МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА И РЕКУРЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Настава у Математичкој гимназији, октобар 2003.
Владимир Балтић

1 Принцип математичке индукције

Сваки доказ математичком индукцијом се састоји из три дела: *базе индукције*, *индукцијске претпоставке* и *индукцијског корака*. База је први број n_0 за који важи тврђење (најчешће 0 или 1). У другом делу претпостављамо да тврђење важи за неко $n = k$ и онда у индукцијском кораку показујемо да тврђење важи и за $n = k+1$. На тај начин смо показали да тврђење важи за сваки цео број $n \geqslant n_0$. Ово је обична индукција, а поред ње имамо још неколико типова математичке индукције:

- (*Обична индукција*) $k \mapsto k+1$,
- (*Индукција са већом базом и претпоставком*) $k-m+1, \dots, k-1, k \mapsto k+1$,
- (*Индукција са кораком m*) $k \mapsto k+m$, где је $m \in \mathbb{N}$ фиксиран,
- (*Трансфинитна индукција*) $1, 2, \dots, k \mapsto k+1$,
- (*Регресивна индукција*) нпр. $2^l \mapsto 2^{l+1}$, а затим $k \mapsto k-1$.

Откриће принципа математичке индукције се приписује италијанском математичару Franciscus Maurolycus-у (рођеном 1494). Мада се принцип веома сличан математичкој индукцији јавља још у 12. веку у тумачењима Талмуда (књиге јеврејске мудрости). Проблем се јавио у тумачењу правила која одређују датум као "3 дана пре празника". У доба писања Талмуда није било утврђено да ли се у изразу "x дана пре празника" и сам дан празника рачуна као део тих x дана. Тумачење је да ако би 3 дана укључивали и и празник дослиби до двосмислености. Индуктивни аргумент је коришћен да би добили тај закључак.Основни случај је 1 дан. Нема смисла рећи "1 дан пре празника" када мислимо на тај празник. Стога, "1 дан пре празника" не укључује и празник. Сада и "2 дана пре празника" мора да не укључује и празник, јер би у противном имало исто значење као и "1 дан пре празника". Слично и "3 дан пре празника" не укључује празник. Ово је очито индуктивна аргументација. Од историје да истакнемо да је доказ Неједнакости аритметичке и геометријске средине дао Коши (Cauchy, Augustin Louis, 1789–1857) и тако утро пут регресивној индукцији.

Код принципа математичке индукције морамо водити рачуна да смо показали и базу и индуктивни корак. Наредна два примера илуструју погрешно коришћење принципа математичке индукције. Прво ћемо "показати" да све плавуше имају плаве очи, а затим ћемо генералисати једно тврђење. Нађите грешке у расуђивању!!!

Пример 1. Уколико бар једна плавуша има плаве очи тада све плавуше имају плаве очи.
База: за $n = 1$ уколико бар једна плавуша има плаве очи тада и све плавуше имају плаве очи.
Индукцијска претпоставка: претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ (тј. да ако међу k плавуша бар једна има плаве очи тада све имају плаве очи).
Индукцијски корак: Нека имамо $n = k+1$ плавуша $p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$ од којих једна има плаве очи (без умањења општости можемо узети да је то p_1). Уочимо скуп од k плавуша $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Он задовољава услове индукцијске претпоставке, па све те плавуше имају плаве очи. Затим узмимо скуп од k плавуша $\{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}\}$. И тај скуп задовољава услове индукцијске претпоставке, па и све те плавуше имају плаве очи. На тај начин смо показали да све те плавуше имају плаве очи.

Пример 2. Број n је прост ако и само ако $n \mid 2^n - 2$.
Смер $\Rightarrow$ следи из Мале Фермаове теореме. За смер $\Leftarrow$ имамо "јаку" базу индукције. За $n = 2$: $2 \mid 2^2 - 2 = 2$, за $n = 3$: $3 \mid 2^3 - 2 = 6$, за $n = 4$: $4 \nmid 2^4 - 2 = 14$, за $n = 5$: $5 \mid 2^5 - 2 = 30$, за $n = 6$: $6 \nmid 2^6 - 2 = 62$... Природно је претпоставити да и овај смер важи, само још треба некако показати индуктивни корак. Али то није могуће – може се показати да не важи за $n = 341 = 11 \cdot 13$.

Задаци

1. Доказати да је број $5^n + 2^{n+1}$ дељив са 3 за свако $n \in \mathbb{N}$.

2. Дат је низ $a_n = 3^{2n+2} - 8n - 9$. Доказати да је низ бројева a_n дељив са 64 за свако $n \in \mathbb{N}$.

3. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи:
а) $9 \mid 4^{n+1} + 6n + 5$; **б)** $9 \mid n \cdot 4^{n+1} - (n+1) \cdot 4^n + 1$; **в)** $9 \mid 4^n + 15n - 1$; **г)** $9 \mid 3 \cdot 4^{n+2} + 10^n - 4$;
д) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$; **ђ)** $17 \mid 36^n + 19^n - 2^{n+1}$; **е)** $8 \mid 11 \cdot 3^n + 3 \cdot 7^n - 6$; **ж)** $49 \mid 2^{3n} - 7n - 1$;

з) $57 \mid 7^{n+2}+8^{2n+1}$; **и)** $25 \mid 2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4$; **ј)** $59 \mid 5^{n+2}+26\cdot 5^n+8^{2n+1}$; **к)** $168 \mid 4^{2n}-3^{2n}-7$;
л) $13 \mid 2^{12n+3}-3^{6n+2}$; **љ)** $64 \mid 3^{2n+3}+40n-27$; **м)** $19 \mid 5^{2n+1}2^{n+2}+3^{n+2}2^{2n+1}$.

4. Доказати да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи: $24 \mid n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n$.

5. Доказати да је x^n-y^n дељиво са $x-y$ за све природне бројеве x, y $(x\neq y)$ и n.

6. Доказати да је производ сваких n узастопних бројева дељив са n.

7. Доказати да је број $(n+1)(n+2)\dots(2n)$ дељив са 2^n, а није са 2^{n+1}.

8. Доказати да је број $a_n=2^{2^n}-1$ дељив са 15 за сваки природан број $n\geqslant 2$.

9. Доказати да је број $a_n=3^{2^n}-1$ дељив са 2^{n+2}, а није са 2^{n+3}.

10.† Нека је S произвољан подскуп са $n+1$ елемената скупа $\mathbb{N}_{2n}=\{1,2,\dots,2n\}$ (тј. $|S|=n+1,\ S\subset\mathbb{N}_{2n}$). Доказати да постоје $a,b\in S$ такви да $a\mid b$.

11. Сваки природан број $n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$, је прост број или је производ простих бројева. Доказати.

12. Математичком индукцијом показати да су сви бројеви $(1+\sqrt{2})^n$, $n\in\mathbb{N}$, облика $a+b\sqrt{2}$, где су a и b неки природни бројеви.

13. Доказати да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи: $2^n\geqslant n$.

14. Испитати за које n важи и онда доказати неједнакост $2^n>n^2$.

15. *Бернулијева неједнакост.* Нека је $a\in\mathbb{R},\ a>-1,\ a\neq 0$. Доказати да за свако $n\geqslant 2$ важи $(1+a)^n>1+n\cdot a$.

16. Показати неједнакост $\sqrt{p^n}+\sqrt{q^n}\leqslant\sqrt{(p+q)^n}$, где је $n\geqslant 2,\ p,q\in\mathbb{R}^+$.

17. Нека су $a,b\in\mathbb{R}^+$ и $n\in\mathbb{N}$. Проверити да ли важи неједнакост $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\dfrac{x^n+y^n}{2}$.

18. Доказати неједнакости:
а) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n},\ n\in\mathbb{N}$;
б) $\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\dots+\dfrac{1}{2n}\right)^2<\dfrac{1}{2},\ n\in\mathbb{N}$;
в) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\dots+\dfrac{1}{2n}\geqslant\dfrac{1}{2},\ n\in\mathbb{N}$;
г) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\dots+\dfrac{1}{2n}\geqslant\dfrac{13}{24},\ n\in\mathbb{N},\ n>1$;
д) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n^2}>1,\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$.

19. Доказати неједнакости:
а) $n!>2^n,\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 4$;
б) $n!<n^{n-1},\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3$.

20. Доказати неједнакости:
а) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3n+1}},\ n\in\mathbb{N}$;
б) $\dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}<\sqrt{\dfrac{3}{4n+3}},\ n\in\mathbb{N}$.

21.† Доказати неједнакост $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dots+\dfrac{1}{2^n}<1$.

22. Доказати неједнакост $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

23.† *Неједнакост аритметичке и геометријске средине.* Доказати

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n},\ n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R}^+.$$

24.† Нека су $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}^+$ такви да важи $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$. Доказати да је тада $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\geqslant 2^n$.

25. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ и $n \geqslant 2$. Доказати да је тада $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) > 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$.

26. Нека су $0 < a_i < 1$ $(i = 1, 2\ldots, n)$ и $n \geqslant 2$. Доказати да је $(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n) > 1-(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

27.† *Неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског.* Доказати

$$({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + \ldots + {y_n}^2) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2, \; n \in \mathbb{N}, \; x_i, y_j \in \mathbb{R}.$$

28. Доказати да је $\sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \ldots + \sqrt{a^2}}} < |a| + 1$, где на левој страни има n корена.

29. Доказати једнакости:
а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;
г) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;
д) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{2}$.

30. Наћи вредности збирова:
а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$;
б) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)$;
в) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$.

31. Доказати једнакост $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.

32. Доказати једнакост $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n+1)/2$.

33. Доказати једнакости
а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;
б) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$;
в) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;
г) $\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;
д) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

34. Доказати да важи $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

35.† Доказати да за $n > 1$ важи $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \dfrac{k}{m}$, где је k непаран, а m паран природан број.

36. Доказати једнакости
а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$;
б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+m) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+3m+1)$;
в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{2^{2^{k-1}}+1} = 2 - \frac{2^{n+1}}{2^{2^n}-1}$;
г) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

37. Нека је низ природних бројева $\{a_n\}$ дефинисан на следећи начин: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Доказати да за свако $n \geqslant 1$ важи $a_n = 2^n - 1$.

38. Нека је низ природних бројева $\{a_n\}$ дефинисан на следећи начин: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ и $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$. Одредити општи члан низа.

39. Нека је низ природних бројева $\{a_n\}$ дефинисан на следећи начин: $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + 2a_0$. Доказати да је за сваки елемент низа $a_n = 2^n$.

40. Наћи општи члан низа датог са $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$ за $n \geqslant 3$.

41. Дат је низ $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ за $n \geqslant 2$. Показати да за $k \geqslant 2$ важи $a_{2k} > 0$ и $a_{2k+1} < 0$.

42.† Низ $\{a_n\}$ одређен је са $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8{a_n}^2 + 1}$ за $n \geqslant 1$. Доказати да су сви чланови тог низа природни бројеви.

43.† Нека је a_0 произвољан реалан број и $a_{n+1} = {a_n}^2(a_n - 1)^2$ за $n \geqslant 0$. Одредити a_n.

44. *Моавроава формула.* Доказати: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.

45. *Дирихлеов принцип* (енглески Pigeonhole principle). Ако је $n+1$ лоптица распоређено у n кутија тада постоји бар једна кутија у којој се налази више од једне лоптице.

46. Доказати да је у сваком друштву број људи који се познају са непарним бројем људи из друштва паран.

47. У некој држави постоји n градова. Да ли се они могу повезати путевима који воде из једног града у други и обратно, тако да из сваког града иду тачно три пута?

48.† *Ојлерова теорема за полиедре.* Конвексан полиедар са n темена и m ивица има $f = m - n + 2$ стране. Доказати.

49. Доказати да n правих у равни деле ту раван на највише 2^n делова.

50. Доказати да се раван подељена са произвољних n правих може обојити са две боје тако да су сваке две суседне области обојене различитим бојама.

51. Доказати да n правих у равни у општем положају деле ту раван на највише $n(n+1)/2$ делова.
(За неколико правих у равни каже се да су у *општем положају* ако никоје две међу њима нису паралелне и никоје три од њих се не секу у истој тачки.)

52. Дато је $n \geqslant 3$ правих у равни, од којих никоје две нису паралелне. Доказати да је бар једна област коју оне формирају троугао.

53. Дато је $n \geqslant 3$ правих у равни у општем положају. Доказати да оне формирају бар $n - 2$ троугаоних области.

54. Доказати да се области у равни које су добијене као пресеци n кружница могу обојити са две боје тако да су сваке две суседне области обојене различитим бојама.

55. Доказати да се области у равни које су добијене као пресеци n кружница са тетивом могу обојити са три боје тако да су сваке две суседне области обојене различитим бојама.

56.† У равни је дато n правих у општем положају. Доказати да је могуће у сваком од делова, на које те праве деле раван, уписати цео број тако да:
1° за сваки уписани број a важи $a \neq 0$ и $|a| \leqslant n$;
2° са сваке стране сваке од датих правих је збир бројева једнак 0.

57.† На кружници је дато n тачака. Никоје три тетиве које се добијају спајањем ових тачака се не секу у једној тачки унутар круга. На колико области ове тетиве деле круг?

58.† *Теорема Пика* (Pick). Нека је полигон у равни такав да су му сва темена целобројна (тј. имају обе координате целобројне). Његова површина је дата формулом $S = \dfrac{p}{2} + q - 1$, где је q број чворова унутар полигона, а p број чворова на граници полигона (рачунајући и темена полигона).

59. Доказати да се n квадрата могу исећи на делове тако да се од њих може саставити нови квадрат.

60. Дат је правилан шестоугао $A_1A_2\ldots A_6$. Уведимо два низа тачака на следећи начин: $A_{n+6} = A_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $B_1 = A_1$, а B_n је пресек дужи $B_{n-1}A_{n+1}$ и OA_n. Одредити дужину дужи OB_n.

61. У трапезу $ABCD$ су основице $AD = a$ и $BC = b$. Средишта дужи AC и BD су B_1 и C_1. B_n је средиште дијагонале AC_{n-1} и C_n је средиште дијагонале DB_{n-1} у четвороуглу $AB_{n-1}C_{n-1}D$.
а) Одредити дужину дужи B_nC_n.
б) Да ли конвергира та дужина када $n \to \infty$?
в) За које трапезе је дужина дужи B_nC_n константна?

62. Дат је непаран број тачака $A_1, \ldots, A_{2k+1}$, $k \geqslant 1$. Доказати да постоји затоврена изломљена линија $X_1, \ldots, X_{2k+1}$ таква да важи: тачка A_1 је средиште дужи X_1X_2, тачка A_2 је средиште дужи X_2X_3, ..., тачка A_{2k} је средиште дужи $X_{2k}X_{2k+1}$ и тачка A_{2k+1} је средиште дужи $X_{2k+1}X_1$.

63.† Доказати да постоји n различитих природних бројева, таквих да је сума њихових кубова једнака кубу природног броја, где је n произвољан природан број већи од 2.

2 Диференцне (рекурентне; рекурзивне) једначине

Диференцна једначина реда k је једначина облика $F(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0$, где је n природан број, а $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}$ је $k+1$ узастопних чланова низа $\{a_n\}$. Решење диференцне једначине је низ $\{a_n\}$, који диференцну једначину преводи у идентитет. Опште решење диференцне једначине реда k је оно решење које садржи сва решења и оно садржи k произвољних константи (уколико су дати почетни чланови овог низа онда је могуће одредити вредности тих константи и онда се добија једно или партикуларно решење). Нека су низови $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \dots, \{a_n^{(s)}\}$ решења хомогене диференцне једначине тада је и $b_n = C_1 \cdot a_n^{(1)} + C_2 \cdot a_n^{(2)} + \ldots + C_s \cdot a_n^{(s)}$ решење те диференцне једначине. Ако је $\dfrac{a_n^{(i)}}{a_n^{(j)}} \neq const$ тада су a_n^i и a_n^j независна (непропорционална) решења. Решења $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \dots, \{a_n^{(k)}\}$ диференцне једначине k–тог реда $F(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0$ су независна ако и само ако је следећа детерминанта различита од нуле:

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_n^{(2)} & \dots & a_n^{(s)} \\ a_2^{(1)} & a_n^{(2)} & \dots & a_n^{(s)} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{s-1}^{(1)} & a_{s-1}^{(2)} & \dots & a_{s-1}^{(s)} \\ a_s^{(1)} & a_s^{(2)} & \dots & a_s^{(s)} \end{vmatrix} \neq 0$$

и тада је низ са општим чланом $b_n = C_1 \cdot a_n^{(1)} + C_2 \cdot a_n^{(2)} + \ldots + C_k \cdot a_n^{(k)}$, где су $C_1, C_2, \dots, C_k$ произвољне константе, опште решење дате једначине.

Линеарна диференцна једначина је једначина облика $f_k(n) \cdot a_{n+k} + f_{k-1}(n) \cdot a_{n+k-1} + \ldots + f_0(n) \cdot a_n = F(n)$ и она се најчешће задаје у нормираном облику, тј. $f_k(n) = 1$. Ако је $F(n) = 0$ то је хомогена диференцна једначина, а ако је $F(n) \neq 0$ то је нехомогена диференцна једначина. Ако су функције $f_i(n)$ константе онда имамо дифернцну једначину са константним коефицијентима, у противном говоримо о једначини са функционалним коефицијентима.

