Додатна за први разред МГ
9.март 2005.г.

Цели делови

Милан Новаковић

Дефиниција: За реалан број x постоји јединствен цео број m за који важи $m \leqslant x < m+1$. **Цео део** броја x је управо тај цео број m. Означава се и $\lfloor x \rfloor = m$.

Дефиниција: Реалан број $x - \lfloor x \rfloor$ називамо **разломљени део** броја x и означавамо са $\{x\}$.

Дефиниција: Са $((x))$ се најчешће обележава најближи цео број броју x, при чему се, уколико он није једнозначо одређен, узима већи.

1. Доказати следеће особине:
   (а) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$;
   (б) $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor xy \rfloor$;
   (в) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$ и $\{x\} + \{-x\} = 1$ ако x није цео број;
   (г) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ и $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ ако је n природан број.

2. **(Хермит)** Доказати да за сваки реалан број x и природан број n важи
$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor.$$

3. Израчунати
$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor.$$

4. Доказати да важи
$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + \ldots = n$$

5. Ако је
$$A = \sum_{k=0}^{2000} \left\lfloor \frac{3^k + 2000}{3^{k+1}} \right\rfloor \qquad \text{и} \qquad B = \sum_{k=0}^{2000} \left\lfloor \frac{3^k - 2000}{3^{k+1}} \right\rfloor$$
израчунати $A - B$.

6. Нека је x_n цифра јединица децималног записа броја $\lfloor \sqrt{2}^n \rfloor$, да ли је x_n периодичан?

7. Решити $\lfloor \sqrt[3]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[3]{n^3-1} \rfloor = 400$.

8. Доказати да $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \ldots + \lfloor 32x \rfloor = 12345$ нема решења.

9. За сваки природан број n одредити колико постоји реалних бројева x таквих да је $\{x\}^2 = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$ и $1 \leqslant x \leqslant n$.

10. Доказати да за сваки природан број n важи $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

11. Који бројеви могу да се представе у виду $\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \rfloor$ где је n природан број?

12. Нека је $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \left\lfloor \frac{3}{2} a_n \right\rfloor$ за $n \geqslant 1$. Доказати да овај низ садржи бесконачно много парних и бесконачно много непарних бројева.

13. Доказати да за сваки природан број n важи $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$.

14. Наћи све природне бројеве за које важи $1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor \mid n$.

15. Наћи формулу за n-ти по реду неквадрат.

16. Нека је $f(n) = n + \lfloor n \rfloor$. Доказати да за свако m низ $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \ldots$ садржи потпун квадрат.

17. Доказати да за узајамно просте p и q важи

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

18. **(Beatty)** Доказати да ако су α и β ирационални бројеви за које важи

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

онда се у низу бројева $\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots, \lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, \ldots$ сваки природан број појављује тачно једном.

19. Доказати обрнут смер претходне теореме.

20. Доказати следеће уопштење: Ако су α и β ирационални бројеви за које важи

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = m$$

онда се у низу бројева $\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots, \lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, \ldots$ сваки природан број појављује тачно m пута.

21. Израчунати

$$\left(\left(\frac{n}{2}\right)\right) + \left(\left(\frac{n}{4}\right)\right) + \left(\left(\frac{n}{8}\right)\right) + \ldots$$

22. Доказати да за сваки природан број важи

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

где је $\tau(n)$ број природних делилаца броја n.

23. Доказати да за сваки природан број важи

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) = 1 \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + n \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

где је $\sigma(n)$ збир природних делилаца броја n.

24. Из скупа природних бројева записујмо бројеве на следећи начин: Прво запишимо број 1 и избацимо $2 = 1 + 1$. Затим у другом кораку запишимо следећи слободан број 3 и избацимо $3 + 2 = 5$. У трећем кораку запишимо следећи слободан број 4 и избацимо $7 = 4 + 3$. У n-том кораку запишимо најмањи број који до сада није био ни записан ни избачен и избацимо број који је за n већи од тог броја. Тиме добијамо низ бројева $1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14 \ldots$. Наћи формулу за n-ти број по реду.

25. За сваки реалан број x нека је $S_x = \{\lfloor nx \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$. Доказати да не постоје α, β и γ такви да су S_α, S_β и S_γ партиција скупа $\mathbb{N}$.
Напомена: За случај два реална броја видети Beatty-јеву теорему.

26. Доказати да за сваки реалан број x и природан број m важи

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\left\{2^n x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\leqslant 1.$$

27. Нека су p и q узајмно прости природни бројеви и нека је $p'=\frac{p-1}{2}$ и $q'=\frac{q-1}{2}$. Доказати да важи

$$\left(\left\lfloor\frac{q}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2q}{p}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{p'q}{p}\right\rfloor\right)+\left(\left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2p}{q}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{q'p}{q}\right\rfloor\right)=p'q'.$$

28. Нека је $f(x)$ непрекидна растућа функција. Доказати да важи $\lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor=\lfloor f(x)\rfloor$ акко је свако x за које је $f(x)$ цео број и само x цео број.

29. Израчунати $\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor$.

30. Доказати да је

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{n}\rfloor=\lfloor n\rfloor\left(n-\frac{(2\lfloor n\rfloor+5)(\lfloor n\rfloor-1)}{6}\right).$$

31. Доказати да је

$$\frac{1}{((1))}+\frac{1}{((2))}+\frac{1}{((3))}+\ldots+\frac{1}{((\sqrt{n(n+1)}))}=2n.$$

32. Доказати да је $\lfloor\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\rfloor=n^2+3n$

33. Доказати да за природне бројеве m и n и реалан број x важи

$$\sum_{k=0}^{n}\left\lfloor\frac{x+mk}{n}\right\rfloor=\frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}+d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor=\sum_{k=0}^{m}\left\lfloor\frac{x+nk}{m}\right\rfloor.$$

34. Доказати да за сваки природан број n важи $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\rfloor=\lfloor\sqrt{16n+20}\rfloor$.

35. Доказати да међу бројевима облика $\lfloor 2^{k+\frac{1}{2}}\rfloor$, где је k природан број, има бесконачно много парних и бесконачно много непарних бројева.

36. Нека је n природан број већи од 1. Ако је

$$S_1=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{(n-1)n}\rfloor$$

$$S_2=\left\lfloor\frac{1}{n}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{4}{n}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{9}{n}\right\rfloor+\ldots\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{n}\right\rfloor,$$

доказати да је $S_1+S_2\geqslant(n-1)^2$, при чему једнакост важи ако и само ако број n није дељив квадратом неког природног броја већег од 1.

37. Наћи све реалне бројеве x и y за које је $x\lfloor ny\rfloor=y\lfloor nx\rfloor$ за сваки природан број n.

38. Доказати да низ $a_n=\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$ садржи бесконачно много квадрата.

39. Колико различитих целих бројева има међу бројевима $\left\lfloor\frac{n^2}{1998}\right\rfloor$ где је $1\geqslant n\geqslant 1997$?

40. Нека је $k\geqslant 1$ реалан број такав да за свака два природна броја m и n, ако n дели m, онда и $\lfloor kn\rfloor$ дели $\lfloor km\rfloor$. Доказати да је k цео број.