемира повезана са фактором скалирања на следећи начин (De Felice et al. 2010):

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}) \tag{12}$$

где је $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ Хаблов параметар. У тренутку када је Хабл направио откиће сматрало се да је ова вредност константна, те је често употребљаван назив Хаблова константа.

# МОДЕЛ И МЕТОД

У овом раду размотрен је следећи случај $f(R) = R + \alpha R^2$ , као и специјалан случај $f(R) = R^2$ – када је $\alpha R^2$ јако велико па се линеарни члан $R$ може занемарити. Треба напоменути да се ове једначине кандидују за опис инфлације само гравитацијом. Недостатак коришћеног модела је чињеница да не описује свемир много након инфлације тако изванредно.

У овом раду су изведене модификоване једначине за оба случаја. Када се зависност (11) искористи у једначини (8) и када се $f(R)$, $F(R)$ і $\dot{F}(R)$ изразе преко $R$ и $\dot{R}$ а потом из једначине (12) $R$ изрази преко $H$, и коначно заменом $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ добија се диференцијална једначина трећег реда по фактору скалирања $a$:

$$\text{За } f(R) = R + \alpha R^2 \quad \dot{c} = \frac{\ddot{a}^2}{2\dot{a}} - \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^3}{2a^2} - \frac{\dot{a}}{12\alpha} + \frac{k^2 {\rho_0}^{1-3w}}{36\alpha\,\dot{a}\,a^2} \qquad (13)$$

$$\text{За } f(R) = R^2 \quad \dot{c} = \frac{\ddot{a}^2}{2\dot{a}} - \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^3}{2a^2} + \frac{k^2 {\rho_0}^{1-3w}}{36\dot{a}\,a^2} \qquad (14)$$

Ове једначине се даље решавају нумерички. Увођењем смене $b = \dot{a}$, $c = \ddot{a}$ добија се систем од три спрегнуте диференцијалне једначине првог реда за оба случаја, и оне се потом решавају нумеричком методом Рунге-Кута (Runge-Kutta) четвртог реда.

За нумеричко добијање функција $a, b, c$ потребно је знати њихове почетне вредности. Како је фактор скалирања величина која представља однос растојања две тачке у датом тренутку, за почетну вредност се може узети да је $a_0 = 1$. Како је динамика система таква да даје експоненцијално ширење без обзира на почетне услове $b_0$ и $c_0$ се бирају произвољно. У раду је узето $b_0 = 0{,}1$ и $c_0 = 0{,}05$.

Почетна густина - $\rho_0$ је узета да је 0 јер ће се инфлација Старобинског одвијати без обзира на присуство материје. Када је узета у обзир ова апроксимација из једначине (13), као и једначине (14) избачен је члан који зависи од $w$ - те је једини параметар који може да варира алфа, и то само у првом случају– тј . једначини (13).

Нумеричком интеграцијом једначина (13) и (14), које представљају два одвојена случаја, добијају се зависности фактора скалирања, његовог првог и другог извода од времена као и зависност Ричијевог скалара од времена. Графици добијени за исти број итерација коришћењем једначине (14) се међусобно пореде са графицима добијеним помоћу једначине (13) за различите вредности параметра $\alpha$.

# РЕЗУЛТАТИ

Графици зависности фактора скалирања ($a$), његових извода и график зависности Ричијевог скалара ($R$) од времена су дати заједно прво за специјални случај, потом за основни случај. У првом случају ће бити изложени графици за фактор скалирања за $\alpha$ и одговарајуће $t$ - то је време које омогућава довољан број итерација да би горе наведени параметри прошли кроз потребну еволуцију. Иако вредност $t$ не поседује неки физички смисао, ова вредност је упоредива са временом мереним од стране једног локалног часовника. За случај α= 100 додати су графици и за први и други извод фактора скалирања. Крај инфлације је одређен тренутком када је $c = 0$, у истом тренутку вредност $b$ је максимална.