Опште решење нехомогене диференцне једначине једнако је збиру општег решења хомогене диференцне једначине и партикуларног (произвољног) решења решења нехомогене диференцне једначине. Нехомогене диференцна једначина се решава на неки од следећих начина: 1° након исписивања првих неколико чланова низа уочимо неко правило (или само решење) и то докажемо математичком индукцијом;
2° решимо одговарајућу хомогену диференцну једначину и погодимо партикуларно решење;
3° решимо одговарајућу хомогену диференцну једначину и применимо методу варијације константи.

Сада ћемо посматрати линеарну хомогену диференцну једначину са константним коефицијентима:

$$(*) \qquad f_k \cdot a_{n+k} + f_{k-1} \cdot a_{n+k-1} + \ldots + f_0 \cdot a_n = 0,$$

где су $f_i,\ i = 0, 1, \dots, k$ константе и $f_0, f_k \neq 0$. Ако потражимо њено решење у облику $a_n = t^n$, добијамо $t^n(f_k t^k + f_{k-1} t^{k-1} + \ldots + f_1 t + f_0) = 0$. Осим тривијалног решења $a_n = 0$ сва остала решења претпостављаног облика даје једначина

$$f_k t^k + f_{k-1} t^{k-1} + \ldots + f_1 t + f_0 = 0.$$

Ова алгебарска једначина се назива карактеристична једначина диференцне једначине $(*)$. Сада разликујемо неколико случајева у зависности од тога какви су корени $t_1, t_2, \dots, t_k$ карактеристичне једначине.
1° сва решења $t_1, t_2, \dots, t_k$ (карактеристична једначина степена k има тачно k решења над пољем $\mathbb{C}$) су међусобно различита и тада је опште решење дато са

$$b_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot {t_2}^n + \ldots + C_k \cdot {t_k}^n.$$

2° Ако међу решењима карактеристичне једначине има вишеструких, уочимо корен t_m реда $s,\ s > 1$. Тада се може показати да су низови са следећим општим члановима $t_m^n, nt_m^n, \dots, n^{s-1} t_m^n$ сви решења полазне диференцне једначине и да је део општег решења који одговара корену t_m израз

$$C_m \cdot {t_m}^n + C_{m+1} \cdot n \cdot {t_m}^n + \ldots + C_{m+s-1} \cdot n^{s-1} \cdot {t_k}^n,$$

где су $C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m+s-1}$ произвољно одабране константе.
3° Нека је комплексан број $t_i = \alpha + \beta i$ проста нула карактеристичне једначине. Тада је и $t_{i+1} = \overline{t_i} = \alpha - \beta i$ проста нула. Ако је $\alpha \pm \beta i = \rho \cdot (\cos\theta \pm i \cdot \sin\theta)$ онда имамо да су чланови који одговарају решењима t_i и t_{i+1} (тај део је такође реалан број) једнаки:

$$C_i \cdot (\alpha + \beta i)^n + C_{i+1} \cdot (\alpha - \beta i)^n = D_i \cdot \rho^n \cdot \cos n\theta + D_{i+1} \cdot \rho^n \cdot \sin n\theta,$$

где су C_i и C_{i+1} комплексне константе, а D_i и D_{i+1} реалне.
4° Уколико је комплексан број $t_i = \alpha + \beta i$ нула реда s карактеристичне једначине (тада је и $t_{i+1} = \overline{t_i} = \alpha - \beta i$ нула реда s), слично као у претходна два случаја, њима одговарају партикуларна решења

$$\rho^n \cdot \cos n\theta, \rho^n \cdot \sin n\theta; n \cdot \rho^n \cdot \cos n\theta, n \cdot \rho^n \cdot \sin n\theta; \ldots; n^{s-1} \cdot \rho^n \cdot \cos n\theta, n^{s-1} \cdot \rho^n \cdot \sin n\theta.$$

Пример 1. Нека је дата рекурентна једначина $x_{n+3} + ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$. Карактеристична једначина је $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ и њене нуле су t_1, t_2 и t_3.
1° Уколико су све три нуле различити реални бројеви опште решење је $x_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot {t_2}^n + C_3 \cdot {t_3}^n$.
2° Уколико су све три нуле реални бројеви и $t_1 = t_2 \neq t_3$, опште решење је $x_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot n \cdot {t_1}^n + C_3 \cdot {t_3}^n$.
3° Уколико је решење троструко и реално, тј. $t_1 = t_2 = t_3$, опште је $x_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot n \cdot {t_1}^n + C_3 \cdot n^2 \cdot {t_1}^n$.
4° Уколико нису сва решења реална, тј. $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 = \alpha + \beta i = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$, $t_3 = \alpha - \beta i = \rho \cdot (\cos\theta - i \cdot \sin\theta)$, опште решење је $x_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot \rho^n \cdot \cos n\theta + C_3 \cdot \rho^n \cdot \sin n\theta$.

Пример 2. Дат је систем диференцних једначина $x_{n+1} = px_n + qy_n,\ y_{n+1} = rx_n + sy_n,\ p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Ако је $q = r = 0$ имамо две геометријске прогресије. Када је $q \neq 0$ систем сводимо на једну диференцну једначину другог реда: из прве једначине имамо $y_n = \dfrac{x_{n+1} - px_n}{q}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_{n+2} - px_{n+1}}{q}$ (свако n у претходној једначини смо заменили са $n+1$) и кад ово заменимо у другу добијамо $\dfrac{x_{n+2} - px_{n+1}}{q} = rx_n + s\dfrac{x_{n+1} - px_n}{q}$, односно $x_{n+2} + (p+s)x_{n+1} + (sp - qr)x_n = 0$.

Задаци

Наћи општи члан следећих низова (1–19):

1. $a_0 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n$ за $n \geqslant 0$.

2. $a_0 = 2,\ a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ за $n \geqslant 1$.

3. $a_0 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$ за $n \geqslant 0$.

4. $d_1 = -2,\ d_2 = 10,\ d_n = 5d_{n-1} - 6d_{n-2}$ за $n \geqslant 3$.

5. $a_0 = 5,\ a_1 = 6,\ a_2 = 10,\ a_{n+1} = 6a_n - 11a_{n-1} + 6a_{n-2}$ за $n \geqslant 2$.

6. $a_0 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + 2a_0$ за $n \geqslant 1$.

7. *Фибоначијев низ.* $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

8. $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ за $n \geqslant 0$.

9. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ за $n \geqslant 1$.

10. $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ за $n \geqslant 3$.

11. $d_0 = 1,\ d_1 = x + y,\ d_n = (x+y)d_{n-1} - xyd_{n-2}$ за $n \geqslant 2$ и $x, y \in \mathbb{R}$.

12. $d_0 = 1,\ d_1 = 10,\ d_n = 10d_{n-1} - 25d_{n-2}$ за $n \geqslant 2$.

13. $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ за $n \geqslant 0$.

14. $x_0 = 1,\ x_1 = 4,\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$ за $n \geqslant 0$.

15. $a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n$ за $n \geqslant 0$.

16. $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ за $n \geqslant 2$.

17. $x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$ за $n \geqslant 0$.

18. $x_0 = 2,\ x_1 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ за $n \geqslant 0$.

19.† $d_0 = 1,\ d_1 = b,\ d_n = b \cdot d_{n-1} - a^2 \cdot d_{n-2}$ за $n \geqslant 2$ и $a, b \in \mathbb{R}$, $b^2 \leqslant 4a^2$.

20. Дат је низ са $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ за $n \geqslant 3$. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

21.† Дат је низ са $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_{n+2} = \dfrac{{x_{n+1}}^3}{{x_n}^2}$ за $n \geqslant 0$. Наћи општи члан.

22.† Решити систем рекурентних једначина $\quad x_{n+1} = 3x_n - y_n, \quad y_{n+1} = x_n + y_n,\ x_0 = 5\ y_0 = 1.$

23.† Одредити x_n ако је дато x_0 и $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$.

24.† Решити рекурентну једначину $x_{n+1} \cdot x_n + 3x_{n+1} + x_n + 4 = 0,\ x_0 = 0,\ x_1 = -\dfrac{4}{3}$.

3 Фибоначијеви бројеви

Леонардо од Пизе са надимком Фибоначи (*Фибонацци је срађено од "филиус Бонацци", тј. Боначијев син; живео је* 1180 − 1240 *или* 1175 − 1250*; најпознатија дела су му Либер абаци, 1202, у којој се поред многобројних проблема борио за хиндо–арапски бројни систем и Либер чуадраторум, 1225. – књига квадрата бројева која представља први помак аритметике после Диофанта*) је у својој "Књизи о абакусу" поставио "Проблем зечева": Сваки пар зец–зечица (старих барем 2 месеца) добију током сваког следећег месеца пар младих: зеца и зечицу. Ако је на почетку године био један новорођен пар, колико ће бити укупно парова зечева почетком следеће године? (Претпостављамо да зечеви не умиру.)

