Математичка гимназија у Београду
Додатна настава за први разред
05.02.2006.

Геометрија

Миливоје Лукић

Синусна теорема: Нека су a, b, c дужине страница, а α, β, γ одговарајући углови троугла ABC, и нека је R дужина описаног круга око тог троугла. Тада је

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Косинусна теорема: При истим ознакама као у претходној теореми, важи

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Лема 1: Нека је ABC троугао и A_1 тачка на правој BC. Тада је

$$\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC} = \frac{BA_1}{A_1C}\,\frac{AC}{AB}.$$

Чевина теорема: Нека је ABC троугао и нека су A_1, B_1 и C_1 тачке на правама BC, AC и AB, респективно. Тада је потребан и довољан услов да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки или су паралелне

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\,\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\,\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1.$$

Чевина теорема у тригонометријском облику: Нека је ABC троугао и нека су A_1, B_1 и C_1 тачке на правама BC, AC и AB, респективно. Тада је потребан и довољан услов да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки или су паралелне

$$\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\,\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\,\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA} = 1.$$

Менелајева теорема: Нека је ABC троугао и нека су A_1, B_1 и C_1 тачке на правама BC, AC и AB, респективно. Тада је потребан и довољан услов да су тачке A_1, B_1 и C_1 колинеарне

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\,\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\,\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

Менелајева теорема у тригонометријском облику: Нека је ABC троугао и нека су A_1, B_1 и C_1 тачке на правама BC, AC и AB, респективно. Тада је потребан и довољан услов да су тачке A_1, B_1 и C_1 колинеарне

$$\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\,\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\,\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA} = -1.$$

Хамилтонова теорема: Нека је O центар описаног круга, а H ортоцентар троугла ABC. Тада је

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Теорема о Ојлеровој правој: У произвољном троуглу ABC ортоцентар H, тежиште M и центар описаног круга O су колинеарни, и тачка M дели дуж HO у односу $2:1$.

Теорема о Симсоновој правој: Нека је ABC троугао и P тачка у његовој равни. Нека су P_a, P_b и P_c подножја нормала из P на BC, AC и AB, редом. Тачке P_a, P_b и P_c су колинеарне ако и само ако је тачка P на кругу описаном око троугла ABC. Права $P_aP_bP_c$ се зове *Симсонова права* тачке P.

Птоломејева неједнакост: За произвољне тачке A, B, C, D у равни важи

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD,$$

при чему једнакост важи ако и само ако тачке A, B, C, D све припадају истом кругу или правој, тако да пар тачака A, C дели пар B, D.

Лема 2: Нека су AB и XY две праве у истој равни. Тада је

$$AB \perp XY \quad \Leftrightarrow \quad AX^2 - AY^2 = BX^2 - BY^2.$$

Карноова теорема: Нека су A_1, B_1, C_1 тачке у равни троугла ABC, и нека су a, b, c нормале редом из A_1 на BC, из B_1 на AC, из C_1 на AB. Праве a, b, c се секу у једној тачки ако и само ако је

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0.$$

Теорема 1: У троуглу ABC угао код темена B је двапут већи од угла код темена A ако и само ако је $AC^2 = BC(AB + BC)$.

Потенција тачке у односу на круг: Дат је круг $k(O, R)$ и тачка A. Посматрајмо праву a, која пролази кроз тачку A, и сече круг k у тачкама M и N. Производ $\overline{AM} \cdot \overline{AN}$ не зависи од избора праве a и једнак је $OA^2 - R^2$. Ова вредност назива се *потенција тачке A у односу на круг k*.

Радикална оса два круга: Геометријско место тачака у равни које имају исту потенцију у односу на кругове k_1 и k_2 назива се *радикална оса* кругова k_1 и k_2. Радикална оса је права нормална на O_1O_2, где су O_1 и O_2 центри кругова k_1 и k_2.

Радикални центар три круга: Радикални центар кругова k_1, k_2, k_3 чији центри нису колинеарни је тачка која има исту потенцију у односу на сва три круга.

