НЕЈЕДНАКОСТИ

Припреме за Савезно такмичење, Будва 2005.

Владимир Балтић

1. Нека су $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Доказати неједнакост: $a^2cd + b^2da + c^2ab + d^2bc \geqslant 4abcd$.

2. Доказати неједнакост: $\dfrac{b^2+8}{\sqrt{b^2+3}} > 2$.

3. Ако је $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$ онда је $xy + yz + zx \geqslant 2xyz$.

4. Ако су x, y, z позитивни реални бројеви за које је $x + y + z = 1$ онда је $xy + yz + zx \geqslant 9xyz$.

5. Нека је $A = \dfrac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \sqrt[4]{bc}\right)^2 + bc + 3}{\sqrt{bc}+3}$ и нека су $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Доказати да је $A \leqslant 1 + \dfrac{b+c}{2}$.

6. Нека су x, y и z ненегативни бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је: $xy + yz + 2zx \leqslant \dfrac{1}{2}$.

7. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$.

8. Доказати неједнакост за свако $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$: $(n+1)^n < n^{(n+1)}$.

9. Доказати неједнакости:
а) $n! > 2^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4$;
б) $n! < n^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$.

10. Доказати неједнакости:
а) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{3n+1}},\ n \in \mathbb{N}$;
б) $\dfrac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (4n+1)} < \sqrt{\dfrac{3}{4n+3}},\ n \in \mathbb{N}$.

11. Доказати неједнакост $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} < 1$.

12. Ако су a_1, a_2, a_3 позитивни реални бројеви који задовољавају услов $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ доказати да важи:
$\dfrac{{a_1}^2}{a_1+a_3} + \dfrac{{a_2}^2}{a_2+a_1} + \dfrac{{a_3}^2}{a_3+a_2} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

13. Нека бројеви $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ задовољавају $a^2 \leqslant b^2 + c^2$, $b^2 \leqslant c^2 + a^2$ и $c^2 \leqslant a^2 + b^2$. Доказати неједнакост: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \geqslant 4(a^6+b^6+c^6)$.

14. Доказати неједнакост $0.785 \cdot n^2 - n < \sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2} < 0.79 \cdot n^2$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

15. Доказати да у правоуглом троуглу важи $a + b < c + h$, где су a и b катете и h висина која одговара хипотенузи c.

16. Доказати неједнакост $({t_a}^2 + {t_b}^2 + {t_c}^2) \cdot ({h_a}^2 + {h_b}^2 + {h_c}^2) \geqslant 27P^2$, где су t_a, t_b, t_c дужине тежишних линија, а h_a, h_b, h_c дужине висина троугла. $\left({t_a}^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}\right)$

17. Нека су t_a, t_b и t_c дужине тежишних дужи из темена A, B и C, респективно. Доказати да је тада $t_at_b + t_bt_c + t_ct_a < \frac{5}{4}(ab + bc + ca)$.

18. Дат је оштроугли троугао $\triangle ABC$ са полупречником уписане кружнице r. Нека је H ортоцентар и A', B' и C' редом подножја висина h_a, h_b и h_c из A, B и C. Означимо са $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Нека су d_a, d_b и d_c растојања ортоцентра од страница BC, CA и AB. Ако важи $a \geqslant b \geqslant c$ показати следеће неједнакости:
а) $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$; **б)** $d_a \geqslant d_b \geqslant d_c$; **в)** $AH \leqslant BH \leqslant CH$; **г)** $d_a + d_b + d_c \leqslant 3r$.

Решења

1. Применимо неједнакост аритметичке и геометријске средине: $\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$ и добијамо тражену неједнакост.
Једнакост важи када су сви елементи међусобно једнаки, тј. за $a^2cd = b^2da = c^2ab = d^2bc$ $(*)$. Како су сви бројеви позитивни након скраћивања добијамо $ac = b^2 = d^2$, па како су позитивни смемо да коренујемо и добијамо $b = d$, што кад уврстимо у $(*)$ даје $a = b = c = d$.