Нека је f_n број парова зец–зечица после n месеци, тј. током $(n+1)$–вог месеца од почетка године. Према претпоставци је $f_0 = 1$ и $f_1 = 1$ (јер тај пар још није зрео за размножавање), а $f_n,\ n \geqslant 2$ се добија када броју парова f_{n-1} који су живели прошлог месеца дода број новорођених парова зечева који се добијају од f_{n-2} парова живих пре два месеца. Зато је за све $n \geqslant 2$ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Тако добијамо низ

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584

па ће након годину дана бити $f_{12} = 233$ парова зечева.

Најчешће се Фибоначијев низ дефинише тако да је

$$F(1) = 1 \quad F(2) = 1 \quad \text{i} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Понекад се уводи и проширење тако да индекси могу да буду цели бројеви: $F_0 = 0$ и $F_{-a} = (-1)^{a+1}F_a$, па низ изгледа $\ldots, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ Из $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ имамо $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, па је карактеристична једначина $t^2 - t - 1 = 0$ и њени корени су реални и различити $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, па је општи члан $F_n = C_1 \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Како су $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$, заменом $n = 0$ и $n = 1$ у опште решење добијамо систем по C_1 и C_2, чија су решења $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и $C_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$, одакле добијамо формулу:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Уствари, F_n је тачно једнак $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ заокруженом на најближи цео број, јер је

$$\left|F_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| = \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n}{\sqrt{5}} < \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

Како израз $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ може бити и позитиван и негативан, те се помоћу целог дела Фибоначијеви бројеви могу изразити као:

$$F_n = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], & n = 2k \\ \left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + 1, & n = 2k+1 \end{cases},$$

где $[x]$ означава цео део броја x (нпр. $[\pi] = 3$, а $[-\pi] = -4$).

Однос два узастопна члана Фибоначијевог низа може се представити преко верижног разломка $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \underbrace{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}_{n}$ и кад пустимо да n тежи бесконачности добијамо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, тј. тај однос тежи златном пресеку.

Златни пресек је био популаран у ренесансној архитектури. Тадашњи грађевинари су по угледу на Старе Грке сматрали идеалним кад је "однос већег дела према мањем једнак односу целе дужине према већем делу" :

$\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha} \;\Rightarrow\; \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988.$

Да је $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ једнако датом верижном разломку показује се индукцијом: за $n = 1$ имамо $\dfrac{F_1}{F_1} = \dfrac{1}{1} = 1$. Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k$. За $n = k+1$ је $\dfrac{F_{k+2}}{F_{k+1}} = \dfrac{F_{k+1} + F_k}{F_{k+1}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}}$, па због принципа математичке индукције тврђење важи за свако природно n. Лако се показује да је $1 \leqslant \dfrac{F_{n+1}}{F_n} \leqslant 2$, па је овај низ ограничен и може се разбити на један подниз који је растући и један подниз који је опадајући. Стога тај низ конвергира ка неком x. Тада је $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, тј. добијамо $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Може се показати да ка златном пресеку тежи и низ $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}$.

Остале особине и идентитете са Фибоначијевим бројевима даћемо кроз задатке.

Задаци

1. Фибоначијев број F_n је:
а) паран ако и само ако је $n = 3k$;
б) дељив са 3 ако и само ако је $n = 4k$;
в) дељив са 4 ако и само ако је $n = 6k$;
г) дељив са 5 ако и само ако је $n = 5k$;
д) дељив са 10 ако и само ако је $n = 15k$.

2. Доказати да је $\dfrac{1}{10}(F_{n+60} - F_n)$ цео број.

3. Број цифара F_n је већи од $\dfrac{n-2}{5}$.
Доказати следеће идентитете (4–28):

4. $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

5. $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

6. $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

7. $F_1 - F_2 + F_3 - \ldots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$.

8. ${F_1}^2 + {F_2}^2 + \ldots + {F_n}^2 = F_n F_{n+1}$.

9. $F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}$ $(n > 1)$.

10. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, где је (a, b) највећи заједнички делилац бројева a и b.

11. $F_{2n} = {F_{n+1}}^2 - {F_{n-1}}^2$.

12. $F_{2n-1} = {F_n}^2 + {F_{n-1}}^2$.

13. $F_{m+1} F_m - F_{m-1} F_{m-2} = F_{2m-1}$.

14. $F_{m+1} F_{m-1} - {F_m}^2 = (-1)^m$.

15. $F_{n+1} F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^n$.

16. $F_{3n} = {F_{n+1}}^3 + {F_n}^3 - {F_{n-1}}^3$.

17. $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \ldots + F_{2n-1} F_{2n} = {F_{2n}}^2$.

18. $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \ldots + F_{2n} F_{2n+1} = {F_{2n+1}}^2 - 1$.

19. $2^{n-1} F_n = \binom{n}{1} + 5\binom{n}{3} + 5^2\binom{n}{5} + \ldots$

20. $F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-k}{k}$, где је $k = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ цео део.

21. $F_3 + F_6 + \ldots + F_{3n} = (F_{3n+2} - 1)/2.$

22. $F_1 + 2F_2 + \ldots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2.$

23. $F_{n+k}F_{m-k} = F_nF_m + (-1)^n F_{m-n-k}F_k.$

24. ${F_n}^4 - F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = 1.$

25. ${F_k}^3 = (F_{3k} - 3(-1)^n F_k)/5.$

26. ${F_1}^3 + {F_2}^3 + \ldots + {F_n}^3 = (F_{3n+2} + 6(-1)^{n+1}F_{n-1} + 5)/10.$

27. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{m+k} = F_{m+2n}.$

28. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} F_{2n+k} = (-1)^n F_n.$

29. За произвољне $k, n \in \mathbb{N}$ разломак $\dfrac{k \cdot F_{n+2} + F_n}{k \cdot F_{n+3} + F_{n+1}}$ је нескратив. Доказати.

30. Доказати да за свако природно m међу првих $m^2 - 1$ чланова Фибоначијевог низа има бар један дељив са m.

31. Доказати да се сваки природан број може представити као збир неколико Фибоначијевих бројева чији се индекси разликују бар за 2.

32. Доказати да сума осам узастопних чланова Фибоначијевог низа никада није члан Фибоначијевог низа.

33. Доказати да се међу првих 100 000 001 Фибоначијевих бројева налази бар један који се завршава са четири нуле.

34.† Доказати да је природан број n члан Фибоначијевог низа ако и само ако је $5n^2 + 4$ или $5n^2 - 4$ потпун квадрат.

35.† Доказати да постоји јединствена тројка природних бројева a, b, c која задовољава услове: $b < a$, $c < a$ и за свако природно n број $F_n - nbc^n$ је дељив са a.

36.† $F_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$ за $p = 5k \pm 1$ или $F_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}$ за $p = 5k \pm 2$, $p > 1$ важи ако и само ако је p прост број. Доказати.

37. Доказати да за свако $n \in \mathbb{Z}$ важи $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{Vmatrix}.$

38. Доказати да $\forall n \in \mathbb{N}$ важи $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix} = F_{n+1}$, где је детерминанта реда n.

39. Доказати да бројеви $(F_nF_{n+3}, 2F_{n+1}F_{n+2}, {F_{n+1}}^2 + {F_{n+2}}^2)$ представљају Питагорину тројку.

4 Решења, упутства, резултати

1.1. Овај задатак ћемо урадити на 3 начина.

I начин (Помоћу математичке индукције):

Означимо са $a_n = 5^n + 2^{n+1}$ и покажимо тврђење да $3 \mid a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

1° *База индукције.* За $n = 1$ имамо да је $a_1 = 5^1 + 2^2 = 9$ што је дељиво са 3. ✓

2° *Индукцијска претпоставка.* Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k$: $3 \mid a_k$.

3° *Индукцијски корак.* Покажимо да тврђење важи и за $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = 5^{k+1} + 2^{k+2} = 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} = 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} = 3 \cdot 5^k + 2a_k,$$

а тај број је дељив са 3 јер је први сабирак умножак броја 3, а за други по индукцијској претпоставци имамо $3 \mid a_k$. ✓

Стога по принципу математичке индукције је број $a_n = 5^n + 2^{n+1}$ дељив са 3 за свако $n \in \mathbb{N}$.

II начин (Помоћу рекурентних низова):

Ако је $a_n = 5^n + 2^{n+1} = 1 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^n$ опште решење рекурентне једначине, онда су 5 и 2 нуле карактеристичне једначине, тј. карактеристична једначина је $(t - 5)(t - 2) = 0$, односно $t^2 - 7t + 10 = 0$. Одатле добијамо да је рекурентна једначина $a_{n+1} - 7a_n + 10a_{n-1} = 0$, односно $a_{n+1} = 7a_n - 10a_{n-1}$. Докажимо математичком индукцијом типа $k - 1, k \mapsto k + 1$ да су онда сви чланови низа $\{a_n\}$ дељиви са 3.

