Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za prvi razred, šk. 2005/06.

OSNOVI TEORIJE DELJIVOSTI

Teorema. Relacija deljivosti $|$, NZD (u oznaci $(\cdot,\cdot)$) i NZS (u oznaci $[\cdot,\cdot]$) imaju sledeća (netrivijalna) svojstva:

- ako $a \mid b$, tada je $|a| \leq |b|$;
- ako $a \mid b$ i $a \mid c$, tada $a \mid b+c$;
- ako $a \mid b$, tada $a \mid bc$, za svako c;
- ako $a \mid c$ i $b \mid c$, tada $[a,b] \mid c$;
- ako $ab \mid ac$, tada $b \mid c$;
- ako $a \mid bc$ i $(a,c)=1$, tada $a \mid b$;
- $(a, b+ak) = (a,b)$;
- $ab = [a,b] \cdot (a,b)$;
- ako je $(a,b)=d$, tada postoje x i y takvi da je $ax+by=d$.

Teorema. Ukoliko su u jednakosti $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$ svi sabirci sem jednog deljivi nekim celim brojem m, tada je i taj sabirak deljiv sa m.

Teorema. Ukoliko je proizvod dva uzajamno prosta broja potpun m-ti stepen, tada je svaki od tih brojeva potpun m-ti stepen.

Teorema. Ukoliko za cele brojeve važi $ab=cd$, tada postoje celi brojevi m, n, p i q takvi da je

$$a = mn, \quad b = pq, \quad c = mp, \quad d = nq.$$

Posledica. Ukoliko je $ab=cd$, $(a,c)=1$ i $(b,d)=1$, tada je $a=d$ i $b=c$.

Kanonska reprezentacija prirodnog broja. Svaki prirodan broj se na jedinstven način može predstaviti u obliku $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}$, gde su $p_1, p_2, \ldots, p_l$ različiti prosti brojevi.

RAZNI ZADACI

1. Odrediti sve proste brojeve p takve da je broj: (a) $2p$; (b) $3p$ za 1 veći od kuba prirodnog broja.

2. Naći sve cele brojeve $x \neq 3$ takve da $x-3 \mid x^3-3$.

3. Zbir cifara broja x jednak je y, a zbir cifara broja y jednak je z. Odrediti broj x ako je $x+y+z=60$.

4. Odrediti sve cele brojeve a za koje su izrazi $96+a$ i $5+a$ kubovi celih brojeva.

5. (Interno 2005) Odrediti sve $n \in \mathbf{N}$ tako da važi $n + [\sqrt{n}] + 1 \mid n^2+n+1$.

6. Naći sve trojke (x,y,z) prirodnih brojeva takvih da je $x! + y! = 15 \cdot 2^{z!}$.

7. Prirodni brojevi a, b i c su takvi da su brojevi $p = b^c + a$, $q = a^b + c$ i $r = c^a + b$ prosti. Dokazati da su dva od brojeva p, q, r međusobno jednaki.

8. Naći sve brojeve $b \in \mathbf{N}$ za koje postoji $a \in \mathbf{N}$ tako da $b \mid a^2+1$ i $b \mid a^3-1$.

9. (Belorusija 1997) Naći sve parove prirodnih brojeva a i b, koji zadovoljavaju jednakost $2a^b - b = 1997$.

10. (Savezno 2004, 1 raz) Naći sve parove prirodnih brojeva (a,b) za koje važi $5a^b - b = 2004$.

11. Naći sve proste brojeve oblika $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

12. (Savezno 1977, 1 raz) Odrediti celobrojna rešenja jednačine $p(x+y)=xy$, gde je p dati prost broj.

13. (Savezno 1981, 1 raz) Prirodni brojevi a, b i c su takvi da su $a+c$ i $b+c$ kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva. Dokazati da su $ab+c$ i $ab+a+b+c$ takođe kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva.

