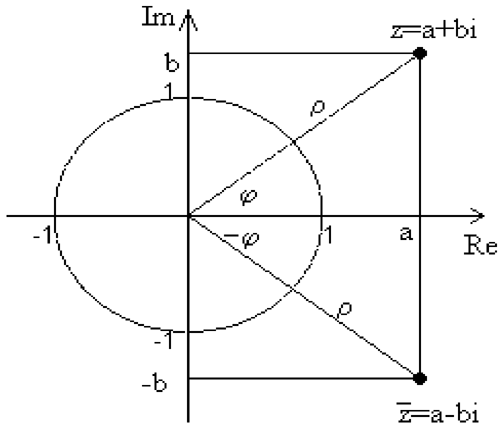
Примене комплексних бројева у геометрији

припремио *Владимир Балтић*

Теоретски увод



Комплексни бројеви су бројеви облика $z = a + b \cdot i$, где је i имагинарна јединица за коју важи $i^2 = -1$(тј. $i = \sqrt{-1}$), а бројеви a и b су реални. Број a се назива реалан део комплексног броја z, а број b је имагинаран део (не $b \cdot i$!). Ознаке су: $\mathcal{R}e\ z = a$ и $\mathcal{I}m\ z = b$. Сваком комплексном броју $z = a+bi$ (овај облик се назива *алгебарски облик* комплексног броја) одговара једна тачка у комплексној равни са координатама (a, b) и обратно (x–оса је реална оса, а y–оса је имагинарна). Два комплексна броја $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ су једнака уколико су им једнаки и реални делови и имагинарни делови ($z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow\ a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$). На комплексним бројевима се основне четири операције изводе на следећи начин:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i, \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} i.$$

За комплексан број $z = a + bi$, уводе се *конјуговано комплексан број* (енг. Complex Conjugate) $\overline{z} = a - bi$ (у комплексној равни то је тачка симетрична у односу на реалну осу) и *модуо* (или *апсолутна вредност* или *норма*; енг. Modulus) комплексног броја $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (модуо представља удаљеност од координатног почетка, тј. комплексног броја $0 = 0 + 0i$). Понекад се модуо означава и са ρ. Сада ћемо навести неке од основних особина ових операција:

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Важна је и чињеница да је $z = \overline{z}$ ако и само ако је z реалан број.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Приметимо да је са леве стране последње неједнакости спољa апсолутна вредност реалног броја $|z_1| - |z_2|$, док су све остало модули комплексних бројева. Трећа неједнакост се назива неједнакост троугла.
Скуп тачака за које важи $|z| = 1$ представља јединичну кружницу са центром у координатном почетку (види слику). Тачке за које важи $|z| < 1$ представљају унутрашњост тог јединичног круга, док $|z| > 1$ означава спољашњост.
Обратити пажњу да се међу комплексним бројевима не може увести релација $<$, него само међу њиховим модулима!
Угао φ који заклапа права Oz (права која спаја z са координатним почетком) са реалном осом назива се *аргумент* комплексног броја (сваки комплексан број, сем броја 0, има аргумент!). Аргумент $\varphi \in (-\pi, \pi]$, мада се понекад узима и $\varphi \in [0, 2\pi)$ (један од разлога зашто узимамо овако је да је $\arg \overline{z} = -\arg z$).

Како је $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ и $i^4 = 1$, можемо добити (помоћу принципа математичке индукције) да су степени (целобројни) броја i једнаки:

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \end{cases}.$$

Тригонометријски облик комплексног броја је $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ово се понекад скраћено записује као $z = \rho\,\mathrm{cis}\,\varphi$. *Ојлерова формула* за комплексне бројеве гласи $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и помоћу ње долазимо до *експоненцијалног облика* комплексног броја: $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$.
Ови облици се користе за одређивање n-тог степена и n-тих корена комплексног броја.
За одређивање n-тог степена комплексног броја z, $w = z^n$, користимо *Моаврову формулу*: $[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, односно $[\rho \cdot e^{i\varphi}]^n = \rho^n \cdot e^{in\varphi}$. Помоћу ове формуле може се извести мноштво тригонометријских идентитета!
Када се тражи да се одреде n-ти корени из комплексног броја z, мисли се да се одреде сва решења једначине $u^n = z$. Њих има тачно n и она су дата помоћу формуле: $u_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$, где је $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
Од посебног значаја, нарочито у геометријским применама, као и код полинома, су n-ти корени из јединице. Они су дати формулом $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, за $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Означимо $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.
Из Моаврове формуле имамо да је $\varepsilon_k = \varepsilon^k$. У геометријској интерпретацији, n-тим коренима из јединице одговарају темена правилног n-тоугла уписаног у јединични круг, са једним теменом које одговара броју 1.

Гаусов цео број је број облика $z = a + b \cdot i$, где су бројеви a и b цели.