1° За $n = 1$ и $n = 2$ имамо да је $a_1 = 5^1 + 2^2 = 9$ и $a_2 = 5^2 + 2^3 = 33$, што је дељиво са 3. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k - 1$ и $n = k$: $3 \mid a_{k-1}$, $3 \mid a_k$.

3° За $n = k + 1$ имамо да је и $a_{k+1} = 7a_k - 10a_{k-1}$ дељиво са 3 јер су оба члана по индукцијској претпоставци дељиви са 3. ✓

Стога по принципу математичке индукције су сви чланови низа $a_n = 5^n + 2^{n+1}$ дељиви са 3.

III начин (Помоћу конгруенција по модулу):

$$5^n + 2^{n+1} \equiv 2^n + 2 \cdot 2^n \equiv (1 + 2)2^n \equiv 0 \pmod 3.$$

1.2. И овај задатак ћемо урадити на 3 начина.

I начин (Помоћу математичке индукције):

Означимо са $a_n = 3^{2n+2} - 8n - 9$ и покажимо тврђење да $64 \mid a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

1° *База индукције.* За $n = 0$ (можемо узети $n = 1$, али би имали више да рачунамо, а са оваквом базом ћемо показати тврђење за свако $n \in \mathbb{N}_0$) имамо да је $a_0 = 3^2 - 8 \cdot 0 - 9 = 0$ што је дељиво са 64. ✓

2° *Индукцијска претпоставка.* Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k$: $64 \mid a_k$.

3° *Индукцијски корак.* Покажимо да тврђење важи и за $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = 3^{2k+4} - 8(k + 1) - 9 = 9 \cdot 3^{2k+2} - 8k - 17 = 9 \cdot (3^{2k+2} - 8k - 9) + 64k + 64 = 9 \cdot a_k + 64k + 64,$$

а тај број је дељив са 64. ✓

Стога по принципу математичке индукције је број $a_n = 3^{2n+2} - 8n - 9$ дељив са 64 за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

II начин (Помоћу рекурентних низова):

Ако је $a_n = 3^{2n+2} - 8n - 9 = 9 \cdot 9^n - 9 \cdot 1^n - 8 \cdot n \cdot 1^n$ опште решење рекурентне једначине, онда је 9 нула, а 1 двострука нула карактеристичне једначине, тј. карактеристична једначина је $(t - 9)(t - 1)^2 = 0$, односно $t^3 - 11t^2 + 19t - 9 = 0$. Одатле добијамо да је рекурентна једначина $a_{n+1} - 11a_n + 19a_{n-1} - 9a_{n-2} = 0$, односно $a_{n+1} = 11a_n - 19a_{n-1} + 9a_{n-2}$. Докажимо математичком индукцијом типа $k - 2, k - 1, k \mapsto k + 1$ да су онда сви чланови низа $\{a_n\}$ дељиви са 64.

1° За $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$ имамо да је $a_0 = 0$, $a_1 = 3^4 - 8 \cdot 1 - 9 = 64$ и $a_2 = 3^6 - 8 \cdot 2 - 9 = 704 = 64 \cdot 11$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k - 2$, $n = k - 1$ и $n = k$: $64 \mid a_{k-2}$, $64 \mid a_{k-1}$, $64 \mid a_k$.

3° За $n = k + 1$ имамо да је и $a_{k+1} = 11a_k - 19a_{k-1} + 9a_{k-2}$ дељиво са 64 јер су сва три члана по индукцијској претпоставци дељиви са 64. ✓

Стога по принципу математичке индукције су сви чланови низа $a_n = 3^{2n+2} - 8n - 9$ дељиви са 64.

III начин (Помоћу конгруенција по модулу):

$a_n = 3^{2n+2} - 8n - 9 = 9^{n+1} - 8n - 9$. Како је $9^1 \equiv 9 \pmod{64}$, $9^2 \equiv 81 \equiv 17 \pmod{64}$, $9^3 \equiv 17 \cdot 9 = 153 \equiv 25 \pmod{64}$, $9^4 \equiv 25 \cdot 9 = 225 \equiv 33 \pmod{64}$, $9^5 \equiv 33 \cdot 9 = 297 \equiv 41 \pmod{64}$, $9^6 \equiv 41 \cdot 9 = 369 \equiv 49 \pmod{64}$, $9^7 \equiv 49 \cdot 9 = 441 \equiv$

57 (mod 64) и $9^8 \equiv 57 \cdot 9 = 513 \equiv 1 \pmod{64}$ добијамо да је

$$9^n \equiv \begin{cases} 1 & \text{за} \quad n = 8k \\ 9 & \text{за} \quad n = 8k+1 \\ 17 & \text{за} \quad n = 8k+2 \\ 25 & \text{за} \quad n = 8k+3 \\ 33 & \text{за} \quad n = 8k+4 \\ 41 & \text{за} \quad n = 8k+5 \\ 49 & \text{за} \quad n = 8k+6 \\ 57 & \text{за} \quad n = 8k+7 \end{cases} \pmod{64}.$$

Одатле следи да је

$$a_n = 9^{n+1} - 8n - 9 \equiv \begin{cases} 9-0-9 & \equiv 0 & \text{за} \quad n = 8k \\ 17-8-9 & \equiv 0 & \text{за} \quad n = 8k+1 \\ 25-16-9 & \equiv 0 & \text{за} \quad n = 8k+2 \\ 33-24-9 & \equiv 0 & \text{за} \quad n = 8k+3 \\ 41-32-9 & \equiv 0 & \text{за} \quad n = 8k+4 \\ 49-40-9 & \equiv 0 & \text{за} \quad n = 8k+5 \\ 57-48-9 & \equiv 0 & \text{за} \quad n = 8k+6 \\ 1-56-9 & \equiv 0 & \text{за} \quad n = 8k+7 \end{cases} \pmod{64},$$

односно број $a_n = 9^{n+1} - 8n - 9 \equiv 0 \pmod{64}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Сваки део овог задатка може се урадити на 3 начина (помоћу математичке индукције, рекурентних низова и конгруенција по модулу) слично као и претходна два задатка.

1.4. I начин (Помоћу математичке индукције):
Означимо са $a_n = n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$ и покажимо тврђење да $24 \mid a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.
1° *База индукције*. За $n = 0$ имамо да је $a_0 = 0$ што је дељиво са 24. ✓
2° *Индукцијска претпоставка*. Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k$: $24 \mid a_k$.
3° *Индукцијски корак*. Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+1)^6 - 3(k+1)^5 + 6(k+1)^4 - 7(k+1)^3 + 5(k+1)^2 - 2(k+1) \\ &= (k^6 + 6k^5 + 15k^4 + 20k^3 + 15k^2 + 6k + 1) - 3(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) + 6(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - \\ &\qquad -7(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 5(k^2 + 2k + 1)^2 - 2(k+1) \\ &= k^6 + 3k^5 + 6k^4 + 7k^3 + 5k^2 + 2k \\ &= (k^6 - 3k^5 + 6k^4 - 7k^3 + 5k^2 - 2k) + 2(3k^5 + 7k^3 + 2k) \end{aligned}$$

први сабирак је дељив са 24 по индукцијској претпоставци, а за други ћемо математичком индукцијом показати да је $b_n = 3n^5 + 7n^3 + 2n$ дељив са 12:

1° За $n = 0$ имамо да је $b_0 = 0$ што је дељиво са 12. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k$: $12 \mid b_k$.

3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$:

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 3(k+1)^5 + 7(k+1)^3 + 2(k+1) \\ &= 3(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) + 7(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 2(k+1) \\ &= 3k^5 + 15k^4 + 37k^3 + 51k^2 + 38k + 12 \\ &= (3k^5 + 7k^3 + 2k) + 12(k^4 + 2k^3 + 4k^2 + 3k + 1) + 3(k^4 + 2k^3 + k^2) \end{aligned}$$

први сабирак је дељив са 12 по индукцијској претпоставци, други је очигледно дељив са 12, а за трећи ћемо математичком индукцијом показати да је $c_n = n^4 + 2n^3 + n^2$ дељив са 4:

1° За $n = 0$ имамо да је $c_0 = 0$ што је дељиво са 4. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за неко $n = k$: $4 \mid c_k$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$:

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= (k+1)^4 + 2(k+1)^3 + (k+1)^2 \\ &= (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) + 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (k^2 + 2k + 1) \\ &= k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4 \\ &= (k^4 + 2k^3 + k^2) + 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \end{aligned}$$

Први сабирак је дељив са 4 по индукцијској претпоставци, други је очигледно дељив са 4.