2. Користимо познату неједнакост да за $x > 0$ важи $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ (при чему једнакост важи за $x = 1$).
$\dfrac{b^2+8}{\sqrt{b^2+3}} = \dfrac{b^2+3+5}{\sqrt{b^2+3}} = \sqrt{b^2+3} + \dfrac{5}{\sqrt{b^2+3}} > \sqrt{b^2+3} + \dfrac{1}{\sqrt{b^2+3}} \geqslant 2.$

3. Решење 1: За сваки од бројева $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$ важи $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$, при чему једнакости важе када је $x = 0$ или $x = 1$. Сада имамо $x(y+z) \geqslant x(y^2+z^2) \geqslant 2xyz$ и $yz = 1 \cdot yz \geqslant xyz$, што кад саберемо добијамо $xy+yz+zx \leqslant 3xyz \leqslant 2xyz$ (последња неједнакост важи јер је $xyz \geqslant 0$.
Једнакост важи када важе једнакости у свим неједнакостима, тј. када су бар 2 од x, y, z једнака 0.

Решење 2: Слично као у прошлом решењу имамо $yz \geqslant xyz$ и аналогно $xy \leqslant xyz$ и $zx \leqslant xyz$, што кад саберемо добијамо $xy + yz + zx \leqslant 3xyz \leqslant 2xyz$.
Једнакост важи када важе једнакости у свим неједнакостима, тј. због прве 3 добијамо да су сви x, y, z једнаки 0 или 1, али како због последње мора бити $xyz = 0$ добијамо да бар један од x, y, z мора бити једнак 0. Али сада када се вратимо на почетне нејднакости добијамо да бар још један од x, y, z мора бити 0.

4. Коришћењем неједнакости аритметичке и геометријске средине добијамо: $xy + yz + zx = (xy + yz + zx) \cdot 1 = (xy + yz + zx) \cdot (x + y + z) = x^2y + yz^2 + z^2x + xy^2 + y^2z + zx^2 + 3xyz \geqslant 2xyz + 2xyz + 2xyz + 3xyz = 9xyz$.

5. Приметимо да је $\dfrac{\sqrt[4]{bc^3} + \sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \sqrt[4]{bc}$, одакле је $A = \dfrac{(2\sqrt[4]{bc})^2 + bc + 3}{\sqrt{bc} + 3} = \dfrac{bc + 4\sqrt{bc} + 3}{\sqrt{bc} + 3} = \dfrac{(\sqrt{bc} + 3)(\sqrt{bc} + 1)}{\sqrt{bc} + 3} = \sqrt{bc} + 1$. Сада применимо неједнакост аритметичке и геометријске средине и добијамо $A \leqslant \dfrac{b+c}{2} + 1$, што је и требало показати.
Једнакост важи за $b = c$ и произвољно a.

6. Решење 1: *(Николић Владимир)* Ако полазну неједнакост помножимо са 2 добијамо $2xy + 2yz + 4zx \leqslant 1 = (x + y + z)^2$ што је еквивалентно са $2zx \leqslant x^2 + y^2 + z^2$, односно са $(x - z)^2 + y^2 \geqslant 0$, што је увек тачно.
Једнакост важи кад је $x = z$ и $y = 0$, а из услова $x + y + z = 1$ добијамо да је $x = y = \frac{1}{2}$.

Решење 2: Имамо $xy+yz+2zx = y(x+z)+2zx = (1-x-z)(x+z)+2zx = x+z-x^2-z^2 = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$.
Овде смо користили да је $t^2 \geqslant 0$.
Једнакост важи кад је $x = z = \frac{1}{2}$, а тад је $y = 0$.

Решење 3: Квадрирањем услова $x + y + z = 1$, добијамо да је
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 1.$$
Одавде следи да је
$$2(xy + yz + 2zx) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2 - 2zx) = 1 - (x - z)^2 - y^2 \leqslant 1.$$
Једнакост важи када је $x = z$ и $y = 0$, односно за $x = z = \frac{1}{2}$ и $y = 0$.