Полиноми

Ако је z_0 нула реда k полинома $P(z)$ са реалним коефицијентима, онда је и $\overline{z_0}$ нула реда k полинома $P(z)$.
Сваки полином $P(z)$ степена n има n корена (сваки корен бројимо онолико пута колика му је вишеструкост) у скупу $\mathbb{C}$: $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тада се он може факторисати (у скупу $\mathbb{C}$) на следећи начин:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n),$$

где је a_n водећи коефицијент (уз z^n) полинома $P(z)$.

Комплексни бројеви у геометрији

Нека су $a, b, c, d, \ldots$ комплексни бројеви који одговарају тачкама $A, B, C, D, \ldots$ (афикси или комплексне координате). Генерално афиксе ћемо означавати малим словом које одговара великом слову које означава тачку (сем ако нагласимо другачије или кад је тај афикс, једнак неком броју, нпр. 1 или 0 која одговара координатном почетку O).

Координате средишта дужи AB, S_{AB} дате су са $s = \dfrac{a+b}{2}$. Уопштење ове формуле је да је координата тачке C, за коју важи $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, једнака $c = \dfrac{\lambda a + b}{1+\lambda}$ (за ову тачку кажемо да дели дуж AB у односу λ).
Растојање тачака A и B је дато са $d(A,B) = AB = |a - b|$. Често се у задацима користи да је $AB^2 = (a-b)(\overline{a} - \overline{b})$.

Скаларни производ вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (где је O координатни почетак) је дат помоћу $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{2}(a\overline{b} + \overline{a}\,b)$.
У општем случају имамо да је $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{(a-b)(\overline{c} - \overline{d}) + (\overline{a} - \overline{b})(c-d)}{2}$.

Ако целу комплексну раван транслирамо за вектор $\overrightarrow{AB}$ (при томе се свака тачка z слика у z', $z \mapsto z'$) имамо да важи

$$z' = (b - a) + z.$$

Ако целу комплексну раван ротирамо за угао θ око тачке a у математичком (то је смер обрнут од смера кретања казаљки на сату) смеру (при томе се свака тачка z слика у z', $z \mapsto z'$) имамо да важи

$$z' = a + (z - a) \cdot e^{i\theta}.$$

Површина оријентисаног троугла $\triangle ABC$ једнака $S_{\triangle\overrightarrow{ABC}} = \dfrac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$.

Ако је троугао $\triangle ABC$ уписан у јединичну кружницу претходна формула се своди на $S = \dfrac{i}{4} \cdot \dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$.
Површина четвороугла $ABCD$ уписаног у јединичну кружницу дата је са $S = \dfrac{1}{4i} \cdot \dfrac{(c-a)(d-b)(ac-bd)}{abcd}$.

Неопходан услов да би тачке A, B, C биле колинеарне је да постоје $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$, такви да важи $c = \alpha a + \beta b$. Такође, услов колинеарности тачака A, B, C је $S_{\triangle \overrightarrow{ABC}} = 0$, односно ако важи $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}$. Другачије, три различите тачке A, B, C су колинеарне акко важи

$$\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}.$$

Ако уместо тачке C имамо O претходне једначине се своде на $a\overline{b} = \overline{a}b$ или на $\dfrac{a}{b} = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ако A и B леже на јединичној кружници $z\overline{z} = 1$ добијамо да је услов колинеарности тачака A, B, C дат са $c + ab\overline{c} = a + b$.

За паралелност имамо $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (a-b)(\overline{c}-\overline{d}) = (\overline{a}-\overline{b})(c-d)$, а овај услов можемо свести на $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R}$. Ако тачке A, B, C, D припадају јединичној кружници $z\overline{z} = 1$ (тад је $\overline{a} = \dfrac{1}{a}, \dots$) претходни услов се своди на једноставнији $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ab = cd$.

За нормалност имамо $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow a\overline{b} + \overline{a}b = 0$. У општем случају имамо за паралелност $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (a-b)(\overline{c}-\overline{d}) + (\overline{a}-\overline{b})(c-d) = 0$ а овај услов можемо свести на $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{c-d}$ је чисто имагинаран број, тј. $\dfrac{a-b}{c-d} = -\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$. Ако тачке A, B, C, D припадају јединичној кружници $z\overline{z} = 1$ претходни услов се своди на једноставнији $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ab + cd = 0$.

Једначина круга са центром у тачки са афиксом z_0 и полупречником r се може записати у облику $|z - z_0| = r$ (специјално, ако је центар координатни почетак, онда је једначина $|z| = r$, односно $z\overline{z} = r^2$). Имамо и другачији облик: ако су $A, C \in \mathbb{R}$ и $B \in \mathbb{C}$, такви да је $AC < |B|^2$, онда једначина $Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\,\overline{z} + C = 0$ представља круг (ако је $B = B_1 + iB_2$ онда је центар у $z_0 = -\dfrac{B}{A}$, а полупречник је једнак $r = \dfrac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{A}$.
Четири тачке A, B, C, D припадају једном кругу или једној правој акко је