Овим смо показали да је c_n увек дељив са 4, а самим тим је b_n увек дељив са 12, а самим тим је и a_n увек дељив са 24, што је и требало показати.
(Уместо овог математичари стављају и само "q.e.d.", што је скраћеница латинског "quod erat demonstrantum" које баш значи "што је и требало показати". Ова реченица, или само "q.e.d.", се налази на крају великог броја доказа.) ✓

II начин (Помоћу теорије бројева):
У овом решењу највећи проблем је како доћи до следеће факторизације:

$$a_n = n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n = n(n-1)(n^2-n+1)(n^2-n+2) = n(n-1)\left(n(n-1)+1\right)\left(n(n-1)+2\right).$$

Ово је производ три узастопна броја, $n(n-1)$, $n(n-1)+1$ и $n(n-1)+2$, па је дељив са 3. Број $n(n-1)$ је паран (као производ два узастопна броја), па су $n(n-1)$ и $n(n-1)+2$ два узастопна парна броја па је један од њих дељив и са 4, те је њихов производ дељив са 8. Дакле, тражени број је дељив са 24, q.e.d.

1.5. Фиксирајмо бројеве $x, y \in \mathbb{N}$ $(x \neq y)$ и тврђење $x^n - y^n$ је дељиво са $x - y$ показујемо индукцијом по n.
1° За $n = 1$ имамо да је $x^1 - y^1 = x - y$ дељиво са $x - y$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за све природне $n \leq k$: $x^n - y^n$ дељиво са $x - y$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x(x^k - y^k) + y(x^k - y^k) + x \cdot y^k - y \cdot x^k = x(x^k - y^k) + y(x^k - y^k) + xy(x^{k-1} - y^{k-1}),$$

а сви ови бројеви су дељиви са $x - y$ по индукцијској претпоставци. ✓
Стога по принципу математичке индукције је $x^n - y^n$ дељиво са $x - y$ за све природне бројеве x, y $(x \neq y)$ и n.

Напомена: тврђење овог задатка смо могли и одмах да добијемо из формуле

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

али смо вежбали доказивање математичком индукцијом.

1.6. Тврђење $n \mid m(m+1)\ldots(m+n-1) = a_m$ показујемо индукцијом по m (најмањи од тих узастопних n бројева):
1° За $m = 0$ имамо да $n \mid a_0 = 0$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $m = k$: $n \mid k(k+1)\ldots(k+n-1) = a_k$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $m = k+1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)(k+n) = (k+1)(k+2)\ldots(k+n-1) \cdot k + (k+1)(k+2)\ldots(k+n-1) \cdot n \\ &= a_k + n \cdot (k+1)(k+2)\ldots(k+n-1), \end{aligned}$$

a_k је дељив са n по индукцијској претпоставци, а други сабирак има фактор n, па је и a_{k+1} дељиво са n. ✓
Стога је по принципу математичке индукције производ сваких n узастопних природних бројева дељив са n.

1.7. Означимо са $a_n = (n+1)(n+2)\ldots(2n)$.

I начин (Помоћу математичке индукције):
Доказујемо тврђење $2^n \mid a_n$ и $2^{n+1} \nmid a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ индукцијом.
1° За $n = 1$ имамо да $2^1 \mid a_1 = 2$ и $2^2 \nmid a_1 = 2$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$: $2^k \mid a_k$ и $2^{k+1} \nmid a_k$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$:

$$a_{k+1} = (k+2)(k+3)\ldots(2k)(2k+1)(2k+2) = 2 \cdot (2k+1) \cdot (k+1)(k+2)\ldots(2k) = 2 \cdot (2k+1) \cdot a_k$$

па добијамо да $2^{k+1} \mid a_{k+1}$ и $2^{k+2} \nmid a_{k+1}$. ✓
Стога је по принципу математичке индукције производ $a_n = (n+1)(n+2)\ldots(2n)$ дељив са 2^n, а није са 2^{n+1}.

II начин (Директно):

$$a_n = (n+1)(n+2)\ldots(2n) = \frac{(2n)!}{n!} = 2^n \cdot \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = 2^n \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} = 2^n \cdot \left(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\right).$$

1.8. I начин (Помоћу математичке индукције):
1° За $n = 2$ имамо да $2^{2^2} - 1 = 2^4 - 1 = 15$, па $15 \mid 2^{2^2} - 1$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$: $15 \mid 2^{2^k}$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$:

$$2^{2^{k+1}} - 1 = 2^{2^k \cdot 2} - 1 = \left(2^{2^k}\right)^2 - 1 = \left(2^{2^k} - 1\right)\left(2^{2^k} + 1\right)$$

па добијамо да $15 \mid 2^{2^{k+1}} - 1$ јер је први фактор дељив са 15 по индукцијској претпоставци. ✓
Стога је по принципу математичке индукције број $2^{2^n} - 1$ дељив са 15 за сваки природан број n.

II начин (Помоћу конгруенција):
$a_n = 2^{2^n} - 1 = 2^{2\cdot 2^{n-1}} - 1 = 4^{2^{n-1}} - 1 = 4^{2\cdot 2^{n-2}} - 1 = 16^{2^{n-2}} - 1$. Како је $16 \equiv 1 \pmod{15}$ и $n-2 \geq 2-2 = 0$ добијамо да је и $16^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{15}$, што даје $a_n \equiv 0 \pmod{15}$.

1.9. Означимо са $a_n = 3^{2^n} - 1$
1° За $n = 1$ имамо да $a_1 = 3^{2^1} - 1 = 3^2 - 1 = 8$, па $2^3 \mid a_1 = 8$ и $2^4 \nmid a_1 = 8$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$: $2^{k+2} \mid a_k$ и $2^{k+3} \nmid a_k$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$:

$$a_{k+1} = 3^{2^{k+1}} - 1 = 3^{2^k\cdot 2} - 1 = \left(3^{2^k}\right)^2 - 1 = \left(3^{2^k} - 1\right)\left(3^{2^k} + 1\right).$$

По индукцијској претпоставци први фактор је дељив са 2^{k+2}, а није са 2^{k+3}. Други фактор је, такође по индуктивној хипотези, једнак $\left(3^{2^k} + 1\right) = \left(3^{2^k} - 1\right) + 2 = 2^{k+2}\cdot N + 2$ (где је N непаран број), па добијамо да је он дељив са 2, а није са 4. То нам заједно $(2^{k+2}\cdot 2 = 2^{k+3})$ даје да $2^{k+3} \mid a_{k+1}$ и $2^{k+4} \nmid a_{k+1}$. ✓
Стога је по принципу математичке индукције број $3^{2^n} - 1$ дељив са 2^{n+2}, а није дељив са 2^{n+3}, за сваки природан број n.

1.10. I начин (Помоћу математичке индукције):
1° За $n = 1$ из скупа $\{1, 2\}$ бирамо 2 броја, тј. и $S = \{1, 2\}$, па имамо да $a = 1 \mid 2 = b$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$: у сваком подскупу $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2k\}$ са $k+1$ елемената постоје 2 елемента a и bтакви да $a \mid b$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$: из скупа $\{1, 2, \ldots, 2k, 2k+1, 2k+2\}$ бирамо $k+2$ броја у скуп S. Сада имамо 2 случаја: 1) ако бар један од бројева $2k+1$ и $2k+2$ није у S и 2) ако су оба броја $2k+1$ и $2k+2$ у S. У случају 1) имамо да је у S $k+1$ (или $k+2$ ако ниједан није изабран у S) број из скупа $\{1, 2, \ldots, 2k\}$, па по индуктивној хипотези имамо да постоје $a, b \in S$ такви да $a \mid b$. У случају 2) уколико је и број $k+1 \in S$ онда можемо узети $a = k+1$ и $b = 2k+2$, па $a \mid b$. Уколико $k+1 \notin S$ онда направимо скуп $S' = S \setminus \{2k+1, 2k+2\} \cup \{k+1\}$. Скуп S' има $k+1$ елемент, па по индукцијској хипотези у њему постоје 2 броја тако да $a' \mid b'$. Не може бити $a' = k+1$ јер би онда било $b' \geq 2(k+1)$, а такви бројеви нису у S'. Ако је $b' \neq k+1$ онда узимамо $a = a'$ и $b = b'$, а ако је $b' = k+1$ онда узимамо $a = a'$ и $b = 2k+2$. На тај начин смо добили два броја a и b из скупа S који има $k+2$ елемента тако да $a \mid b$. ✓
Стога је по принципу математичке индукције увек могуће изабрати из $S \subseteq \mathbb{N}_{2n}$ два различита броја, тако да један од њих дели другог.

