Dodatna nastava za učenike Matematičke gimnazije: I razred, 1. dodatna

Osnovne ideje u geometriji

Nikola Petrović

Zadaci na dodatnoj

1. Osnovna tvrdjenja: Dat je trougao ABC. Neka su H, S, O, T respektivno ortocentar, centar upisanog kruga, centar opisanog kruga i težište trougla. Neka su A', B', C' respektivno središta stranica BC, AC, AB. Neka su A_1, B_1, C_1 respektivno središta lukova $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$ opisane kružnice.

   (a) Dokazati: $AH = 2OA'$.

   (b) (Ojlerova prava) Dokazati da su H, T i O kolinearni i da je $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$.

   (c) (Ojlerov krug, krug devet tačaka) Dokazati da se A',B', C', podnožja visina trougla ABC i središta duži AH, BH, CH nalaze na jednom krugu.

   (d) Dokazati da su tačke A, S, A_1 kolinearne. Dokazati: $A_1B = A_1C = A_1S$.

   (e) Neka AS seče BC u A_2. Dokazati: $\dfrac{AB}{BA_2} = \dfrac{AC}{CA_2}$.

   (f) Neka je R poluprečnik opisanog kruga i r upisanog. Dokazati: $R + r = OA' + OB' + OC'$.

   (g) (Simsonova prava) Neka je P tačka na opisanom krugu i neka su K, L, M podnožja normala iz P na AB, BC, AC. Dokazati da su K, L, M kolinearne.

   (h) (Toričelijeva tačka) Neka su spolja konstruisani jednakostranični trouglovi ABF, ACE, BCD. Dokazati da se AD, BE i CF seku u jednoj tački.

   (i) (Erdoš-Mordelova nejednakost) Neka je X proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla ABC. Neka su x_a, x_b i x_c rastojanja tačke X od BC, AC i AB. Dokazati:

   $$XA + XB + XC \geq 2(x_a + x_b + x_c) \ .$$

2. Neka su H i O respektivno ortocentar i centar opisane kružnice trougla ABC. Dokazati: $AH = AO \Rightarrow A = 60^o$.

3. Dat je trougao ABC. Neka su A_1, B_1, C_1 središta lukova BC, AC i AB opisanog kruga oko trougla ABC. Dokazati:

   $$S(ABC) \leq S(ABC_1) + S(AB_1C) + S(A_1BC) \ .$$

   (S(XYZ) označava površinu trougla XYZ.)

4. Dat je trougao ABC gde je $\measuredangle A = 100^o$ i $\measuredangle B = \measuredangle C = 40^o$. Neka je data tačka M na polupravi AB (koja počinje u A) tako da je $AM = BC$. Naći $\measuredangle ACM$.

5. Dat je jednakostraničan trougao $\triangle ABC$. Date su tačke P, Q, R u unutrašnjosti trougla ABC tako da je $\measuredangle PBA = \measuredangle QAB = 15^o$, $\measuredangle PCA = \measuredangle RAC = 20^o$ i $\measuredangle RBC = \measuredangle QCB = 25^o$. Naći uglove trougla PQR.

6. (IMO99-5) Dve kružnice Γ_1 i Γ_2 se nalaze unutar kružnice Γ i dodiruju Γ u različitim tačkama M i N (respektivno). Kružnica Γ_1 prolazi kroz centar kružnice Γ_2. Prava koja sadrži dve tačke preseka kružnica Γ_1 i Γ_2 seče Γ u A i B. MA i MB seku F_1 u C i D. Dokazati da je CD tangenta kružnice Γ_2.

7. Dat je trougao $\triangle ABC$ gde je $AB < AC$. Krug sa centrom O dodiruje AB u B i AC u D. Normala iz O na BC seče BD u E. Prava AE seče BC u F. Dokazati: $BF = FC$.

8. Dat je konveksan petougao $ABCDE$ kod koga je $DC = DE$ i $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Neka je F unutrašnja tačka segmenta AB odredjena uslovom $AF : BF = AE : BC$. Dokazati da je $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ i $\sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC$.

9. Neka je ABC jednakostraničan trougao i neka su B_1, B_2,..., B_n (medjusobno različite) tačke na duži AC takve da je $AB_1 = B_1B_2 = \cdots = B_{n-1}B_n = B_nC$. Neka je D tačka na duži BC takva da je $BD = \frac{BC}{n+1}$. Naći $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle BB_iD$.