У специјалном случају приказаном на графицима 1 и 2 инфлација траје бесконачно и функције добијене за $a$, $b$ и $c$ одговарају експоненцијалним функцијама, што је приказано поклапањем добијене криве са експоненцијалним фитом (функција је облика $y = y_0 + Ae^{-\frac{x}{t}}$ и приказани фит одговара вредностима $y_0 = 6{,}307$, $A = 1{,}067$ и $t$=-12,1). Овако је показано да је ширење експоненцијално док је члан $R^2$ доминантан. Такође треба уочити да вредност $R$ не конвергира ка нули  већ постаје константа после малог броја итерација и износи, у овом случају, 0.082.

Такође је примећено да при повећању параметра α време трајања периода инфлације расте.

У општем случају ($\alpha = 100$ - графици 3.1,3,2.,3.3 и 4, $\alpha = 400$  - графици 5 и 6 и $\alpha = 1000$ - графици 7 и 8) ширење је експоненцијално само на почетку, након тога ширење добија форму степене функције облика $a \sim t^{\frac{2}{3}}$. Такође треба нагласити да вредност Ричијевог скалара са временом постепено опада у сва три случаја и конвергира ка нули.

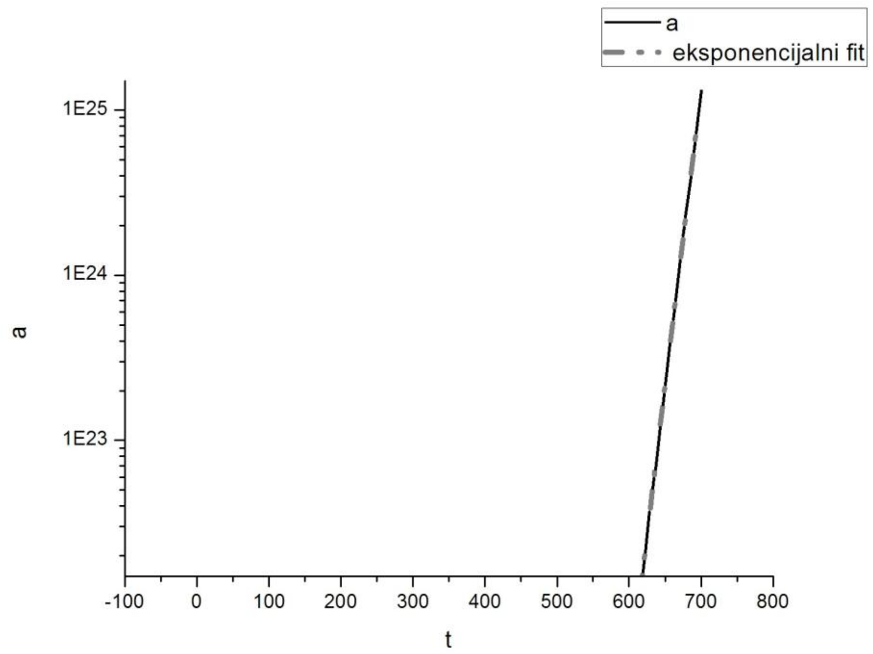


**График 1 Специјалан случај – на графицима је приказана зависност параметара a од времена t=700**

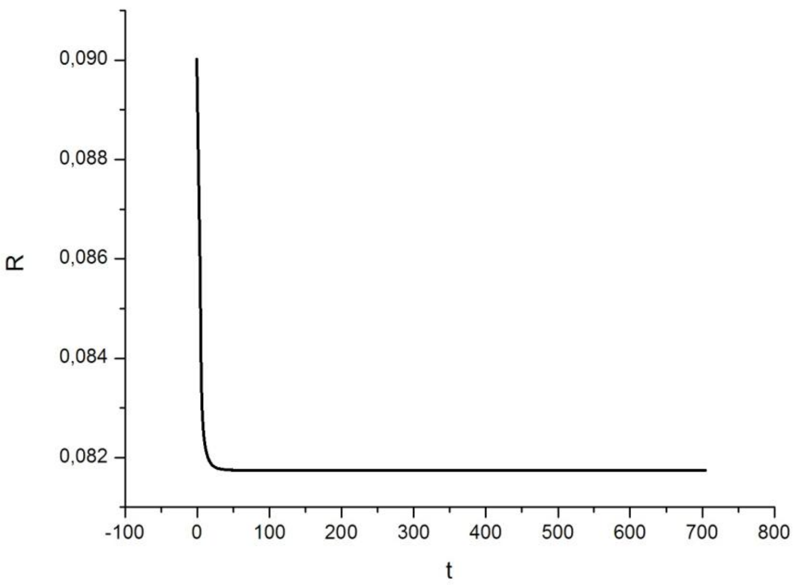


**График 2 Специјалан случај – на графицима је приказана зависност параметара R од времена t=700**

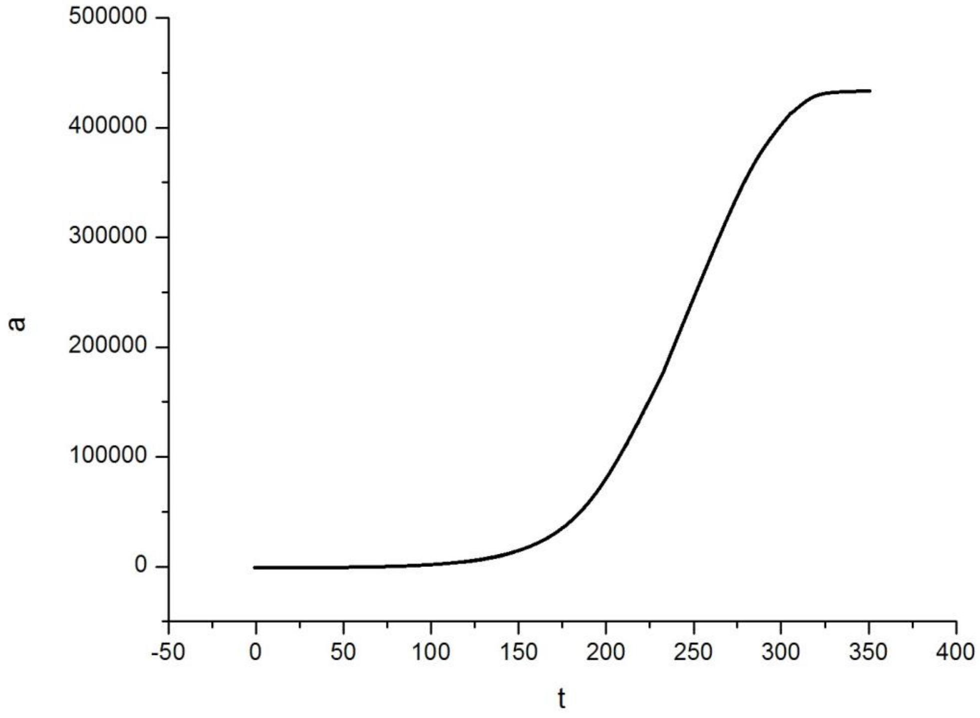