II начин (Комбинаторни): Разбијмо скуп $\mathbb{N}_{2n}$ на следећих n подскупова:

$$\mathbb{N}_{2n} = \{1, 2, 4, \ldots\} \cup \{3, 6, \ldots\} \cup \{5, 10, \ldots\} \cup \ldots \cup \{2n-3\} \cup \{2n-1\}$$

(у сваком од тих подскупова прво иде непаран број N, па затим $2\cdot N$, па $4\cdot N$ и тако до највећег броја облика $2^m \cdot N$ који је мањи или једнак са $2n$). Како у скуп S бирамо $n+1$ елемент, по Дирихлеовом принципу (видети задатак 1.45) имаћемо да смо из бар једног од тих n скупова изабрали два елемента (или више од 2). Та два елемента ће бити облика $a = N\cdot 2^\alpha$ и $b = N\cdot 2^\beta$, где је N непаран број и $\alpha < \beta$, па добијамо да $a \mid b$.

1.11. 1° За $n = 2$ имамо да је n прост. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за све n, $2 \leq n \leq k$: да су сви ти бројеви или прости или производ простих бројева.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$. Имамо 2 случаја: 1) $n = k+1$ је прост и 2) $n = k+1$ је сложен. Уколико је $n = k+1$ прост тврђење задатка важи. Уколико је $n = k+1$ сложен он се може представити у облику $n = n_1 \cdot n_2$, где за бројеве n_1 и n_2 важи $1 < n_1, n_2 < n = k+1$. По индукцијској хипотези имамо да је сваки од бројева n_1 и n_2 или прост или производ простих бројева, па добијамо да је и $n = k+1 = n_1 \cdot n_2$ производ простих бројева. Тиме смо у оба случаја показали да тврђење важи и за $n = k+1$. ✓
Стога је по принципу математичке индукције сваки природан број већи или једнак 2 или прост или производ простих бројева.

1.12. 1° За $n = 1$ имамо да је $(1+\sqrt{2})^1 = 1 + 1\cdot\sqrt{2}$, тј. $a = b = 1$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$: $(1+\sqrt{2})^k = a_k + b_k\sqrt{2}$, где су $a_k, b_k \in \mathbb{N}$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$:

$$(1+\sqrt{2})^{k+1} = (1+\sqrt{2})^k \cdot (1+\sqrt{2}) = (a_k + b_k\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2}) = (a_k + 2b_k) + (a_k + b_k)\sqrt{2},$$

односно добијамо да је $a_{k+1} = a_k + 2b_k$ и $b_{k+1} = a_k + b_k$, па су и $a_{k+1}, b_{k+1} \in \mathbb{N}$. ✓
Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број n испуњено да је $(1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$, где

су $a, b \in \mathbb{N}$.
<u>Напомена:</u> Потпуно аналогно се показује и да је $(\sqrt{2}-1)^n = b\sqrt{2}-a$. Када помножимо ову и претходну једнакост добијамо

$$1 = \left(\sqrt{2}^2 - 1^2)\right)^n = \left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)^n = (\sqrt{2}+1)^n(\sqrt{2}-1)^n = (b\sqrt{2}+a)(b\sqrt{2}-a) = 2b^2 - a^2.$$

Због тога је $1+a^2 = 2b^2$, па је могуће претстављање као збир (разлика) корена два узастопна природна броја:

$$(\sqrt{2} \pm 1)^n = \sqrt{a^2} \pm \sqrt{a^2+1} = \sqrt{2b^2-1} \pm \sqrt{2b^2}.$$

1.13. 1° За $n=1$ имамо да је $2^1 = 2 \geqslant 1$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $2^k \geqslant k$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{(2^\circ)}{\geqslant} 2 \cdot k = k + k \underset{(k \geqslant 1)}{\geqslant} k+1. \checkmark$$

Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број n испуњено да је $2^n \geqslant n$.
<u>Напомена:</u> На исти начин смо могли да покажемо и строжију неједнакост $2^n > n$.

1.14. Прво ћемо направити таблицу вредности од 2^n и n^2 за разне вредности n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	...

Значи тврђење важи за $n=0$ и $n=1$, а можемо претпоставити да важи за све бројеве $n \geqslant 5$ – што ћемо показати математичком индукцијом.
1° За $n=5$ имамо да је $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k \geqslant 5$: $2^k > k^2$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{(2^\circ)}{>} 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 \underset{(k>3)}{>} k^2 + 3k \underset{(k>1)}{>} k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \checkmark$$

Стога по принципу математичке индукције за сваки природан број $n \geqslant 5$ важи $2^n > n^2$.

1.15. 1° За $n=2$ имамо да је $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a$ јер је $a \neq 0$ па је $a^2 > 0$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $(1+a)^k > 1+ka$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$:

$$(1+a)^{k+1} = (1+a) \cdot (1+a)^k \underset{(2^\circ)}{>} (1+a) \cdot (1+ka) = 1 + (k+1)a + ka^2 \underset{(k \geqslant 2, a^2 > 0)}{>} 1 + (k+1)a. \checkmark$$

Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број n испуњено да је $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

1.16. 1° За $n=2$ имамо да је $\sqrt{p^2} + \sqrt{q^2} = p+q = \sqrt{(p+q)^2}$ (овде нема апсолутних вредности јер су $p, q \in \mathbb{R}^+$), односно $\sqrt{p^2} + \sqrt{q^2} \leqslant \sqrt{(p+q)^2}$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\sqrt{p^k} + \sqrt{q^k} \leqslant \sqrt{(p+q)^k}$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$: Како је $\sqrt{p} < \sqrt{p+q}$ и $\sqrt{q} < \sqrt{p+q}$ имамо $\sqrt{p^{k+1}} + \sqrt{q^{k+1}} = \sqrt{p^k} \cdot \sqrt{p} + \sqrt{q^k} \cdot \sqrt{q} < \sqrt{p^k} \cdot \sqrt{p+q} + \sqrt{q^k} \cdot \sqrt{p+q} = (\sqrt{p^k} + \sqrt{q^k})\sqrt{p+q} \underset{(2^\circ)}{\leqslant} \sqrt{(p+q)^k} \cdot \sqrt{p+q} = \sqrt{(p+q)^{k+1}}$. ✓
Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број n испуњено да је $\sqrt{p^n} + \sqrt{q^n} = \sqrt{(p+q)^n}$.

1.17. 1° За $n=1$ имамо да је $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^1 = \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{x^1+y^1}{2}$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^k \leqslant \dfrac{x^k+y^k}{2}$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1} &= \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^k \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{x^k+y^k}{2} = \frac{x^{k+1}+y^{k+1}+xy^k+yx^k}{4} \\ &= \frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2} + \frac{xy^k+yx^k-x^{k+1}-y^{k+1}}{4} = \frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2} + \frac{(y-x)(x^k-y^k)}{4}\end{aligned}$$

Како је последњи члан увек непозитиван, тј. $(y-x)(x^k-y^k)\leqslant 0$ (за $x=y$ тај члан је једнак 0; за $x>y$ имамо $y-x<0$ и $x^k-y^k>0$; за $x<y$ имамо $y-x>0$ и $x^k-y^k<0$) добијамо да је

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1}\leqslant\frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}.\ \checkmark$$

Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број n испуњено да је $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\frac{x^n+y^n}{2}$.

1.18. а) 1° За $n=1$ имамо да је $\frac{1}{\sqrt{1}}=1=\sqrt{1}$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\sqrt{k}$.

3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$: Како је $\sqrt{k(k+1)}>\sqrt{k^2}=k$ имамо

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\underset{(2^\circ)}{\geqslant}\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1+\sqrt{k(k+1)}}{\sqrt{k+1}}>\frac{1+k}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}.\ \checkmark$$

Стога је по принципу математичке индукције $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n},\ n\in\mathbb{N}$.

б) Овај део се не може показати индукцијом. Неједнакост је тачна, чак се може и построжити: $\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)^2<(\ln 2)^2\approx 0.480453$, али то ћемо показивати преко развоја функције у ред (градиво IV разреда).

в) 1° За $n=1$ је $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}<\frac{1}{2}$.

3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\geqslant\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.\ \checkmark$$

Стога је по принципу математичке индукције $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}$.

г) Овај део се исто показује као и претходни само је различита база индукције.

1° За $n=2$ је $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}<\frac{13}{24}$.

3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+0=\frac{13}{24}.\ \checkmark$$

Стога је по принципу математичке индукције $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

д) Означимо са $f(n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

1° За $n=2$ имамо да је $f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k^2}>1$.

3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$:

$$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{k^2+1}+\frac{1}{k^2+2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k}>\underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2}}_{2k+1}-\frac{1}{k}=(2k+1)\cdot\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k}.$$

Односно добијамо $f(k+1)-f(k)=\dfrac{k^2-k-1}{k(k+1)^2}>0$, па је $f(k+1)>f(k)>1$. ✓

Стога је по принципу математичке индукције $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}>1$.