14. (Savezno 1982, 1 raz) Ako za prirodne brojeve a, b, c, d važi $(a+b)^2+a=(c+d)^2+c$, dokazati da je $a=c$ i $b=d$.

15. Neka su x i y racionalni brojevi, a a i b celi takvi da je $y^2=x^3+ax+b$. Dokazati da postoje celi brojevi r, s i t takvi da je $(s,r)=(t,r)=1$, $x=s/r^2$ i $y=t/r^3$.

16. (Savezno 2004, 2 raz) Dokazati da ako su brojevi a, b, c i broj

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

prirodni tada je broj abc potpun kub prirodnog broja.

17. (Rusija 1997) Odredi sve trojke (l, m, n) različitih prirodnih brojeva za koje važi

$$(l,m)^2=l+m, \quad (m,n)^2=m+n, \quad (n,l)^2=n+l.$$

18. (Savezno 1980, 2 raz) Odrediti sve cele brojeve x tako da $x^2+3x+24$ bude potpun kvadrat.

19. (Savezno 1978, 3 raz) Dokazati da je ceo broj $r>2$ složen, ako i samo ako je tačno bar jedno od sledeća dva tvrđenja:

(a) za neko $s \in \{2,3,\ldots\}$ je $r=2^s$;

(b) za neke $u, v \in \{3,4,\ldots\}$ $(u \leq v)$ je $r=\frac{u}{2}(2v-u+1)$.

20. Neka je p prost broj, a n prirodan takav da $p \mid n^2+n+3$. Dokazati da postoji prirodan broj k, takav da $p \mid k^2+k+25$.

21. (Savezno 1974, 2 raz) U skupu celih brojeva rešiti jednčinu $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

22. (Savezno 1975, 4 raz) Rešiti jednačinu

$$1!+2!+\ldots+x!=y^z,$$

gde su x, y, z prirodni brojevi i $z>1$.

23. Dokazati da za svaki prirodan broj n broj

$$2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$$

ima bar n različitih prostih delilaca.

24. Da li jednačina $w^4+x^7+y^9=z^{11}$ ima rešenja u skupu prirodnih brojeva?

25. (Savezno 1986, 2 raz) Neka su x i y prirodni brojevi za koje važi $2x^2+x=3y^2+y$. Dokazati da su brojevi $x-y, 2x+2y+1, 3x+3y+1$ potpuni kvadrati.

26. (Savezno 1987, 3-4 raz) Neka su a i m prirodni brojevi i x ceo broj, takav da m deli a^2x-a. Dokazati da postoji ceo broj y, takav da m deli brojeve a^2y-a, ay^2-y.

27. Neka su x i y prirodni brojevi takvi da je $3x^2+x=4y^2+y$. Dokazati da je $x-y$ potpun kvadrat.

28. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (x, y) takvih da je $x^{y^2}=y^{x+2}$.

29. (IMO 1986, 1 zad) Neka je d prirodan broj različit od 2,5,13. Dokazati da se u skupu $\{2,5,13,d\}$ mogu izabrati dva različita broja a i b tako da $ab-1$ nije kvadrat celog broja.

30. (Savezno 1971, 3 raz) Neka su a, b, p, q, r, s prirodni brojevi takvi da važi $qr-ps=1$ i $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}<\frac{r}{s}$. Dokazati da je $b \geq q+s$.

31. (IMO 1979, 4 zad) Neka su p i q prirodni brojevi, takvi da je

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

Dokazati da je p deljiv sa 1979.

32. (IMO 1982, 4. zad) Data je jednačina $x^3-3xy^2+y^3=n$. Ako je n takav prirodan broj da data jednačina ima celobrojno rešenje (x, y) dokazati da ona tada ima bar tri celobrojna rešenja. Dokazati da za $n=2891$ ta jednačina nema nijedno celobrojno rešenje.

33. (Savezno 1968, 4 raz) Neka su p i q prosti brojevi, broj q^3-1 deljiv sa p, a broj $p-1$ deljiv sa q. Dokazati da je $p=1+q+q^2$.