**График 3.1 Основни случај – на графицима је приказана зависност параметра а од времена t=350 и α=100**

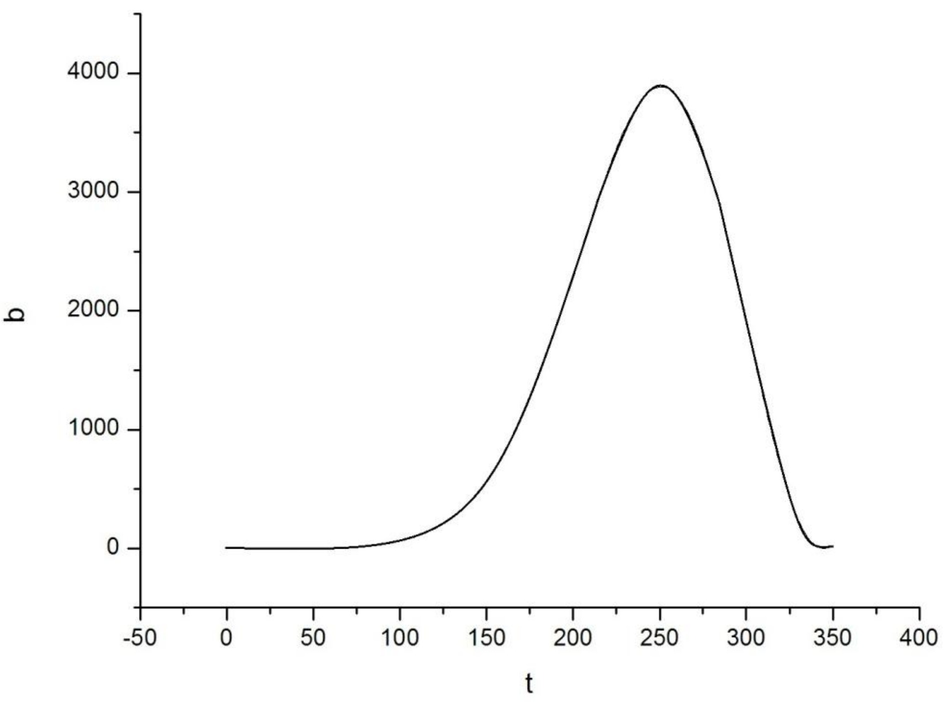


**График 3.2 Основни случај – на графицима је приказана зависност параметра b од времена t=350 и α=100**

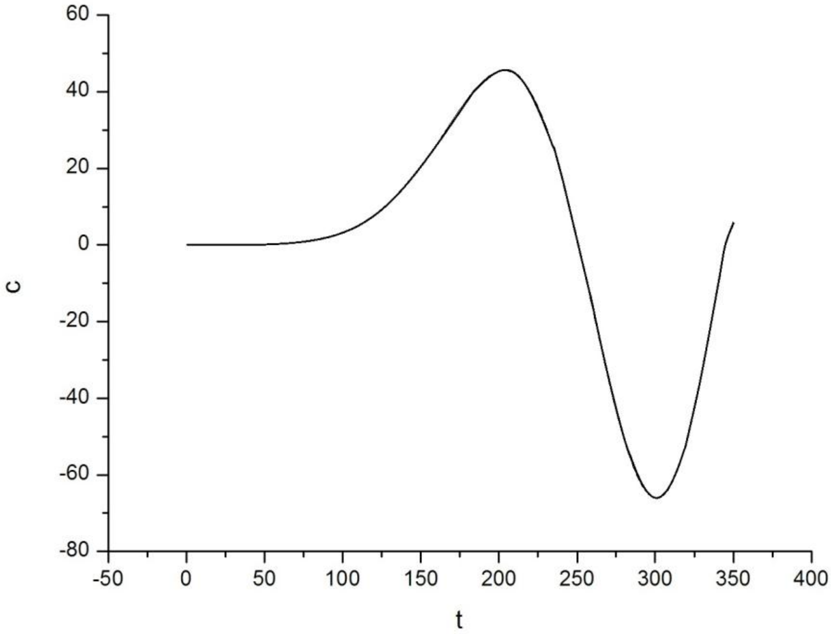


**График 3.3 Основни случај – на графицима је приказана зависност параметра c од времена t=350 и α=100**

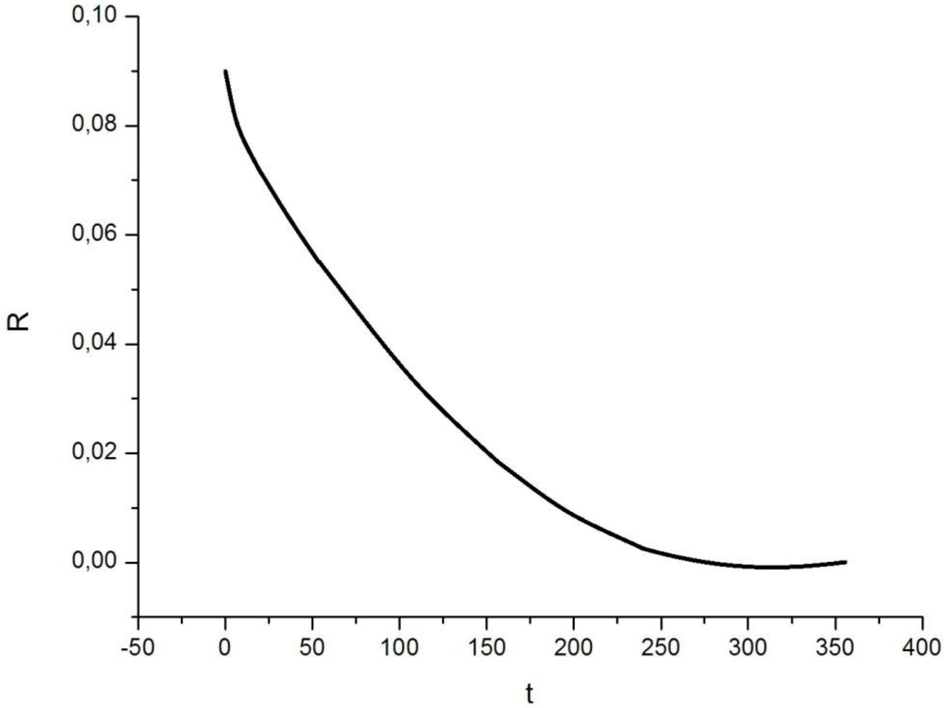


**График 4 Основни случај – на графицима је приказана зависност параметра R од времена t=350 и α=100**

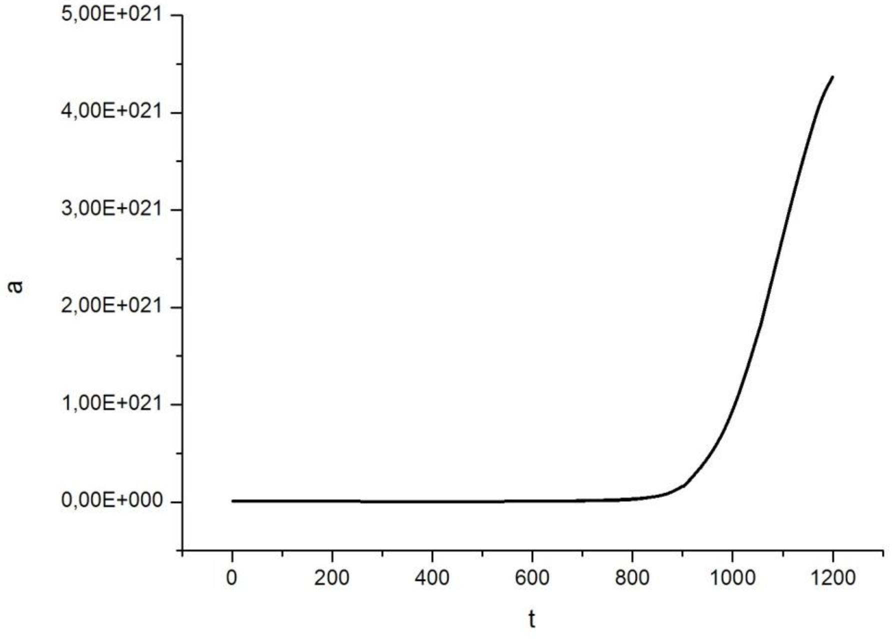


**График 5 Основни случај – на графицима је приказана зависност параметра a од времена t=1200 и α=400**

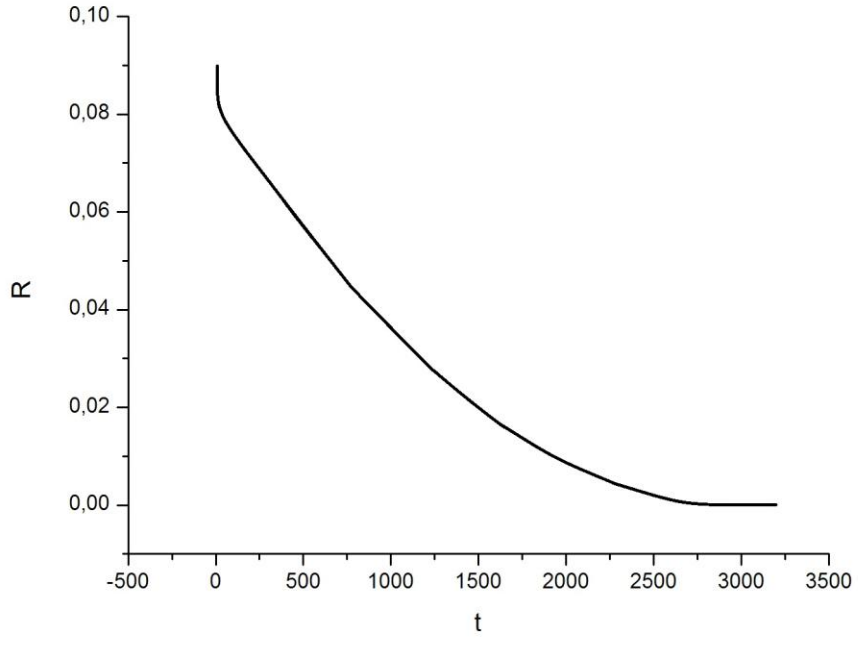