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

Једначина тангенте на кружницу $z\overline{z} = |p|^2$ у тачки T те кружнице је дата са $\overline{t}z + t\overline{z} = 2$.
Једначина пресека S правих које садрже тетиве AB и CD јединичне кружнице је дато са $\overline{s} = \dfrac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd}$.
Када је $AB \perp CD$ претходна једнакост се своди на $s = \dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$. Одавде добијамо да је пројекција P тачке C на праву AB, при чему A, B, C припадају јединичном кругу, једнака $p = \dfrac{1}{2}\left(a + b + c - \dfrac{ab}{c}\right)$.
Тачка пресека S тангети у тачкама A и B јединичне кружнице дата је са $s = \dfrac{2ab}{a+b}$ или $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

Ако су z_1 и z_2 афикси тачака $M_1 \neq M_2$ онда је једначина праве $p = M_1M_2$ дата са $\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, односно кад израчунамо детерминанту, $z - z_1 = \dfrac{z_2 - z_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1}(\overline{z} - \overline{z}_1)$ (z представља координате тачке са те праве). Означимо са $k = \dfrac{z_2 - z_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1}$ комплексни коефицијент правца праве. Важи $|k| = 1$, тј. $k = \cos\varphi + i \sin\varphi$ (за угао који права заклапа са позитивним смером реалне осе, α, важи $\alpha = \dfrac{\varphi}{2}$). Тада је једначина праве $z - z_1 = k \cdot (\overline{z} - \overline{z}_1)$.
Једначина праве кроз тачке O и A има облик $\overline{a}z = a\overline{z}$, док права која садржи тетиву AB јединичне кружнице има једначину $z + ab\overline{z} = a + b$. Права која не пролази кроз O може се задати и преко пројекције P тачке O на ту праву: $p(\overline{p} - \overline{z}) + \overline{p}(p - z) = 0$, односно $\overline{p}z + p\overline{z} = 2p\overline{p}$.
Две праве су паралелне (или се поклапају) уколико су им коефицијенти једнаки, тј. $k_1 = k_2$.
Две праве су нормалне уколико су им коефицијенти супротни, тј. $k_1 = -k_2$.
Једначина праве ℓ се може свести и на облик $Az + \overline{A}\,\overline{z} + C = 0$, где је $A \in \mathbb{C}$, а $C \in \mathbb{R}$. Означимо са $u(z) = Az + \overline{A}\,\overline{z} + C$. Како је $u(z) = \overline{u(z)}$, добијамо да је $u(z) \in \mathbb{R}$ за свако $z \in \mathbb{R}$ (штавише положај тачке M комплексне равни у односу на дату праву зависи од тога да ли је $u(m) < 0$ или $u(m) = 0$ или $u(m) > 0$).
Растојање тачке M од ℓ дато је са $d(M, \ell) = \dfrac{|u(m)|}{2|A|}$.
Координата подножја нормале (пројекција) P из тачке M на ℓ дата је са $p = \dfrac{Am - \overline{A}\,\overline{m} - C}{2A}$.
Координата симетричне тачке N тачки M у односу на ℓ дата је са $n = -\dfrac{\overline{A}\,\overline{m} + C}{A}$.

Координата симетричне тачке N тачки M у односу на праву AB дата је са $n = a + \dfrac{b-a}{\overline{b} - \overline{a}} \cdot (\overline{m} - \overline{a})$. Тада пројекцију P из тачке M на AB добијамо као $p = \dfrac{m+n}{2}$, односно $p = \dfrac{a(\overline{m} - \overline{b}) - b(\overline{m} - \overline{a})}{2(\overline{a} - \overline{b})} + \dfrac{m}{2}$.

Ако тачке A и B припадају јединичној кружници онда је $p = \dfrac{1}{2}(a + b + m - ab\overline{m})$.

Ако је $M = O$ (тј. $m = 0$) онда је пројекција $p = \dfrac{\overline{a}b - a\overline{b}}{2(\overline{a} - \overline{b})}$.

Пројекција T тачке M на праву $\overline{p}z + p\overline{z} = 2p\overline{p}$ дата је са $t = p + \dfrac{m}{2} - \dfrac{p\overline{m}}{2\overline{p}}$.

Ако је троугао $\triangle ABC$ такав да му је центар описаног круга, O, у координатном почетку (тј. $o = 0$; ако није такав случај онда прво извршимо одговарајућу транслацију), онда се координате ортоцентра H лако налазе као $h = a + b + c$.

За тежиште T произвољног троугла ABC важи $t = \dfrac{a+b+c}{3}$.

Троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle PQR$ су слични и једнако оријентисани акко је $\begin{vmatrix} a & p & 1 \\ b & q & 1 \\ c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$, тј. ако је $ap + br + cp = bp + cq + ar$, односно $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{p-r}{q-r} = \sigma$. Специјално ако је број σ реалан имамо да је $AB \parallel PQ$, $AC \parallel PR$ и $BC \parallel QR$, односно троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle PQR$ су хомотетични. Ако је $|\sigma| = 1$ троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle PQR$ су подударни и једнако оријентисани.

Троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle PQR$ су слични и супротно оријентисани акко је $\begin{vmatrix} \overline{a} & p & 1 \\ \overline{b} & q & 1 \\ \overline{c} & r & 1 \end{vmatrix} = 0$, односно ако је $\overline{\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)} = \dfrac{p-r}{q-r} = \sigma$. Ако је $|\sigma| = 1$ троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle PQR$ су подударни и супротно оријентисани.

Троугао $\triangle ABC$ је једнакостра акко је $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = 0$, тј. ако је $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, односно $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$. Ако уведемо трећи корен из јединице $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ови услови се своде на $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$ (када је $\triangle ABC$ позитивно оријентисан), односно на $a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0$ (када је $\triangle ABC$ негативно оријентисан). У случају да је $\triangle ABC$ уписан у јединичну кружницу оба ова услова се своде на $a + b + c = 0$.

Дужине страна правилног n-тоугла $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ налазимо по формули: $A_0A_k{}^2 = (z_k - 1)(\overline{z}_k - 1)$, где је z_k k-ти по реду n-ти корен из јединице.

Задаци

1. Израчунати $z = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^8}$.

2. Решити једначине: **а)** $\dfrac{iz^6+8}{8i-z^6} = \sqrt{3}$; **б)** $iz^6+8 = (8i-z^6)\sqrt{3}$. Представити решење у $\mathbb{C}$ равни.

3. У комплексној равни су дата два темена једнакостраничног троугла. Пронаћи треће теме.

4. Одредити тачку z_3 у равни Oxy која са тачкама $z_1 = 2+2i$ и $z_2 = 3+i$ чини темена једнакостраничног троугла. Наћи сва решења.

5. Дат је једнакостранични троугао $\triangle ABC$ и комплексна координата a темена A. Наћи комплексну координату b темена B ако се у координатном почетку налази:
а) теме C; **б)** тежиште T троугла $\triangle ABC$; **в)** подножје A_1 висине из темена A на страницу BC.

6. Ако су a, b и c темена једнакостраничног троугла у комплексној равни, доказати да важи једнакост $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.

7. Ако су a, b и c комплексни бројеви који задовољавају једнакост $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$ доказати да је или $a=b=c$ или су a, b и c темена једнакостраничног троугла.

8. Дат је квадрат $\square ABCD$ и комплексна координата a темена A. Наћи комплексне координате b, c, d осталих темена B, C, D ако се у координатном почетку налази:
а) теме B; **б)** теме C; **в)** центар квадрата O.

9. Одредити тачке z_3 и z_4, које са тачкама $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 2+3i$ образују квадрат у равни Oxy, тако да су z_1 и z_2 његова суседна темена и да једна од тражених тачака припада другом квадранту.

10. Комплексни бројеви (тачке) $z_1 = 1+i$ и $z_3 = -1+i\sqrt{3}$ су наспрамна темена квадрата. Одредити остала два темена тог квадрата.

11. Комплексни бројеви (тачке) $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 2+2i$ су суседна темена квадрата. Одредити остала два темена z_3 и z_4 тог квадрата.

12. Нека су z_1, z_2 комплексни бројеви који нису реални и задовољавају услове $|z_1-z_2| = 2$ и $z_1 \cdot z_2 = 1$. Доказати да је четвороугао $ABCD$ чија темена имају комплексне координате -1, z_1, 1, z_2 једнакокраки трапез.

13. Тачка D је симетрична центру O описане кружнице око троугла $\triangle ABC$ у односу на праву AB. Доказати да за растојање CD важи формула
$$CD^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2,$$
где је R полупречник описане кружнице.

14. Из подножја D висине трогула $\triangle ABC$ спуштене су нормале на друге две странице. Нека су подножја тих нормала тачке M и N. Показати да растојање MN не зависи од избора висине троугла (тј. да је ово растојање исто и када је висина из темена A, и из темена B и из темена C).

15. Дат је троугао $\triangle ABC$. На правим AC, AB, BC дате су тачке A_1, B_1, C_1 редом, тако да важе распореди $C-A-A_1$, $A-B-B_1$, $B-C-C_1$. Ако је $AA_1 : BB_1 : CC_1 = \dfrac{AB}{BC} : \dfrac{BC}{CA} : \dfrac{CA}{AB}$, доказати да су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ слични.

16. Дат је паралелограм $ABCD$. На његовим страницама CD и CB конструисани су једнако оријентисани слични троуглови $\triangle CDE$ и $\triangle FBC$. Доказати да је $\triangle FAE$ њима сличан и једнако оријентисан.

17. Нека је дат конвексан четвороугао $ABCD$ троуглови $\triangle ABM$, $\triangle CDP$, $\triangle BCN$ и $\triangle ADQ$ који су једнакостранични (прва два су ван четвороугла $ABCD$, а друга два унутар). Доказати да је $AC = MN$. Какав је четвороугао $MNPQ$?

