Додатна за други разред
18.октобар 2005.г.

Логичко комбинаторни задаци

Милан Новаковић

1. Правоугаоник $a\times b$, $(a > b)$ разбијен је на правоугле троуглове, тако да се два троугла (која се граниче) граниче целим својим странама и да је заједничка страна нека два троугла хипотенуза једног и катета другог троугла. Доказати да је $a \geqslant 2b$.

2. Таблица $n\times n$ попуњена бројевима се зове *супермагични квадрат* ако је за сваки избор од n бројева таквих да никоја два нису ни у истој врсти ни у истој колони њихов збир исти (као и за неки други избор). У неком супермагичном квадрату је у свакој врсти уочен најмањи број и од тих бројева је одабран највећи. Такође је у свакој колони уочен највећи број и од тих бројева је одабран најмањи. Доказати да су два тако одабрана броја једнака.

3. На табли A су записани произвољни природни бројеви. Затим су на табли B записани следећи бројеви: број бројева са табле A који су већи или једнаки од 1, број бројева са табле A који су већи или једнаки од 2, итд. све док су ти бројеви већи од 0. Затим су на табли C на исти начин записани бројеви само посматрајући таблу B. Доказати да су на таблама A и C исти бројеви.

4. На састанку за округлим столом седи паран број људи. После паузе су опет сели за сто али у различитом распореду. Доказати да постоје два човека између којих је број људи за столом био исти пре и после паузе.

5. У равни је дато $2n$ тачака тако да никоје три нису колинеарне $(n \geqslant 2)$. Затим је n тачака обојено у плаво и n у црвено. За праву у равни кажемо да је *балансирајућа* ако садржи једну плаву и једну црвену тачку и ако је једнак број црeваних и плавих тачака са било које стране те праве. Доказати да постоје бар две *балансирајуће* праве.

6. Нека је у равни дато n кругова тако да никоја два нису тангентна и да сваки круг сече бар један круг. Нека је m број пресечних тачака ових кругова. Доказати да је $m \geqslant n$.

7. Нека је дат коначан скуп вектора и скуп означених целобројних тачака у равни. Познато је да за сваку означену тачку P, ако поставимо почетке свих вектора у P, више од пола крајева вектора ће бити означене тачке. Доказати да је скуп означених тачака бесконачан.

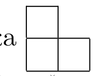
8. Правоугана табла $m\times n$ је подељена на mn јединичних квадратића. На колико начина се могу избацити два квадратића тако да се преостали део табле може поплочати доминама 2×1?

9. Бројеви $1, 2, \ldots, 2n$ су подељени у два скупа од по n елемената. Бројеви првог скупа су $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, а другог $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Доказати да је $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2$.

10. Одаберимо произвољно n темена правилног $2n$-тоугла и обојимо их плаво, а остала темена црвено. Затим сортирајмо по дужини све "црвено-црвено" дужи (дијагонале или странице) и исто то урадио са "плаво-плавим" дужима. Доказати да су два добијена низа дужи идентична.

11. Којих бројева између 1 и 1000000 има више: оних који се могу представити као збир квадрата и куба или оних који се не могу тако представити?

12. Дума има 1600 делегата, који формирају 80 комитета, сваки са по 80 делегата. Доказати да постоје два комитета који имају бар 4 заједничка члана.

13. Да ли се табла 5×7 може поплочати у неколико слојева фигурама облика  које не прелазе ван табле, тако да је свако поље табле прекривено истим бројем фигура?

14. а) 99 кутија садржи јабуке и поморанџе. Доказати да можемо да изаберемо 50 кутија тако да оне садрже бар половину свих јабука и бар половину свих поморанџи.
б) 100 кутија садржи јабуке и поморанџе. Доказати да можемо да изаберемо 34 кутије тако да оне садрже бар трећину свих јабука и бар трећину свих поморанџи.
в) 100 кутија садржи јабуке, поморанџе и банане. Доказати да можемо да изаберемо 51 кутију тако да оне садрже бар половину свих јабука, бар половину свих поморанџи и бар половину свих банана.

15. Таблица $n \times n$ је попуњена целим бројевима тако да је разлика било која два суседна броја не већа од 1. Доказати да постоји број у таблици који се појављује бар n пута.

16. Правилан $4n$-тоугао је разрезан на паралелограме. Доказати да међу њима постоји бар n правоугаоника.

17. Таблица је разбијена на домине 2×1. Доказати да се поља таблице могу обојити у две боје, тако да свака домина прекрива поља различитих боја, а да у сваком другачијем разбијању на домине постоји домина која прекрива поља исте боје.

milan.novakovic@gmail.com