34. (Mala olimpijada 1968) Da bi prirodan broj $n>3$ bio prost neophodno je i dovoljno da postoji prirodan broj a, takav da je $n! = n(n-1)(an+1)$. Dokazati.

35. (Republičko 1996, 1 raz) Neka je $n \in \mathbf{N}$ i $d \mid 2n^2$. Da li broj n^2+d može biti kvadrat celog broja?

36. (Sank-Petersburg 1997)

(a) Naći sve parove različitih prirodnih brojeva a i b takvih da $(b^2+a) \mid (a^2+b)$ i da je b^2+a potpun stepen prostog broja.

(b) Neka su a i b različiti prirodni brojevi veći od 1 takvi da $(b^2+a-1) \mid (a^2+b-1)$. Dokazati da b^2+a-1 ima bar dva prosta delioca.

37. (IMO 1977, 5 zad) Neka su a i b pozitivni celi brojevi. Pri deljenju a^2+b^2 sa $a+b$ dobija se količnik q i ostatak r. Naći sve parove (a,b) za koje je $q^2+r=1977$.

38. (IMO 1992, 1 zad) Naći sve cele brojeve a,b,c, takve da je $1<a<b<c$ i da je broj $abc-1$ deljiv brojem $(a-1)(b-1)(c-1)$.

39. (IMO 1994, 4 zad) Odrediti sve parove (m,n) prirodnih brojeva za koje je $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ ceo broj.

40. (IMO 1998, 4 zad) Odrediti sve parove prirodnih brojeva (x,y) takve da $xy^2+y+7 \mid x^2y+x+y$.

41. (Savezno 1970, 4 raz) Ako je p prost broj, dokazati da je $\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}-2$ deljiv sa p^2.

42. (Interno 2005) Naći sve proste brojeve p takve da je p^3+p^2+p+1 potpun kvadrat.

43. Naći sve proste brojeve p takve da je $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$, potpun kvadrat celog broja.

44. Dokazati da se prost broj ne može na dva različita načina predstaviti kao zbir dva kvadrata.

45. (Iran 1998) Neka su a i b prirodni brojevi za koje je broj $p=\dfrac{b}{4}\sqrt{\dfrac{2a-b}{2a+b}}$ prost. Koja je maksimalna vrednost broja p?

46. (IMO 2002, 4 zad) Neka je $n \geq 2$ prirodan broj sa deliocima $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$. Dokazati da je broj $d_1d_2+d_2d_3+\ldots+d_{k-1}d_k$ uvek manji od n^2, i odrediti kada je on delilac broja n^2.

47. (IMO 1995, predlog) Naći sve prirodne brojeve x i y takve da je $x+y^2+z^3=xyz$, gde je z najveći zajednički delilac brojeva x i y.

48. Naći sve cele brojeve n za koje je broj $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ racionalan.

49. Odrediti sve proste brojeve p i q takve da je:
(a) $p(p+1)+q(q+1)=n(n+1)$; (b) $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$,
za neki prirodan broj n.

50. Naći sve parove prostih brojeva p, q takve da je

$$\frac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\frac{q^3-1}{q-1},$$

za neki prirodan broj n.

51. (Republičko 2005, 2 raz) Neka su a,b,c prirodni brojevi koji zadovoljavaju jednakost $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ i neka je $d=(a,b,c)$. Dokazati da su $abcd$ i $d(b-a)$ potpuni kvadrati.

52. (Savezno 2005, 2 raz) Neka su a i b prirodni brojevi, $K=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ i $A=\dfrac{a+b}{2}$. Ako je $\dfrac{K}{A}$ prirodan broj, dokazati da je $a=b$.

53. (Savezno 2005, 1 raz) Naći sve prirodne brojeve n sa sledećim svojstvom: za svaki pozitivan delilac d broja n, broj $d+1$ deli $n+1$.

© Marko Radovanović
radmarko@yahoo.com
novembar-decembar 2005.