18. На хипотенузи правоуглог троугла $\triangle ABC$ споља је приписан квадрат. Наћи растојање темена правог угла, C, до центра квадрата, Q, ако су дужине катета BC и AC једнаки a и b.

19. *Ојлерова права.* Нека су у произвољном троуглу $\triangle ABC$ са T, H и O означени тежиште, ортоцентар и средиште описане кружнице. Доказати да су ове три тачке колинеарне, као и да је $HT = 2 \cdot TO$.

20. *Симпсонова права.* Доказати да ортогоналне пројекције тачке P, која припада описаном кругу око $\triangle ABC$, на његове странице леже на једној правој. Доказати да та права пролази кроз средиште дужи HP, где је H ортоцентар троугла $\triangle ABC$.

21. *Теорема Њутна.* У тангентном четвороуглу су средине дијагонала и центар уписане кружнице у тај четвороугао колинеарни. Доказати.

22. *Теорема Гауса.* Ако нека права ℓ сече праве, које садрже странице BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$, у тачкама A_1, B_1, C_1, респективно, тада су средине дужи AA_1, BB_1 и CC_1 колинеарне. Доказати.

23. *Генерализована Птоломејева теорема.* За произвољне тачке A, B, C и D у равни које нису на правој је $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Једнакост важи акко тачке A, B, C и D припадају једном кругу и при том пар (A, C) раздваја пар (B, D).

24. Нека су у произвољном троуглу $\triangle ABC$ тачке A', B' и C' респективно тачке симетричне ортоцентру H у односу на праве BC, CA и AB. Доказати да тачке A', B' и C' припадају описаној кружници.

25. *Ојлеров круг* (у енглеској литератури *nine-point circle*). Нека су у произвољном троуглу $\triangle ABC$ са H, O и R означени ортоцентар, средиште описане кружнице и радијус те кружнице. Тачке A_1, B_1 и C_1 су респективно средишта страница BC, CA и AB, A_2, B_2 и C_2 респективно подножја висина из A, B и C, A_3, B_3 и C_3 респективно средишта дужи AH, BH и CH. Доказати да тачке A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 и C_3 припадају једној кружници O_9, као и да је центар кружнице O_9 средиште дужи OH, а радијус кружнице O_9 је једнак $\dfrac{R}{2}$.

26. Нека је A пресечна тачка кругова c_1 и c_2, који леже у истој равни. Из тачке A по овим круговима истовремено почињу да се крећу тачке M_1 и M_2. Тачке се крећу по својим круговима константном брзином немењајући смер. Тачке M_1 и M_2 истовремено обиђу свака свој круг и сретну се у тачки A. Доказати да у равни постоји непокретна тачка P која је у сваком тренутку подједнако удаљена од M_1 и M_2.

27. *Аполонијев круг.* Нека су A и B дате тачке у равни. Скуп тачака M таквих да је однос дужи MA и MB константан и једнак k $(k > 0,\ k \neq 1)$ је круг. Доказати.

28. Доказати да је код правилног n-тоугла уписаног у круг полупречника r производ свих страница и дијагонала једнак $n^{\frac{n}{2}} \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

29. На кругу описаном око правилног полигона $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ дата је произвољна тачка P. Доказати да је збир квадрата растојања од тачке P до темена с парним индексима једнак збиру квадрата растојања од тачке P до темена са непарним индексима.

30. Темена правилног n-тоугла обојено су са неколико боја (свако теме једном бојом) тако да темена исте боје чине темена правилног полигона. Доказати да међу тим полигонима постоје два подударна полигона.

31. Дат је правилан петнаестоугао $A_0A_1 \ldots A_{14}$. Показати да важи $\dfrac{1}{A_0A_1} = \dfrac{1}{A_0A_2} + \dfrac{1}{A_0A_4} + \dfrac{1}{A_0A_7}$.

32. Тачка M лежи на кругу полупречника R, описаном око правилног n-тоугла $A_1A_2 \ldots A_n$. Доказати да је сума квадрата растојања M до темена n-тоугла једнака $2nR^2$.

33. Дат је правилан n-тоугао $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ и око њега је описан круг полупречника R и на њему тачка P. Доказати да важи $\sum\limits_{k=0}^{n-1} {PA_k}^{2m} = \binom{2m}{m} nR^{2m}$.

34. Дат је правилан n-тоугао $A_1A_2 \ldots A_n$ и тачка P на мањем луку $\widehat{A_1A_n}$. Нека је са d_k означено одстојање тачке P до A_k. Доказати да је $\dfrac{1}{d_1d_2} + \dfrac{1}{d_2d_3} + \ldots + \dfrac{1}{d_{n-1}d_n} = \dfrac{1}{d_1d_n}$.

