

# Специјална теорија релативности

7.12.2004.

1. Астроном посматра комету која се креће на периферији Сунчевог система. Правац брзине комете заклапа угао  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) са правцем комета-астроном. Брзина комете у односу на астронома је  $v$ , док је растојање између комете и астронома  $R$ . Колика је брзина комете у односу на астронома? Узимајући у обзир да је брзина простирања светлости коначна, одредити колика је угаона брзина комете коју „види“ астроном?
2. Постулати специјалне теорије релативности гласе:
  - *Закони физике су исти у свим инерцијалним системима референце. Не постоји издвојени привилеговани систем референце. (Принцип релативности)*
  - *Брзина светлости у вакууму има исту вредност  $c$  у свим инерцијалним системима референце, независно од релативног кретања извора и посматрача (Принцип константности брзине светлости).*

Користећи ове постулате извести Лоренцове трансформације.

3. Извести формуле за трансформацију радијус вектора  $\vec{r}$  и времена  $t$  при преласку из једног инерцијалног система у други ако се други систем у односу на први креће брзином  $\vec{v}$  произвољног правца.
4. Воз дужине  $l = 350\text{m}$  почиње да се по правим шинама креће константним убрзањем  $a = 3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . После  $t = 30\text{s}$  од почетка кретања, укључен је фар локомотиве (догађај 1), а кроз  $\tau = 60\text{s}$  после тога укључена је сигнална лампа на последњем вагону воза (догађај 2). Наћи растојања међу местима у којима су се десили ти догађаји у референтним системима везаним за воз и земљу. Коликом и каквом сталном брзином  $V$  треба да се креће неки референтни систем у односу на земљу, да би се у њему оба догађаја десила у истој тачки?
5. Систем  $S'$  креће се у односу на систем  $S$  брзином  $v_1$  дуж  $x$  осе, а систем  $S''$  креће се брзином  $v_2$  дуж  $y'$  осе. Наћи матрицу Лоренцове трансформације која описује прелазак са система  $S$  на систем  $S''$ . Да ли су Лоренцове трансформације комутативне?
6. Посматрач из система  $S$  регистровао је да се догађај  $A$  дешава на  $x$  оси, а  $10^{-6}\text{s}$  касније региструје догађај  $B$  на растојању  $600\text{m}$  од места на коме се десио догађај  $A$ . Постоји ли други инерцијални систем  $S'$  који се креће паралелно  $x$  оси тако да посматрач ове

догађаје види истовремено? Ако постоји одредити вектор брзине система  $S'$  у односу на  $S$ . Колико је растојање између догађаја  $U$  и  $S'$ ?

7. Два инерцијална система крећу се брзинама  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  у односу на трећи референтни систем. Користећи инваријантност скаларног производа квадриквектора брзина, показати да релативна брзина система задовољава релацију:

$$v^2 = c^2 \frac{c^2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{(c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2}.$$

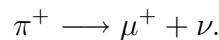
8. Две ракете имају  $A$  и  $B$  имају брзине  $v_A = 0,6c$  и  $v_B = 0,9c$  респективно у односу на земљу. За посматрача на Земљи оне се крећу у узајамно нормалним правцима. Колика је брзина  $A$  у односу на ракету  $B$ ?
9. У бајци о релативистичким метлама три вештице  $K$ ,  $L$  и  $M$  испитују своје моћи телепатског одређивања пулса. Вештица  $K$  мирује док се вештице  $L$  и  $M$  крећу на релативистичким метлама константним брзинама дуж истог правца. Вештица  $K$  каже да је њен пулс 75 откуцаја у минути, а да пулс вештице  $L$  износи 60 откуцаја у минути. Вештица  $L$  тврди обрнуто, тј. да је њен пулс 75 откуцаја у минути, а да пулс вештице  $K$  износи 60 откуцаја у минути. Вештица  $M$  каже да вештице  $K$  и  $L$  имају једнак пулс. Одредити брзине вештица  $L$  и  $M$  у односу на вештицу  $K$ , ако је познато да се ни у бајкама вештице не крећу брже од светлости.
10. Посматрач  $A$  који се налази на Земљи сваких 6 min шаље светлосни сигнал. Посматрач  $B$  је на свемирској станици која мирује у односу на Земљу. Ракета  $C$  путује од  $A$  ка  $B$  брзином  $0,6c$  у односу на  $A$ . У којим временским интервалима  $C$  прима сигнале од  $A$ ? Ако  $C$  пошаље сигнал на  $B$  чим га прими од  $A$ , у којим временским интервалима  $B$  прима сигнале од  $C$ ?
11. Инерцијални референтни систем  $S'$  креће се брзином  $\vec{v}$  у односу на инерцијални систем  $S$ . Под углом  $\theta'$  у односу на правац кретања у систему  $S'$  је испален метак брзином  $\vec{v}'$ . Колики је угао  $\theta$  под којим је испален метак када се гледа из система  $S$ ? Колики је угао  $\theta$  ако је тај метак фотон?