**График 6 Основни случај – на графицима је приказана зависност параметра R од времена t=1200 и α=400**

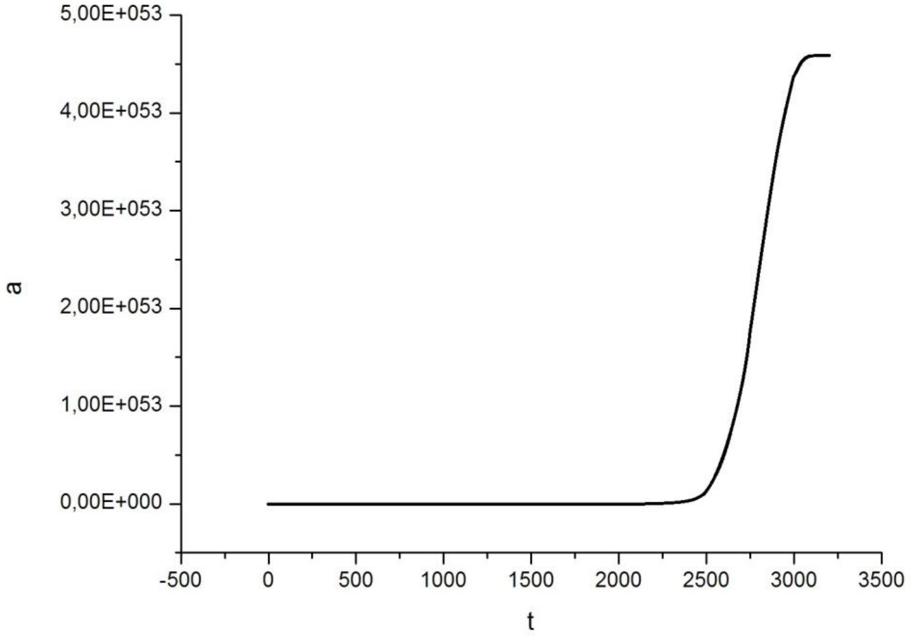


**График 7 Основни случај – на графицима је приказана зависност параметра a од времена t=3000 и α=1000**

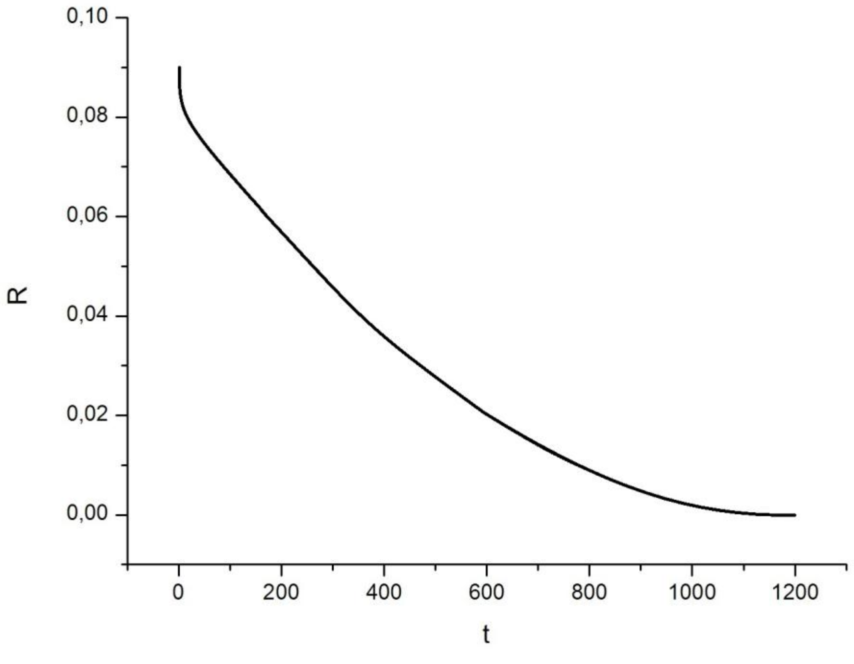


**График 8 Основни случај – на графицима је приказана зависност параметра R од времена t=3000 и α=1000**

# ЗАКЉУЧАК

Модел инфлације коришћен у раду, инфлација Старобинског, је добијен на основу модификоване ОТР која замењује скаларну кривину $R$ (Ричијев скалар) са функцијом $f(R)$ облика $f(R) = R + \alpha R^n \quad (\alpha > 0, n \in N)$, у овом раду је узето $n = 2$ и представља конкретну реализацију $f(R) = R + \alpha R^2$. Утврђено је да је ова модификација дозвољава експоненцијално ширење, што је један од основних захтева инфлација. Експоненцијално ширење које траје дужи период времена за већу вредност $\alpha$. За $\alpha \sim \infty$ добија се бесконачно експоненцијално ширење, а за мање вредности $\alpha$ добија се коначна инфлација. Да би се добио одговарајући степен ширења могу се узети различите вредности параметра $\alpha$. Модификација облика $f(R) = R + \alpha R^2$ омогућава експоненцијално ширење које глатко прелази у стандардно, степено ширење и омогућава да вредност Ричијевог скалара конвергира ка нули. Дакле, коришћени модел и модификоване Фридманове једначине су се показале подесним за описивање развоја универзума током инфлација јер задовољава основне захтеве инфлаторног модела.

При увођењу модификација или корекција у ОТР требало би испитати да ли је $\alpha$ довољно мало да истовремено омогући и да не ремети постојеће провере ОТР – што у раду није урађено. Даље, у раду је инфлација само квалитативно описана и треба извршити рескалирање коришћених јединица да би се добијене вредности могле изразити преко реалних физичких јединица. Побољшања коришћеног модела су могућа – на пример избацивање апроксимације да је $\rho_0 = 0$.

