ПРВО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
недеља, 22. децембар 2002.

Време за рад 240 *минута.*
Задаци вреде 8, 9, 6 + 7, 12 *поена.*

1. Наћи све парове (a, b) природних бројева таквих да је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b+1}$$

цео број.

2. Нека су H_1 и H_2 подножја нормала из ортоцентра H троугла ABC на симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена C, а C_1 средиште странице AB. Доказати да су тачке H_1, H_2 и C_1 колинеарне.

3. Да ли је могуће разложити троугао на коначан број конвексних а) петоуглова; б) шестоуглова?

4. Низ (a_n) задат је условима $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 24$ и за $n \geqslant 4$

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}\,.$$

Доказати да је a_n дељиво са $n!$ за све $n \in \mathbb{N}$.

ДРУГО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
уторак, 29. април 2003.

Време за рад 240 минута.
Задаци вреде 8, 10, 12, 12 поена.

1. Нека је l тангента у тачки M круга k са пречником MN. На дужи MN је дата тачка A. Произвољан круг са центром на l сече l у тачкама C и D. Нека праве NC и ND секу круг k редом у тачкама P и Q. Доказати да права PQ пролази кроз фиксну тачку.

2. Дато је $n+1$ различитих трочланих подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да међу њима постоје два чији је пресек једночлан.

3. Нека је S_0 коначан скуп природних бројева. Дефинишимо скупове $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ на следећи начин: природни број a припада скупу S_{n+1} ако и само ако тачно један од бројева a и $a-1$ припада скупу S_n. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева N са својством да је

$$S_N = S_0 \cup \{a + N \mid a \in S_0\}.$$

4. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви такви да је $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Доказати да је

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

ТРЕЋЕ ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
четвртак, 22. мај 2003.

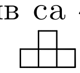
Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

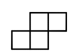
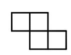
1. Нека су $a, b, c, d \in [0,1]$. Доказати неједнакост

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \frac{1}{4} \leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 .$$

2. Нека је q прост број и $\mathcal{M}$ скуп свих $n \times n$ матрица са елементима из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$. Колико матрица из $\mathcal{M}$ има детерминанту која није дељива са q?

3. Да ли је могуће таблу 8×8 попунити бројевима $1, 2, \ldots, 64$ (сваки број се појављује једном) тако да је збир бројева у свакој фигури F дељив са 4?

а) фигура F је  ;

б) фигура F је једна од  ,  .

4. Нека функција $f : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ задовољава следеће услове:
1° $\quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \; (\forall x, y \in \mathbb{Q})$;
2° $\quad f(x) \leqslant 1 \;\Rightarrow\; f(x+1) \leq 1 \; (\forall x \in \mathbb{Q})$;
3° $\quad f(\frac{2003}{2002}) = 2$.
Наћи све могуће вредности за $f(\frac{2004}{2003})$.

ЧЕТВРТО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 2×270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Први дан
петак, 13. јун 2003.

1. Нека је n природан број. Подскуп A скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ зовемо *генеришућим* ако је

$$\{|x - y| \,:\, x, y \in A\} = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}.$$

(а) Доказати да постоји генеришући подскуп са највише $[2\sqrt{n}] + 1$ елемената.

(б) Да ли за свако n постоји генеришући подскуп са највише $[\sqrt{2n}] + 2003$ елемената?

2. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да AB није паралелно са CD. Круг k_1 пролази кроз A и B и додирује праву CD у P, а круг k_2 пролази кроз C и D и додирује AB у Q. Доказати да заједничка тетива кругова k_1 и k_2 полови PQ ако и само ако је AD паралелно са BC.

3. Претпоставимо да природни бројеви m и n задовољавају

$$\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1,$$

где $\varphi(x)$ означава број природних бројева мањих од x и узајамно простих са x. Доказати да је тада НЗД$(m, n) > 1$.

Други дан
субота, 14. јун 2003.

4. Претпоставимо да су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тачке у равни и да је свакој од њих придружен реалан број λ_i тако да је за свако i, j, $i \neq j$, $\overline{A_iA_j} = \sqrt{\lambda_i + \lambda_j}$. Доказати да је $n \leqslant 4$, и да, ако је $n = 4$, важи

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = 0.$$

5. Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми са реалним коефицијентима, при чему сваки од њих има бар по једну реалну нулу. Ако ови полиноми задовољавају

$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2)$$

за све x, доказати да је $P \equiv Q$.

6. Наћи све природне бројеве n, за које се таблица $n \times n$ може попунити бројевима $-1, 0, 1$ тако да су свих $2n$ збирова по врстама и колонама таблице различити.