35. Дат је правилан n-тоугао $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ уписан у јединичну кружницу. Тада важи:
а) $\underline{n=3}$ $A_0A_1 = \sqrt{3}$; **б)** $\underline{n=4}$ $A_0A_1 = \sqrt{2}$; **в)** $\underline{n=5}$ $A_0A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $A_0A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;
г) $\underline{n=6}$ $A_0A_1 = 1$, $A_0A_2 = \sqrt{3}$, $A_0A_3 = 2$; **д)** $\underline{n=8}$ $A_0A_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $A_0A_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$;
ђ) $\underline{n=10}$ $A_0A_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, $A_0A_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$; **е)** $\underline{n=12}$ $A_0A_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $A_0A_5 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$;
ж) $\underline{n=15}$ $A_0A_1 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right]$, $A_0A_2 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$,
$A_0A_4 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{3}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$, $A_0A_7 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$.

36. Доказати да је страница правилног деветоугла једнака разлици највеће и најмање дијагонале.

37. Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ растојања тачке $P \in \widehat{A_1A_n}$ до правих које садрже странице $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ правилног n-тоугла. Доказати да је $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_{n-1}} = \dfrac{1}{p_n}$.

38. Нека је P произвољна тачка на кругу описаном око правилног $2n$-тоугла $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n}$. Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ растојања тачке P до правих које садрже странице правилног $2n$-тоугла $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n}A_1$. Доказати да је $p_1 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{2n-1} = p_2 \cdot p_4 \cdot \ldots \cdot p_{2n}$.

Решења

1. Представимо и именилац $z_1 = \sqrt{3} + i$ и бројилац $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ разломка $z = \frac{z_2}{z_1}$ у тригонометријском облику: $z_1 = \varrho_1 \cdot e^{i\varphi_1} = \varrho_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ и $z_2 = \varrho_2 \cdot e^{i\varphi_2} = \varrho_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$. $\varrho_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, а угао φ_1 добијамо помоћу реалног и имагинарног дела броја z_1: $\mathrm{Re}\ z_1 = \sqrt{3}$, а са друге стране имамо да је $\mathrm{Re}\ z_1 = \varrho_1 \cdot \cos\varphi_1 = 2 \cdot \cos\varphi_1 \ \Rightarrow\ \cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathrm{Im}\ z_1 = 1$ (а не i !) и $\mathrm{Im}\ z_1 = \varrho_1 \cdot \sin\varphi_1 = 2 \cdot \sin\varphi_1 \ \Rightarrow\ \sin\varphi_1 = \dfrac{1}{2}$. Угао за који је $\cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\varphi_1 = \dfrac{1}{2}$ је $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ (ово налазимо уз помоћ мало елементарне тригонометрије и сналажењем на тригонометријском кругу). Овај угао смо могли да добијемо и као $\varphi_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ јер је тај број у И квадранту (за остале квадранте је сложенија формула). Стога је $z_1 = \varrho_1 \cdot e^{i\varphi_1} = \varrho_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6})$. Слично се добија и $\varrho_2 = 2, \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ и $z_2 = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. Сада имамо да је $z_1^8 = \varrho_1^8 \cdot e^{i8\varphi} = 2^8 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2^8 \cdot (\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3}) = 2^8 \cdot (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$ и слично $z_2^{10} = 2^{10} \cdot e^{i\frac{5\pi}{2}} = 2^{10} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{10} \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}) = 2^{10}i$. Сада добијамо да је $z = \dfrac{2^{10}i}{2^8 \cdot (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}$ и још треба да се ослободимо комплексног броја у имениоцу: $z = \dfrac{2^2 i}{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \dfrac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{-2i + i^2 2\sqrt{3}}{1}$, тј. $\boxed{z = -2\sqrt{3} - 2i}$.

Напомена: Могли смо да поједноставимо рачун одмах након одређивања тригонометријског облика бројева z_1 и z_2. $z = \dfrac{2^{10} \cdot e^{i\frac{5\pi}{2}}}{2^8 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}} = 2^2 \cdot e^{i(\frac{5\pi}{2} - \frac{4\pi}{3})} = 4 \cdot e^{i\frac{7\pi}{6}} = 4 \cdot (\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \cdot \sin\dfrac{7\pi}{6}) = 4(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}) = -2\sqrt{3} - 2i$.

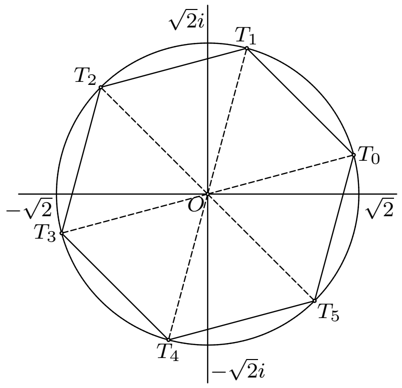
2. а) Уколико је $8i - z^6 = 0$ разломак није дефинисан. За $8i - z^6 \neq 0$ (тј. $z^6 \neq 8i$) смемо обе стране да помножимо са $8i - z^6$ и тада се добија једначина $iz^6 + 8 = (8i - z^6)\sqrt{3}$ (дата у делу задатка под б). Групишемо чланове уз z на левој страни, а остале на десној страни једначине: $z^6(\sqrt{3} + i) = -8 + i8\sqrt{3}$. Одатле добијамо да је $z^6 = \frac{-8+i8\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{-8+i8\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{8\cdot(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{4} = 8i$. Како смо претходно претпоставили да је $z^6 \neq 8i$ добијамо да ова једначина $\boxed{\text{нема решења}}$.