# ДОДАТАК А

Код у C++ за програм нумеричког интгратора:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* jedinice su
   vreme 1gsp=10E-18 s
   duzina 1ud=3E-10 m
   masa 1ms=2E+30 kg
   Dakle c (brzina svetlosti) je 1
*/

using namespace std;
// vrednost alfa koja se menja.
const double  alfa=100;

//funkcija koja vraca prvi izvod
double f(double a, double b, double c, double t)
{
       return b;
}

//funkcija koja vraca drugi izvod
double g(double a, double b, double c, double t)
{
       return c;
}

//funkcija koja vraca treci izvod
double h(double a, double b, double c, double t)
{
       double y = (c*c)/(2*b) - b*c/a + (3*pow(b,3))/(2*a*a);
       //double z = b/(12*alfa);
       return y; //specijalan slucaj
       //return (y - z);       //opsti slucaj
}

int main(int argc, char *argv[])
{
//promenjljive koriscene u radu
   double a, b, c, R, t;
   double k1, k2, k3, k4;
   double l1, l2, l3, l4;
   double m1, m2, m3, m4;
   double dt = 1.0E-6;
   unsigned long i =0;
```

```
//pocetni uslovi
   t = 0;
   b = 0.5;
   c = 0.25;
   a = 1;

   FILE* dokument;
   dokument = fopen("MaturskiRadizlaz01_alfa_100_t350.txt","w");

// Runge-Kutta numericka metoda

  while (t<350)
  {
   k1 = f(a, b, c, t);
   l1 = g(a, b, c, t);
   m1 = h(a, b, c, t);

   k2 = f(a + 0.5*dt*k1, b + 0.5*dt*l1, c + 0.5*dt*m1, t + 0.5*dt);
   l2 = g(a + 0.5*dt*k1, b + 0.5*dt*l1, c + 0.5*dt*m1, t + 0.5*dt);
   m2 = h(a + 0.5*dt*k1, b + 0.5*dt*l1, c + 0.5*dt*m1, t + 0.5*dt);

   k3 = f(a + 0.5*dt*k2, b + 0.5*dt*l2, c + 0.5*dt*m2, t + 0.5*dt);
   l3 = g(a + 0.5*dt*k2, b + 0.5*dt*l2, c + 0.5*dt*m2, t + 0.5*dt);
   m3 = h(a + 0.5*dt*k2, b + 0.5*dt*l2, c + 0.5*dt*m2, t + 0.5*dt);

   k4 = f(a + dt*k3, b + dt*l3, c + dt*m3, t + dt);
   l4 = g(a + dt*k3, b + dt*l3, c + dt*m3, t + dt);
   m4 = h(a + dt*k3, b + dt*l3, c + dt*m3, t + dt);

   //izracunavanje vrednosti za a, b, c, t i R
   a += 1.0/6.0 * dt *(k1+2*k2+2*k3+k4);
   b += 1.0/6.0 * dt *(l1+2*l2+2*l3+l4);
   c += 1.0/6.0 * dt *(m1+2*m2+2*m3+m4);

   R = 6*(b*b - c*a)/(a*a);

   t += dt;

   //ispis f-je t i a,b ili c
      if (i%10000 == 0)
      fprintf(dokument,"%le %le %le\n", t, a, R);
  //ispis je t, a, b i c
      //fprintf(dokument,"%le %le %le %le\n", t, a, b, c);

     i++;
  }

  fclose(dokument);

}
```

# ЛИТЕРАТУРА

[1] Ислам, J.H. 1992 „Introduction to mathematical cosmology”, Кембриџ

[2] Вукчевић Карабин, М., Атанацковић-Вукмановић О. 2003 „Општа Астрофизика”, Завод за уџбенике и наставна средства, треће изданње, Београд

[3] Де Фелице, А. Тцукијава Ш. 2010 „f(R) theories”, Living Rev. Relativity 13

[4] Лидле, А. 2005 „An Introduction To Modern Cosmology”, Вилеји

[5] Вајнберг, С. 2008 „Cosmology”, Оксфорд

[6] Пеакок J.A. 1999 „Cosmological physics”, Кембриџ

[7] Пебелс П.J.E. 1993 „Principles of physical cosmology”, Принстон

[8] Прес Х. В., Теуколски С.А. Ветерлин В.Т., 2002, „Numerical Recipes in C++ The Art of Scientific Computing”, друго издање, Кембриџ