Решење 4: Изразимо z преко x и y: $z = 1 - x - y$ и заменимо то у полазној неједнакости. Тада добијамо $y^2 + (2x-1)y + (2x^2 - 2x + \frac{1}{2}) \geqslant 0$, сто је квадратна неједначина по y. Како је њена дискриминанта $D = -(2x-1)^2 \leqslant 0$ добијамо да је $y^2 + (2x - 1)y + (2x^2 - 2x + \frac{1}{2}) \geqslant 0$ увек испуњено.
Једнакост важи када је $D = 0$, што је за $x = \frac{1}{2}$ и тада је $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = 0$, а из полазног услова добијамо $z = \frac{1}{2}$.
Напомена: Услов да су бројеви ненегативни је вишак!

7. Показаћемо да важи
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \frac{a + b + c + d}{4} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}.$$
неједнакост квадратне и аритметичке средине, док ћемо за десну страну користити неколико пута неједнакост аритметичке и геометријске средине: $(a + b + c + d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 3(a^2b + b^2d + d^2a) +$

$3(b^2c+c^2d+d^2b)+3(ac^2+cd^2+da^2)+6(abc+abd+acd+bcd)$. Из $a^3+b^3+c^3+d^3=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}+\dfrac{a^3+b^3+d^3}{3}+\dfrac{a^3+c^3+d^3}{3}+\dfrac{b^3+c^3+d^3}{3}\geqslant abc+abd+acd+bcd$, $a^2b+b^2c+c^2a\geqslant 3abc$ и аналогно $a^2b+b^2d+d^2a\geqslant 3abd$, $b^2c+c^2d+d^2b\geqslant 3bcd$ и $ac^2+cd^2+da^2\geqslant 3acd$ добијамо $(a+b+c+d)^3\geqslant 16(abc+abd+acd+bcd)$. Стога је $\dfrac{(a+b+c+d)^3}{64}\geqslant\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}$, тј. $\dfrac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$, чиме смо показали тражену неједнакост $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geqslant\sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$.
Једнакост важи када је $a=b=c=d$.
Напомена: Ова средина је већа од геометријске, јер је $\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}\geqslant\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}$.

8. Решење 1: 1° База математичке индукције: за $n=3$ имамо $4^3=64<81=3^4$. ✓
2° Индукцијска претпоставка: Претпоставимо да је неједнакост тачна за $n=k>3$, тј. да је $(k+1)^k<k^{k+1}$.
3° Индукцијски корак: $(k+2)^{k+1}<\dfrac{(k+1)^k(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k}\underset{(2^\circ)}{<}\dfrac{k^{k+1}(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k}=\dfrac{(k^2+2k)^{k+1}}{(k+1)^k}<\dfrac{(k^2+2k+1)^{k+1}}{(k+1)^k}=(k+1)^{k+2}$. ✓
По принципу математичке индукције тврђење $(n+1)^n<n^{(n+1)}$ важи за свако $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.

Решење 2: *(Мутавџић Никола* или *Суџум Владислав)* Неједнакост ћемо показати директно помоћу биномног обрасца: $(n+1)^n=n^n\cdot 1^0+n\cdot n^{n-1}\cdot 1^1+\binom{n}{2}\cdot n^{n-2}\cdot 1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot n^1\cdot 1^{n-1}+n^0\cdot 1^n=n^n+n^n+\binom{n}{2}\cdot n^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot n^1+1\underset{(*)}{<}n\cdot n^n=n^{n+1}$, где смо у $(*)$ искористили да је $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)}{k!}<\dfrac{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}{k!}=\dfrac{n^k}{k!}<n^k$, па је $\binom{n}{k}\cdot n^{n-k}<n^k\cdot n^{n-k}=n^n$ за $3\leqslant k\leqslant n-1$ и још $\binom{n}{2}\cdot n^{n-2}+1=\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot n^{n-2}+1=\dfrac{n^n-n^{n-1}+2}{2}<\dfrac{n^n}{2}<n^n$ (како је $n\geqslant 3$ у биномном развоју ће се јављати и ова два члана).