1. Нека кругови k_1 и k_2, који се секу у тачкама A и B, имају заједничку тангенту CD, при чему је $C \in k_1$ и $D \in k_2$. Доказати да је $\angle CAD + \angle CBD = 180^\circ$.

2. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао, и H_a, H_b, H_c, H_d ортоцентри троуглова BCD, ACD, ABD, ABC, редом. Доказати да се дужи AH_a, BH_b, CH_c, DH_d секу у једној тачки.

3. Нека је P тачка у равни троугла ABC. Доказати да се праве симетричне правама AP, BP, CP у односу на унутрашње симетрале углова код A, B, C троугла ABC секу у једној тачки или су паралелне и означимо тачку њиховог пресека (уколико нису паралелне) са Q. За тачке P и Q кажемо да су *изогонално спрегнуте*.

4. Круг S додирује кругове S_1 и S_2 у тачкама A_1 и A_2. Доказати да права A_1A_2 пролази кроз тачку пресека заједничких спољашњих, или кроз тачку пресека заједничких унутрашњих тангенти S_1 и S_2.

5. Нека је H ортоцентар троугла ABC, а A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, AC, AB, редом. Круг са центром H сече праву B_1C_1 у тачкама D_1, D_2, праву A_1C_1 у тачкама E_1, E_2, а праву A_1B_1 у тачкама F_1, F_2. Доказати да је

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2\,.$$

6. (ИМО1997.предлог) Нека су A, B и C три неколинеарне тачке. Доказати да постоји тачно једна тачка X у равни ABC таква да

$$XA^2 + XB^2 + AB^2 = XB^2 + XC^2 + BC^2 = XC^2 + XA^2 + CA^2\,.$$

7. Нека је ABC једнакостранични троугао, и P његова унутрашња тачка. Нека су P_a, P_b, P_c подножја нормала из P редом на странице BC, AC, AB. Доказати да је
$$BP_a + CP_b + AP_c = CP_a + AP_b + BP_c\,.$$

8. Нека је ABC једнакостранични троугао, и P његова унутрашња тачка. Нека су P_1, P_2, P_3 додирне тачке кругова уписаних редом у троуглове PBC, PAC, PAB са страницама редом BC, AC, AB. Доказати да је
$$BP_1^2 - CP_1^2 + CP_2^2 - AP_2^2 + AP_3^2 - BP_3^2 = 0.$$

9. Нека су ABC и KLM два троугла у истој равни. Означимо са $n(X,p)$ нормалу из тачке X на праву p. Доказати: ако се $n(K,BC)$, $n(L,AC)$, $n(M,AB)$ секу у једној тачки, онда се $n(A,LM)$, $n(B,KM)$, $n(C,KL)$ секу у једној тачки.

10. Дат је оштроугли троугао ABC. Означимо са R полупречник описаног, а са r полупречник уписаног круга троугла ABC. Означимо са x, y, z растојања центра описаног круга од страница BC, AC, AB. Доказати да је $x + y + z = R + r$.

11. Висине оштроуглог троугла ABC се секу у тачки H, а на дужима HB и HC су узете тачке B_1 и C_1, такве да је $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90^\circ$. Доказати да је $AB_1 = AC_1$.

12. Нека је P тачка у равни троугла ABC таква да су дужи PA, PB и PC стране тупоуглог троугла. Претпоставимо да у том троуглу туп угао одговара страни подударној са PA. Доказати да је $\angle BAC$ оштар.

13. Конвексни четвороугао $ABCD$ је уписан у круг S_1. Нека је O пресек дужи AC и BD. Круг S_2 пролази кроз D и O, и сече AD и CD у M и N, редом. Праве OM и AB се секу у R, праве ON и BC у T, и R и T су са исте стране праве BD као тачка A. Доказати да су O, R, T и B коцикличне.

14. (ИМО2001.предлог) Нека је A_1 центар квадрата уписаног у оштроугли троугао ABC са два темена квадрата на страни BC. Од преостала два темена квадрата, једно је на страници AB а једно на страници AC. Тачке B_1, C_1 су дефинисане на аналоган начин за уписане квадрате са по два темена на странама AC и AB, редом. Доказати да се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у једној тачки.