1.19. а) 1° За $n=4$ имамо да је $4!=24>16=2^4$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $k!>2^k$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$: $(k+1)!=k!\cdot(k+1)\underset{(2^\circ)}{>}2^k\cdot(k+1)\underset{(k\geqslant4)}{\geqslant}2^k\cdot2\geqslant2^{k+1}$. ✓

Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број $n\geqslant4$ испуњено да је $n!>2^n$.
б) 1° За $n=3$ имамо да је $3!=6<9=3^2$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $k!<k^{k-1}$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$: $(k+1)!=k!\cdot(k+1)\underset{(2^\circ)}{<}k^{k-1}\cdot(k+1)<(k+1)^{k-1}\cdot(k+1)=(k+1)^k$. ✓

Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број $n\geqslant3$ испуњено да је $n!<n^{n-1}$.

1.20. а) 1° За $n=1$ имамо $\dfrac12=\sqrt{\dfrac14}$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3k+1}}$.

3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$: $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k+2)}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3k+1}}\cdot\dfrac{2k+1}{2k+2}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3(k+1)+1}}$.
Прва неједнакост важи по индукцијској претпоставци, а друга јер кад квадрирамо имамо следећи низ еквиваленција:

$$\sqrt{\frac{1}{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\sqrt{\frac{1}{3(k+1)+1}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{3k+1}\cdot\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2\leqslant\frac{1}{3(k+1)+1}$$
$$\Leftrightarrow\quad\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{3k+1}\cdot\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2\geqslant0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{k}{(3k+4)(3k+1)(2k+2)^2}\geqslant0. ✓$$

Стога по принципу математичке индукције за сваки природан број n важи $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3n+1}}$.

б) 1° За $n=1$ имамо $\dfrac35=\sqrt{\dfrac{9}{25}}<\sqrt{\dfrac37}$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\dfrac{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4k-1)}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4k+1)}<\sqrt{\dfrac{3}{4k+3}}$.

3° За $n=k+1$ аналогно као у делу под а) добијамо: $\dfrac{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4k-1)(4k+3)}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4k+1)(4k+5)}<\sqrt{\dfrac{3}{4k+3}}\cdot\dfrac{4k+3}{4k+5}<\sqrt{\dfrac{3}{4k+7}}$,

а последња неједнакост је еквивалентна са $\sqrt{\dfrac{3}{4k+3}}\cdot\dfrac{4k+3}{4k+5}<\sqrt{\dfrac{3}{4k+7}}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{4}{(4k+5)^2(4k+7)}>0$.

По принципу математичке индукције за сваки природан број n важи $\dfrac{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot9\cdot13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}<\sqrt{\dfrac{3}{4n+3}}$.

1.21. I начин (Чистом математичком индукцијом):
1° За $n=1$ имамо $\dfrac12<1$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\frac12+\left(\frac12\right)^2+\ldots+\left(\frac12\right)^k<1$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$. Ако бисмо само додали нови члан не бисмо могли да искористимо индуктивну претпоставку, јер додавањем још једног члана нова сума би могла да пређе 1! Али тај израз можемо да групишемо на следећи начин:

$$\frac12+\left(\frac12\right)^2+\ldots+\left(\frac12\right)^n+\left(\frac12\right)^{n+1}=\frac12\left(1+\frac12+\left(\frac12\right)^2+\ldots+\left(\frac12\right)^n\right)<\frac12(1+1)=1. \qquad ✓$$

Стога по принципу математичке индукције за сваки природан број n важи $\frac12+\left(\frac12\right)^2+\ldots+\left(\frac12\right)^n<1$.
II начин (Помоћу идентитета који доказујемо математичком индукцијом):

Показаћемо да за суму првих n чланова геометријске прогресије (где је $q\neq1$) важи: $q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{q(1-q^n)}{1-q}$.

1° За $n=1$ имамо $q=\dfrac{q(1-q)}{1-q}$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$: $q + q^2 + \ldots + q^k = \dfrac{q(1-q^k)}{1-q}$.

3° За $n = k+1$ добијамо: $q + q^2 + \ldots + q^k + q^{k+1} = \dfrac{q(1-q^k)}{1-q} + q^{k+1} = \dfrac{q - q^{k+1} + q^{k+1} + q^{k+2}}{1-q} = \dfrac{q(1-q^{k+1})}{1-q}$. ✓

По принципу математичке индукције за сваки природан број n важи $q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{q(1-q^n)}{1-q}$.

У нашем задатку је $q = \dfrac{1}{2}$, па добијамо да је

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}^n\right) < 1.$$

1.22. Ово је потпуно исти задатак као 20. а)

1.23. Овде имамо два типа математичке индукције: са n на $2n$ и регресивну са n на $n-1$ (односно имамо два различита индуктивна корака).
1° За $n = 1$ имамо $\dfrac{a_1}{1} = a_1 = \sqrt[1]{a_1}$. ✓

За $n = 2$ имамо $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}\right)^2}{2} \geqslant 0$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$: $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n = 2k$:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{2k}}{2k} &= \frac{\dfrac{a_1 + \ldots + a_k}{k} + \dfrac{a_{k+1} + \ldots + a_{2k}}{k}}{2} \underset{(2^\circ)}{\geqslant} \frac{\sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2k}}}{2} \\ &\underset{(1^\circ)}{\geqslant} \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot \ldots \cdot a_{2k}}. \qquad ✓\end{aligned}$$

3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k-1$: Како су $a_1, \ldots, a_n$ произвољни позитивни реални бројеви можемо узети да је

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots\ ,\ a_{k-1} = b_{k-1},\ a_k = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}}{k-1}.$$

Тада је $a_1 + a_2 + \ldots + a_k k = \dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}}{k-1} = a_k$. Када то заменимо у неједнакост из ундуктивне хипотезе добијамо $a_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$, односно, ако све подигнемо на k-ти степен, ${a_k}^k \geqslant a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$, тј. ${a_k}^{k-1} \geqslant a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} = b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_{k-1}$. Сада извучемо $(k-1)$-ви корен и добијемо $a_k = \dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_{k-1}}$. ✓
По принципу математичке индукције за сваки природан број n и произвољне реалне позитивне бројеве $a_1, \ldots, a_n$ важи $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{2k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$.

2.1. $a_n = 2^n$. **2.2.** $a_n = 2^n + 1$.

2.3. $a_n = 2^n + 1$.

2.4. $d_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 4^n$.

2.5. $a_n = 3^n - 2^n + 5$.

2.6. $a_n = 2^n$.

2.7. $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\ \left.\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \ \left.\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ — видети страну 9.

2.8. $x_n = 2^n$.

2.9. $a_n = 2^n + 1$.

2.10. $a_n = n^2$.

2.11. За $x \neq y$ је $d_n = \dfrac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$, а за $x = y$ је $d_n = (n+1)x^n$.

2.12. $d_n = (n+1)5^n$.

2.13. $a_n = 2^n + \dfrac{1}{2}n2^n$.

2.14. $x_n = (1+n)2^n$.

2.15. $a_n = n^2 + n + 1$.

2.16. $a_n = \dfrac{8 + 3n + (-2)^n}{9}$.

2.17. $x_{6k} = 1,\ x_{6k+1} = 3,\ x_{6k+2} = 2,\ x_{6k+3} = -1,\ x_{6k+4} = -3,\ x_{6k+5} = -2$.

2.18. $x_n = 2 \cdot \cos \dfrac{n\pi}{3}$.

2.19. За $b^2 < 4a^2$ се добија $d_n = a^n \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, где је θ такво да важи $b = 2a\cos\theta$. За $b = \pm 2a$ се добија $d_n = (n+1)\left(\dfrac{b}{2}\right)^n$.

2.20. $x_n = \dfrac{2b+a}{3} + \dfrac{4}{3}(b-a)(\dfrac{1}{2})^n$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{2b+a}{3}$.

2.21. Математичком индукцијом прво покажемо да је $x_n > 0$. Затим логаритмујемо са основом 2 и уведемо $y_n = \log_2 x_n$. Тада се добија диференцна једначина $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n$ са почетним условима $y_0 = 0$ и $y_1 = 1$ – што је задатак 1.37. Стога је $y_n = 2^n - 1$, па је $x_n = 2^{2^n - 1}$.

2.22. Из друге једначине добијамо $x_n = y_{n+1} - y_n$ и кад то уврстимо у прву једначину добијамо линеарну рекурентну једначину $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$ са почетним условима $y_1 = x_0 + y_0 = 6$ и $y_0 = 1$ чијим решавањем добијамо решења полазног система $y_n = 2^n(2n+1)$ и $x_n = 2^n(2n+5)$.

2.23. Сменом $x_n = \dfrac{y_n}{z_n},\ z_0 = 1\ y_0 = x_0$ полазна једначина се своди на систем $y_{n+1} = ay_n + bz_n,\ z_{n+1} = cy_n + dz_n$.

2.24. Сменом $x_n = \dfrac{y_{n+1}}{y_n} - 3$ добијамо $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$. Коначно решење је $x_n = -\dfrac{3n}{1+2n}$.