12. Колица 1 се брзином  $v$  крећу по дугачком столу. По колицима 1 се крећу колица мања колица 2 брзином  $v$  у односу на њих, у истом правцу. По колицима 2 се, у истом правцу, релативном брзином  $v$  у односу на њих крећу колица 3, итд. Укупно има  $n$  колица. Наћи брзину  $v_n$   $n$ -тих колица у односу на сто? Чему тежи  $v_n$  када  $n \rightarrow \infty$ ?
13. У инерцијалном систему  $S$  честица се креће брзином  $\vec{u}$ , а убрзање јој је  $\vec{a}$ . Инерцијални систем  $S'$  креће се брзином  $\vec{v}$  у односу на систем  $S$ . Показати да су компоненте убрзања у правцу паралелном вектору  $\vec{v}$  и нормално на њега, дате изразима:

$$\vec{a}'_{\parallel} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}\right)^3} \vec{a}_{\parallel}$$

$$\vec{a}'_{\perp} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}\right)^3} \left[ \vec{a}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{u}) \right].$$

14. Огледало се креће у правцу нормалном на своју површину брзином  $v$ . Колики угао са нормалом на огледало заклапа одбијени зрак светлости, ако је угао између нормале и упадног зрака  $\theta$ ? Како се при одбијању мења фреквенција светлости? Фотоне посматрати као кулгице које се у систему у коме огледало мирује еластично одбијају од њега.
15. Огледало се креће у правцу паралелном са равни огледала. Доказати да је упадни угао фотона једнак углу под којим се фотон одбија од огледала.
16. До посматрача стиже сигнал светлости од извора који се креће брзином  $\vec{v}$ . У тренутку када је сигнал емитован угао између вектора  $\vec{v}$  и праве која садржи извор и посматрача износи  $\theta$ . Како зависи  $\theta$  од  $v$ , ако посматрач не уочава никакву промену у фреквенцији светлости?
17. Позитивни  $\pi$ -мезон (маса мировања  $m_{\pi} = 273m_e$ ) распада се на неутрино (маса мировања  $m_{\nu} = 0$ ) и  $\mu$ -мезон (маса мировања  $m_{\mu} = 207m_e$ ):



Одредити кинетичке енергије неутрина и  $\mu$ -мезона. Енергија мировања електрона је 511 keV.

18. Сноп пиона енергије  $E_0$  креће се дуж  $z$ -осе. Неки од пиона распадају се на мион и неутрино при чему неутрино излеће под углом  $\theta_{\nu}$  у односу на  $z$ -осу. Маса мировања пиона, миона и неутрина су  $m_{\pi}$ ,  $m_{\mu}$  и  $m_{\nu} = 0$ , респективно. Израчунати енергију неутрина у функцији  $\theta_{\nu}$  у случају  $E_0 \gg m_{\pi}c^2$  и  $\theta_{\nu} \ll 1$ .

19. Фотон фреквенце  $\nu_0$  расејава се на електрону који се креће униформно. Импулс  $\vec{p}_0$  електрона заклапа угао  $\theta$  са правцем кретања фотона. Наћи зависност фреквенце  $\nu$  расејаног фотона од правца његовог кретања. Посебно размотрити случај  $p_0 = 0$ .
20. Честица масе мировања  $m$  и енергије  $E$  судара се са истом таквом честицом која мирује. Наћи укупну кинетичку енергију честица у систему центра масе.
21. Користећи законе одржања показати да слободни електрон не може ни да апсорбује ни да израчи фотон.