15. Дат је круг k и тачка A ван њега. Из тачке A су повучене тангенте AB и AC на круг k (B, $C \in k$) и права која сече круг у тачкама M и N и праву BC у тачки P. Доказати да је
$$\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{NC} = \sqrt{\frac{BP}{PC}}.$$

16. Страна BC троугла ABC додирује уписани круг тог троугла у D. Доказати да центар уписаног круга лежи на правој која пролази кроз средишта дужи BC и AD.

17. Доказати: ако се дијагонале AD, BE и CF тетивног шестоугла $ABCDEF$ секу у једној тачки, онда важи $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

18. Дат је троугао ABC. На његовој страници BC уочавамо тачку A_1 на следећи начин: A_1 је средиште стране KL правилног петоугла $MKLNP$, чија темена K и L леже на дужи BC, M на AB и N на AC. Аналогно су на странама AC и AB уочене тачке B_1 и C_1. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки.

19. Нека је O произвољна тачка у равни троугла ABC. Нека су M и N подножја нормала из тачке O на унутрашњу и спољну симетралу угла $\angle BAC$. Аналогно дефинишемо P и Q у односу на угао $\angle ABC$, и R и T у односу на угао $\angle BCA$. Доказати да су праве MN, PQ и RT конкурентне.

20. Дат је троугао ABC и круг k, који сече страницу BC у A_1 и A_2, страницу AC у B_1 и B_2, и страницу AB у C_1 и C_2. Ако су праве AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентне, доказати да су и праве AA_2, BB_2 и CC_2 конкурентне.

21. (ИМО2000.1) Кругови Γ_1 и Γ_2 се секу у M и N. Нека је AB права која додирује ове кругове у M и N, редом, тако да је M ближе правој AB него N. Нека је C тачка на кругу Γ_1, а D на кругу Γ_2, тако да је CD права паралелна са AB која пролази кроз M. Праве AC и BD се секу у E, праве AN и CD у P, а праве BN и CD у Q. Доказати да је $EP = EQ$.

22. Дат је оштроугли троугао ABC. Означимо са R полупречник описаног, а са r полупречник уписаног круга троугла ABC. Означимо са x, y, z растојања центра описаног круга од страница BC, AC, AB. Доказати да је

$$x + y + z = R + r.$$

23. Ако су d_1, d_2,..., d_{2n+1} растојања темена правилног многоугла $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ од тачке P на мањем луку A_1A_{2n+1} круга описаног око тог многоугла. Доказати да је

$$d_1 + d_3 + \cdots + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + \cdots + d_{2n}.$$

24. Нека је ABC троугао и k круг који додирује описани круг троугла ABC у тачки која припада луку BC који не садржи тачку A. Означимо са a, b, c дужине дужи BC, AC, AB, а са x, y, z дужине тангенти из тачака A, B, C на круг k. Доказати да је

$$ax = by + cz.$$

25. Над страницама троугла ABC као основицама конструисани су у његовој спољашњости међусобно слични једнакокраки троуглови BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Доказати да се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у једној тачки.

26. Нека су α, β, γ произвољни углови, такви да је збир било која два од њих мањи од $180°$. На странама троугла ABC са спољне стране су конструисани троуглови A_1BC, AB_1C и ABC_1, који имају при теменима A, B, C углове α, β, γ. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки.

27. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. У троуглове BCD, ACD, ABD, ABC су уписани кругови чији су полупречници r_1, r_2, r_3, r_4, редом. Доказати да је $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

28. (Кинеска теорема о круговима) Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ n-тоугао уписан у круг k. Извршена је триангулација овог полигона и у тако добијене троуглове су уписани кругови. Доказати да збир полупречника ових кругова не зависи од триангулације.

29. Дат је троугао ABC и тачке M и N на правој BC, такве да је $\angle MAN = 90°$ и

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{NC}.$$

Доказати да су AM и AN унутрашња и спољна симетрала угла $\angle BAC$.