Комбинаторна геометрија

Додатна настава у Математичкој гимназији

Предавач: Растко Маринковић

1. Да ли је могуће у равни одабрати 100 различитих правих, тако да имају тачно 2004 тачке међусобних пресека?

2. У равни је дато 2004 тачака тако да никоје 3 нису колинеарне,а никојих 4 не леже на истом кругу. Да ли је увек могуће међу њима одабрати 3 тачке, тако да се од преостале 2001 тачке, 1000 налази унутар круга одређеног тим трима тачкама, а 1001 ван њега?

3. n $(n \geq 4)$ тачака је дато у равни, тако да било које 4 претстављају врхове конвексног четвороугла. Доказати да онда свих тих n тачака претстављају врхове конвексног n-тоугла.

4. а) Нека је у равни задато 5 тачака $A_1, A_2, \dots, A_5$. Посматрајмо све могуће $\measuredangle A_iA_jA_k$, $i \neq j \neq k \neq i$ (има их иначе 30). Нека са α означимо најмањи од тих углова. У каквом положају треба да буду те тачке да би вредност α била максимална и колика је та вредност?

б) Аналогно као под а), само уместо 5 имамо n тачака (поопштење).

5. У простору је дато 5 тачака у општем положају. Да ли је од њих могуће увек наћи неке две тако да дуж одређена њима пробија раван кроз остале 3 тачке у некој тачки која се налази унутар троугла одређеног са те 3 тачке.

6. 4 тачке у равни одређују 6 дужи, означимо их по дужини: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_6$. Доказати: $a_1\sqrt{2} \leq a_6$.

7. Имамо 1000 тачака у равни таквих да је растојање ма које две од њих мање од 1, а ма које 3 од њих образују тупоугли троугао. Показати да се онда све оне могу сместити унутар неке кружнице(или на њој самој) полупречника $r = 1/2$.

8. Дат је конвексни n-тоугао. Доказати да је немогуће одабрати више од n његових дијагонала тако да сваке 2 од њих имају заједничку тачку (заједничка тачка може бити теме или унутрашња тачка пресека).

9. У равни је дато n тачака тако да растојање ма које две не прелази 1. Нека је d најмање међу свим тим растојањима. Доказати да је: $d < 2\dfrac{1+\sqrt{n}}{n-1}$.

10. (*Јунгова теорема*) Доказати да се n тачака у равни, таквих да растојање ма које две од њих не прелази 1, могу сместити у круг полупречника: $r = 1/\sqrt{3}$.

11. Доказати да у координатној равни не постоји правилни n-тоугао (осим за $n = 4$) коме су сва темена у тачкама са обе целобројне координате.

12. Дат је систем од n тачака у равни, при чему за било које две тачке тог система постоји изометрија те равни која прву тачку преводи у другу, а цео систем тачака у самог себе. Доказати да онда све тачке тог система леже на једној кружници.

13. У квадрату странице 100, распоређено је N кругова радијуса 1, при чему било која дуж дужине 10, која се цела налази унутар квадрата, сече бар један од кругова. Доказати да је тада $N > 400$.

14. У равни је дато $2n$ тачака, у општем положају (тј. не постоје 3 колинеарне). n тачака је обојено црвеном, а n плавом бојом. Доказати следеће:

а) постоје права p у тој равни и цео број k, $(1 \leq k \leq n-1)$, тако да се са једне стране те праве налази по k црвених и k плавих тачака, а са друге по $n-k$ црвених и $n-k$ плавих;

б) могуће је спојити сваку плаву тачку са тачно једном црвеном тачком, и обрнуто, тако да се никоје две од тих n насталих дужи не секу.

15. У равни је дато n правих у општем положају и n тачака ван тих правих, у општем положају. Доказати да је могуће из сваке дате тачке спустити нормалу на по једну од правих (при чему је на сваку од датих правих спуштена тачно једна нормала, дакле успоставља се бијекција између скупа тачака и правих), тако да се никоја два, од тих n отсечака нормала (дуж одређена тачком и подножјем нормале из ње) не секу.