б) У делу под а) смо добили да је $z^6 = 8i$. Да би решили једначину потребно је да извадимо шести корен из комплексног броја $w = 8i$. Представимо w у тригонометријском облику: $\varrho = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8, \varphi = \frac{\pi}{2}$, те је $w = \varrho \cdot e^{i\varphi} = \varrho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 8 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2})$. Решење једначине $z^n = \varrho \cdot e^{i\varphi}$ је дато формулом:

$$z_k = \sqrt[n]{\varrho} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\varrho} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

У овом конкретном случају добијамо $z_k = \sqrt[6]{8} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}}$ $k = 0, 1, \ldots, 5$, тј. након рачунања тригонометријских израза добијамо решења:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} z_0 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} & = & (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) + i \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) \\ z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{12}} & = & (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) + i \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) \\ z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} & = & -1 + i \\ z_3 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{13\pi}{12}} & = & (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) + i \cdot (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ z_4 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{17\pi}{12}} & = & (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) + i \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) \\ z_5 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}} & = & 1 - i \end{array}}$$



Напомена: Како рачунати $z_0, z_1, \ldots, z_5$?

1° Ако сте добри са тригонометријом можете израчунати све горње синусе и косинусе. Нпр. за z_0 имамо $z_0 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{\pi}{12})$. Да би добили $\cos\frac{\pi}{12}$ користимо формулу за косинус половине угла $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, где узимамо $\alpha = \frac{\pi}{6}$, па је $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\cdot 1+1^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. Други начин за добијање $\cos\frac{\pi}{12}$ је помоћу адиционе формуле $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$, где узимамо $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, па је $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. $\sin\frac{\pi}{12}$ може се добити из одговарајућих формула $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, тј. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$ или помоћу $\cos\frac{\pi}{12}$: $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{12}}$ (знамо да је $\frac{\pi}{12}$ у првом квадранту па узимамо позитиван знак).

2° Израчунати корен који је најлакши – овде је то $z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}) = -1 + i$. Сада искористимо да је $z_3 = z_2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{6}} = z_2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = (-1 + i) \cdot (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) + i \cdot (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$. Остале корене добијамо из: $z_4 = z_3 \cdot e^{i\frac{2\pi}{6}}, z_5 = z_4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{6}}, z_0 = z_5 \cdot e^{i\frac{2\pi}{6}}$ и $z_1 = z_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{6}}$.

3. Нека су дате тачке A и B са афиксима a и b. Задатак има два решења C_1 и C_2: троугао $\triangle ABC_1$ је позитивно оријентисан, а троугао $\triangle ABC_2$ је негативно оријентисан. C_1 добијамо када вектор $\overrightarrow{AB}$ ротирамо око тачке A за угао $\dfrac{\pi}{3}$, а C_2 добијамо када вектор $\overrightarrow{AB}$ ротирамо око тачке A за угао $-\dfrac{\pi}{3}$. Стога је

$$c_1 = a + (b-a)\cdot e^{i\pi/3} \qquad \text{и} \qquad c_2 = a + (b-a)\cdot e^{i\pi/3}.$$

4. Применимо формулу из претходног задатка на $z_1 = 2+2i$ и $z_2 = 3+i$ добијамо:
$z_3' = z_1 + (z_2 - z_1)\cdot e^{i\pi/3} \quad = 2+2i+(1-i)\cdot(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = \frac{5+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
$z_3'' = z_1 + (z_2 - z_1)\cdot e^{-i\pi/3} = 2+2i+(1-i)\cdot(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}) = \frac{5-\sqrt{3}}{2} + i\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

5. а) Имаћемо два решења. У оба случаја је $c=0$.
Ако је троугао $\triangle ABC$ позитивно оријентисан тачку B добијамо ротацијом тачке A за 60° око тачке C. Стога је $b_1 = a\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
Ако је троугао $\triangle ABC$ негативно оријентисан тачку B добијамо ротацијом тачке A за -60° око тачке C. Стога је $b_2 = a\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
б) $t=0$. Да би добили B ротирамо тачку A око T за 120° ако је троугао $\triangle ABC$ позитивно оријентисан, односно за -120° ако је троугао $\triangle ABC$ негативно оријентисан, те опет имамо два решења $b_1 = a\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $b_2 = a\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
в) $a_1 = 0$. Како је $A_1A = A_1B\sqrt{3}$, да би добили тачку B ротирамо тачку A око A_1 за 90° ако је троугао $\triangle ABC$ позитивно оријентисан, односно за -90° ако је троугао $\triangle ABC$ негативно оријентисан и у оба случаја поделимо то са $\sqrt{3}$, те опет имамо два решења $b_1 = \frac{ai}{\sqrt{3}}$ и $b_2 = \frac{-ai}{\sqrt{3}}$.
(Како је $\overrightarrow{A_1A} = 3\overrightarrow{A_1T}$ можемо добити $t = \frac{a}{3}$ и онда, слично као у делу под б), налазимо $b_1 = t + (a-t)\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $b_2 = t+(a-t)\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$)