10. (IMO96-2) Neka je P tačka unutar trougla ABC takva da je $\measuredangle APB - \measuredangle ACB = \measuredangle APC - \measuredangle ABC$. Neka su D i E respektivno centri upisanih krugova trouglova APB i APC. Dokazati da se AP,BD i CE seku u jednoj tački.

Zadaci za vežbu

1. Dokazati da je zbir rastojanja unutrašnje tačke P od stranica jednakostraničnog trougla fiksan.

2. Dokazati da težište deli težišnu duž u odnosu $AT = TA' = 2 : 1$.

3. Koristeći Ptolomejevu teoremu ($AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ važi za svaki tetivan četvorougao $ABCD$) dokazati da u oštrouglom trouglu ABC važi da je tačka P za koju $AP + BP + CP$ dostiže minimalnu vrednost upravo Toričelijeva tačka trougla ABC.

4. Dat je tetivan četvorougao $ABCD$ i neka su E, F, G, H, I, J respektivno središta duži AB, BC, CD, DA, AC, BD. Dokazati da se EG, FH, IJ seku u jednoj tački. Zatim dokazati da se normale iz E na CD, F na DA, G na AB, H na BC, I na BD, J na AC seku u jednoj tački.

   Pomoć. Koristiti ideju u dokazu postojanja Ojlerove prave.

5. Neka upisani krug dodiruje duž BC u D, i neka pripisani krug dodiruje duž BC u E. Dokazati: $DE = \mid AB - AC \mid$.

6. Neka su D i E respektivno preseci simetrala uglova $\measuredangle BAC$ i $\measuredangle ABC$ sa BC i AC. Neka je P tačka na duži DE. Dokazati da je zbir rastojanja tačke P od AC i BC jednak rastojanju tačke P od AB.

7. Pravougaonici ABB_1A_1, BCC_1B_2 i CAA_2C_2 su konstruisani u spoljašnjost datog trougla ABC. Dokazati da se A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 seku u jednoj tački.

8. Neka k_1 iznutra dodiruje k_2 u C. Neka je AB prečnik od k_1 koji dodiruje k_1 u D. Naći $\measuredangle DCA$.

9. Dat je pravougli trouga ABC. Neka je D podnožje visine iz A na hiptenuzu BC. Neka su S_1 i S_2 respektivno centri upisanih krugova trougla ABD i ACD. Neka su K i L respektivno preseci prave S_1S_2 sa AB i AC. Dokazati da je $AK = AL = AD$.

10. Dat je oštrougli trougao ABC. Neka su spolja (u odnosu na trougao) konstruisani kvadrati $BAZU$ i $CAYV$. Neka je konstruisan kvadrat $BXCW$, pri čemu je X sa iste strane prave BC kao i tačka A. Dokazati da je trougao XYZ jednakokrak i pravougli.

11. Neka van trougla ABC konstruisani jednakostranični trouglovi ABF, ACE, BCD. Dokazati da centri ta tri trougla obrazuju temena jednakostraničnog trougla.

12. Neka je $\rho(XYZ)$ oznaka za poluprečnik upisanog kruga trougla XYZ. Na stranicama trougla ABC, gde je $\rho(ABC) = r$, date su tačke $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$, takve da je $\rho(AEF) = \rho(DBF) = \rho(DEC) = r_1$. Dokazati da je $\rho(DEF) = r - r_1$.

13. Neka je $ABCD$ trapez kod koga je $AB \parallel CD$ i P tačka na produžetku dijagonale AC tako da je C izmedju A i P. Ako su X i Y središta osnovica AB i CD, a M i N presečne tačke pravih PX i PY sa dužima BC i DA, redom, dokazati da je prava MN paralelna osnovicama trapeza.

14. (IMO96-5) Neka je $ABCDEF$ šestougao sa paralelnim naspramnim stranicama ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$). Neka su R_A, R_C i R_E poluprečnici opisanih krugova FAB, BCD i DEF, respektivno. Neka je P obim šestougla. Generalizacijom dokaza Erdoš-Mordelove nejednakosti dokazati:
$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}\ .$$