9. а) 1° За $n=4$ имамо да је $4!=24>16=2^4$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $k!>2^k$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$: $(k+1)!=k!\cdot(k+1)\underset{(2^\circ)}{>}2^k\cdot(k+1)\underset{(k\geqslant 4)}{\geqslant}2^k\cdot 2\geqslant 2^{k+1}$. ✓
Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број $n\geqslant 4$ испуњено да је $n!>2^n$.
б) 1° За $n=3$ имамо да је $3!=6<9=3^2$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $k!<k^{k-1}$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$: $(k+1)!=k!\cdot(k+1)\underset{(2^\circ)}{<}k^{k-1}\cdot(k+1)<(k+1)^{k-1}\cdot(k+1)=(k+1)^k$. ✓
Стога је по принципу математичке индукције за сваки природан број $n\geqslant 3$ испуњено да је $n!<n^{n-1}$.

10. а) 1° За $n=1$ имамо $\dfrac{1}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3k+1}}$.
3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$: $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k+2)}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3k+1}}\cdot\dfrac{2k+1}{2k+2}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3(k+1)+1}}$.
Прва неједнакост важи по индукцијској претпоставци, а друга јер кад квадрирамо имамо следећи низ еквиваленција:

$$\sqrt{\frac{1}{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\sqrt{\frac{1}{3(k+1)+1}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{3k+1}\cdot\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2\leqslant\frac{1}{3(k+1)+1}$$
$$\Leftrightarrow\quad\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{3k+1}\cdot\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2\geqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{k}{(3k+4)(3k+1)(2k+2)^2}\geqslant 0.✓$$

Стога по принципу математичке индукције за сваки природан број n важи $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{3n+1}}$.
б) 1° За $n=1$ имамо $\dfrac{3}{5}=\sqrt{\dfrac{9}{25}}<\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. ✓
2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4k-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4k+1)}<\sqrt{\dfrac{3}{4k+3}}$.

3° За $n=k+1$ аналогно као под а) добијамо: $\dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4k-1)(4k+3)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4k+1)(4k+5)}<\sqrt{\dfrac{3}{4k+3}}\cdot\dfrac{4k+3}{4k+5}<\sqrt{\dfrac{3}{4k+7}}$, а последња неједнакост је еквивалентна са $\sqrt{\dfrac{3}{4k+3}}\cdot\dfrac{4k+3}{4k+5}<\sqrt{\dfrac{3}{4k+7}} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{4}{(4k+5)^2(4k+7)}>0.$

По принципу математичке индукције за сваки природан број n важи $\dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}<\sqrt{\dfrac{3}{4n+3}}$.

11. Решење 1 (Чистом математичком индукцијом):

1° За $n=1$ имамо $\dfrac{1}{2}<1$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^k<1$.

3° Покажимо да тврђење важи и за $n=k+1$. Ако бисмо само додали нови члан не бисмо могли да искористимо индуктивну претпоставку, јер додавањем још једног члана нова сума би могла да пређе 1! Али тај израз можемо да групишемо на следећи начин:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)<\frac{1}{2}(1+1)=1. \qquad \checkmark$$

Стога по принципу математичке индукције за сваки природан број n важи $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$.

Решење 2 (Помоћу идентитета који доказујемо математичком индукцијом):

Показаћемо да за суму првих n чланова геометријске прогресије (где је $q\neq 1$) важи: $q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{q(1-q^n)}{1-q}$.

1° За $n=1$ имамо $q=\dfrac{q(1-q)}{1-q}$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$: $q+q^2+\ldots+q^k=\dfrac{q(1-q^k)}{1-q}$.

3° За $n=k+1$ добијамо: $q+q^2+\ldots+q^k+q^{k+1}=\dfrac{q(1-q^k)}{1-q}+q^{k+1}=\dfrac{q-q^{k+1}+q^{k+1}+q^{k+2}}{1-q}=\dfrac{q(1-q^{k+1})}{1-q}$. ✓

По принципу математичке индукције за сваки природан број n важи $q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{q(1-q^n)}{1-q}$.

У нашем задатку је $q=\dfrac{1}{2}$, па добијамо да је

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}^n\right)<1.$$

12. Решење 1: Како је $\dfrac{{a_1}^2+a_1a_3}{a_1+a_3}+\dfrac{{a_2}^2+a_2a_1}{a_2+a_1}+\dfrac{{a_3}^2+a_3a_2}{a_3+a_2}=a_1+a_2+a_3=1$ и како из неједнакости аритметичке и геометријске средине имамо $\dfrac{a_1a_3}{a_1+a_3}+\dfrac{a_2a_1}{a_2+a_1}+\dfrac{a_3a_2}{a_3+a_2}\leqslant\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{(a_1+a_3)^2}{a_1+a_3}+\dfrac{(a_2+a_1)^2}{a_2+a_1}+\dfrac{(a_3+a_2)^2}{a_3+a_2}\right)=\dfrac{1}{2}$, добијамо тражену неједнакост.