6. Означимо са h координате тежиста једнакостраничног троугла чија темена имају афиксе a, b и c, а са $\varepsilon = e^{i2\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Тада је $b = h + (a-h)\varepsilon$ и $c = h + (a-h)\varepsilon^2$.
Једнакост $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$ је еквивалентна са $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$. Покажимо ову другу.
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = \big((1-\varepsilon)(a-h)\big)^2+\big((\varepsilon-\varepsilon^2)(a-h)\big)^2+\big((\varepsilon^2-1)(a-h)\big)^2 = (a-h)^2\cdot\big[(1-\varepsilon)^2+(\varepsilon-\varepsilon^2)^2+(\varepsilon^2-1)^2\big] = (a-h)^2\cdot 0 = 0.$

7. (IV 4 општинско 1983) Из једнакости $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$ следи $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$. Такође је $(a-b)+(b-c)+(c-a) = 0$. Стога комплексни бројеви $a-b$, $b-c$ и $c-a$ задовољавају једначину облика $z^3 = h^3$, где је h неки комплексан број. Решења ове једначине су h, $h\varepsilon$ и $h\varepsilon^2$, где је $\varepsilon = e^{i2\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Без умањења општости можемо узети да је $a-b = h$, $b-c = h\varepsilon$ и $c-a = h\varepsilon^2$. Тада је $a = \frac{a+b+c}{3} + \frac{a-b}{3} - \frac{c-a}{3} = \frac{a+b+c}{3} + \frac{h}{3}(1-\varepsilon^2) = \frac{a+b+c}{3} + \frac{h}{3}(\varepsilon-1)(-1-\varepsilon) = \frac{a+b+c}{3} + \frac{h}{3}(\varepsilon-1)\varepsilon^2$. Аналогно се добијају $b = \frac{a+b+c}{3} + \frac{h}{3}(\varepsilon-1)$ и $c = \frac{a+b+c}{3} + \frac{h}{3}(\varepsilon-1)\varepsilon$.
Уколико је $h=0$ онда је, очигледно, $a=b=c$.
Уколико је $h \neq 0$, ако уведемо смену $t = \frac{a+b+c}{3}$ и $r = \frac{h}{3}(\varepsilon-1)$ претходне једначине се своде на $a = t + r\varepsilon^2$, $b = t+r$, $c = t + r\varepsilon$, те се види да се тачке C и A добијају ротацијом тачке B за 120°, односно за 240° око тачке T. Стога су a,b,c афикси темена једнакостраничног троугла.

8. а) Имаћемо два решења. У оба случаја је $b=0$.
Ако је квадрат $\square ABCD$ позитивно оријентисан тачку C добијамо ротацијом тачке A за -90° око тачке B. Стога је $c_1 = -i\cdot a$. Како је $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ добијамо да је $d - a = c - b = c$, одакле налазимо да је $d = a + c$, тј. $d_1 = a - ia$.
Ако је квадрат $\square ABCD$ негативно оријентисан тачку C добијамо ротацијом тачке A за 90° око тачке B. Стога је $c_2 = i\cdot a$. Опет је $d = a+c$, тј. $d_2 = a + ia$.
б) $c = 0$, па је афикс центра квадрата O једнак $o = \frac{a}{2}$ јер је O средиште дијагонале AC. Тачку B добијамо ротацијом тачке A око O за 90°, а D ротацијом за -90°, те добијамо $b = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cdot i$ и $d = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cdot i$.
(Ако би квадрат $\square ABCD$ био негативно оријентисан само би b и d заменили места)
в) Да би добили B, C, D ротирамо тачку A око O за 90°, 180° и 270°, те је $b = a\cdot i$, $c = -a$ и $d = -a\cdot i$.

9. $z_3 = 4i$, $z_4 = -1+2i$.

10. Координате центра квадрата су $o = i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, па је $z_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ и $z_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

11. Задатак има два решења: $z_3' = 1+3i$, $z_4' = 2i$ и $z_3'' = 3+i$, $z_4'' = 2$.

12. (IIIA 2. републичко 1999) Пошто је $|z_1 - z_2| = 2 = |AC| = |BD|$, довољно је показати да је четвороугао $ABCD$ тетиван. Како је

$$\frac{z_2-(-1)}{1-(-1)} : \frac{z_2-z_1}{1-z_1} = \frac{1-z_1+z_2-z_1z_2}{2(z_2-z_1)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Одавде добијамо да тачке -1, z_1, 1, z_2 припадају једном кругу (не припадају једној правој, јер би то морала бити реална оса), те оне одређују једнакокраки трапез.