16.У равни је дато n тачака, тако да не леже све на једној правој. Доказати да постоји права која садржи тачно 2 тачке из тог скупа од n тачака..

17. У равни је дато неколико вектора, чији је почетак у тачки O, а збир њихових дужина је 4. Доказати да је могуће одабрати неколико од њих (може бити и само један од њих), тако да је дужина њиховог збира већа од 1.

18.У равни је задата права и кружница полупречника n $(n \in \mathbb{N})$ и унутар ње $4n$ јединичних дужи. Доказати да је могуће наћи тетиву те кружнице, паралелну или нормалну задатој правој тако да има заједничких тачака са бар две од датих $4n$ дужи.

19.Дат је бесконачан низ квадрата са страницама 1, 1/2, 1/3, ... , $1/n$. Да ли постоји квадрат у коме је могуће разместити све ове квадрате тако да никоја два немају заједничких унутрашњих тачака? Ако постоји одредити колика је минимална страница таквог квадрата.

20. Башта има облик квадрата странице 12. У њој се налази извор И. Од извора је проведена мрежа праволинијских канала, тако да растојање ма које тачке баште до њој најближег канала, не прелази 1. Доказати да је укупна дужина канала већа од 70. (Наравно, подразумеваћемо да ти канали немају дебљину, тј. да је она једнака 0)

22. У равни је дат круг пречника $2r = 2003$ и неких 1001 правих. Доказати да је увек могуће наћи тачку унутар круга такву да је њено растојање од ма које од тих правих веће од 1, како год биле распоређене те праве.

23. Свака тачка равни обојена је једном од 3 боје. Доказати да је увек могуће у тој равни наћи дуж дужине 1, тако да су јој оба краја исте боје. (Да ли је то увек изводљиво ако имамо 4 боје? А за 10 боја?)

24. Башта има облик квадрата странице 12. У њој се налази извор И. Од извора је проведена мрежа праволинијских канала, тако да растојање ма које тачке баште до њој најближег канала, не прелази 1. Доказати да је укупна дужина канала већа од 70. (Наравно, подразумеваћемо да ти канали немају дебљину, тј. да је она једнака 0)

25. У равни је дато неколико вектора, чији је почетак у тачки O, а збир њихових дужина је 4. Доказати да је могуће одабрати неколико од њих (може бити и само један од њих), тако да је дужина њиховог збира већа од 1.

26. У равни је дато 100 тачака. Доказати да се све оне могу сместити у неколико кругова чија сума дијаметара не прелази 100, а растојање између ма која два круга је веће од 1 (под растојањем два дисјунктна круга сматрамо растојање две њихове међусобно најближе тачке).

27. Унутар јединичног квадрата дата је 51 тачка. Доказати да је могуће међу њима одабрати неке 3 које леже унутар круга полупречника $r = 1/7$.

28. Да ли постоји у простору (3-димензионалном) скуп тачака такав да са било којом равни у простору има непразан,али коначан пресек?

29. У равни је дато n тачака, тако да не леже све на једној правој. Доказати да постоји права која садржи тачно 2 тачке из тог скупа од n тачака.

30. Одредити минимални полупречник r, такав да се са 3 кружнице полупречника r може потпуно прекрити јединични квадрат.

31. Скуп дужи унутар (или на ивици) квадрата зваћемо непрозиран, ако ма која права која сече квадрат има пресек и са тим скупом. Колика је минимална укупна дужина таквог скупа дужи?

32. У равни је задата права и кружница полупречника n ($n \in \mathbb{N}$) и унутар ње $4n$ јединичних дужи. Доказати да је могуће наћи тетиву те кружнице, паралелну или нормалну задатој правој тако да има заједничких тачака са бар две од датих $4n$ дужи.

33. Колико највише оштрих углова може имати несамопресецајући n-тоугао у равни?

34. У равни је описана кружница полупречника r, са центром у координатном почетку правоуглог координатног система. Нека је $\delta(r)$ растојање најближе тачке са целобројним координатама од те кружнице. Доказати да кад $r \to +\infty$, онда $\delta(r) \to 0$.