Једнакости важи само ако је $a_1=a_2=a_3=\dfrac{1}{3}$.

Решење 2: Како је $\dfrac{{a_1}^2-{a_3}^2}{a_1+a_3}+\dfrac{{a_2}^2-{a_1}^2}{a_2+a_1}+\dfrac{{a_3}^2-{a_2}^2}{a_3+a_2}=a_1-a_3+a_2-a_1+a_3-a_2=0$ добијамо $2\left(\dfrac{{a_1}^2}{a_1+a_3}+\dfrac{{a_2}^2}{a_2+a_1}+\dfrac{{a_3}^2}{a_3+a_2}\right)=\dfrac{{a_1}^2+{a_3}^2}{a_1+a_3}+\dfrac{{a_2}^2+{a_1}^2}{a_2+a_1}+\dfrac{{a_3}^2+{a_2}^2}{a_3+a_2}$ из неједнакости квадратне и аритметичке средине добијамо да је $2\left(\dfrac{{a_1}^2}{a_1+a_3}+\dfrac{{a_2}^2}{a_2+a_1}+\dfrac{{a_3}^2}{a_3+a_2}\right)\leqslant\dfrac{a_1+a_3}{2}+\dfrac{a_2+a_1}{2}+\dfrac{a_3+a_2}{2}=1$, одакле следи тражена једнакост.

Једнакости важи само ако је $a_1=a_2=a_3=\dfrac{1}{3}$.

13. Решење 1: Неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског даје $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)=\left((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right)\cdot\left((a^{3/2})^2+(b^{3/2})^2+(c^{3/2})^2\right)\geqslant\left(\sqrt{a}\cdot a^{3/2}+\sqrt{b}\cdot b^{3/2}+\sqrt{c}\cdot c^{3/2}\right)^2\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$. Сада имамо да је $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^3=a^6+b^6+c^6+3\left[a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)\right]+6a^2b^2c^2\geqslant a^6+b^6+$

$c^6+3[a^6+b^6+c^6]+6a^2b^2c^2 \geqslant 4(a^6+b^6+c^6)$. У изразима у средњим заградамо смо користили услове задатка: $a^2 \leqslant b^2+c^2$, $b^2 \leqslant c^2+a^2$ и $c^2 \leqslant a^2+b^2$.
Једнакост не важи никада јер су $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, па је $6a^2b^2c^2 > 0$.

Решење 2: *(Лацковић Душан)* Како су $a,b,c > 0$ важи $a^2 \leqslant b^2+c^2 < b^2+2bc+c^2 = (b+c)^2$, тј. $a < b+c$. Аналогно се показује и $b < c+a$ и $c < a+b$. Ако измножимо леву страну и погодно групишемо чланове добијамо: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) = a^6+b^6+c^6+a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)+a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)+a^3(b+c)(b^2+c^2)+b^3(c+a)(c^2+a^2)+c^3(a+b)(a^2+b^2) > a^6+b^6+c^6+a^4\cdot a^2+b^4\cdot b^2+c^4\cdot c^2+a^5\cdot a+b^5\cdot b+c^5\cdot c+a^3\cdot a\cdot a^2+b^3\cdot b\cdot b^2+c^3\cdot c\cdot c^2 = 4(a^6+b^6+c^6)$.
Једнакост не важи никада.
Напомена: Услови $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, $a^2 \leqslant b^2+c^2$, $b^2 \leqslant c^2+a^2$ и $c^2 \leqslant a^2+b^2$ значе да су a, b и c дужине страница оштроуглог троугла или правоуглог троугла (ако негде важи једнакост).

14. Дарбуове суме за четврт круга јер је $0.785 < \pi < 0.79$.

15. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2a\cdot b = c^2+2c\cdot h < c^2+2c\cdot h+h^2 = (c+h)^2$.

16. $({t_a}^2+{t_b}^2+{t_c}^2)\cdot({h_a}^2+{h_b}^2+{h_c}^2) = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\cdot({h_a}^2+{h_b}^2+{h_c}^2)$, а по неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског имамо $({t_a}^2+{t_b}^2+{t_c}^2)\cdot({h_a}^2+{h_b}^2+{h_c}^2) \geqslant \frac{3}{4}(3\cdot 2P)^2 = 27P^2$.
Једнакост важи када су a^2,b^2,c^2 и ${h_a}^2,{h_b}^2,{h_c}^2$ пропорцијални, што је само у случају једнакостраничног троугла.

17. Лема. Ако су a, b и c странице у троуглу, тада важи $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+ac+bc)$.
Доказ леме: Из неједнакости троугла имамо да је $b+c > a$, $c+a > b$ и $a+b > c$, одакле је $a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c) > 0$, тј. $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+ac+bc)$.
Начин 1: Ако сваку тежишну дуж t_a продужимо 2 пута из одговарајућих паралелограма добијамо $2t_a < b+c$, односно $t_a < \frac{b+c}{2}$. Аналогно се добијају $t_b < \frac{c+a}{2}$ и $t_c < \frac{a+b}{2}$. Ако измножимо ове 3 неједнакости добијамо да је $t_at_b+t_bt_c+t_ct_a < \frac{ab+ac+bc+c^2}{4}+\frac{ab+ac+bc+b^2}{4}+\frac{ab+ac+bc+a^2}{4} = \frac{3}{4}(ab+bc+ca)+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) < \frac{5}{4}(ab+bc+ca)$ (на основу Леме).
Начин 2: Користићемо да је ${t_a}^2 = \frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$, ${t_b}^2 = \frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$ и ${t_c}^2 = \frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$. Као и у начину 1 добијамо да је $t_a < \frac{b+c}{2}$, $t_b < \frac{c+a}{2}$ и $t_c < \frac{a+b}{2}$. Ако саберемо ове 3 неједнакости добијамо да је $t_a+t_b+t_c < a+b+c$. Сада квадрирамо ову неједнакост и добијамо $\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}+2(t_at_b+t_at_c+t_bt_c) < a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, тј. $t_at_b+t_at_c+t_bt_c < ab+ac+bc+\frac{a^2+b^2+c^2}{8} < \frac{5}{4}(ab+ac+bc)$ (на основу Леме).

18. а) Како је $P = \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}b\cdot h_b = \frac{1}{2}c\cdot h_c$ имамо да је $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$, одакле је $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$. Једнакости важе уколико важе и у полазној неједнакости $a \geqslant b \geqslant c$.

в) Коришћењем Питагорине теореме добијамо да је $BC'^2 = BC^2-CC'^2 = a^2-{h_c}^2 \geqslant b^2-{h_c}^2 = AC^2-CC'^2 = AC'^2$, а одавде добијамо $AH^2 = AC'^2+C'H^2 \leqslant BC'^2+C'H^2 = BH^2$. Аналогно се показује и $BH \leqslant CH$. Једнакости важе уколико важе и у полазној неједнакости $a \geqslant b \geqslant c$.

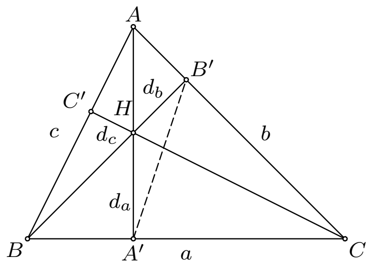
б) $\sphericalangle A'HC = 90^\circ - \sphericalangle HCA' = \sphericalangle CBC' = \beta$. Због тетивности четвороугла $A'CB'H$ добијамо да је и $\sphericalangle A'B'C = \beta$. Аналогним расуђивањем добијамо и $B'A'C = \alpha$, па је имамо сличне троуглове $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$ одакле због $a \geqslant b$ добијамо да је $B'C \geqslant A'C$. Сада из Питагориних теорема примењених на троуглове $\triangle A'HC$ и $\triangle B'HC$ добијамо неједнакост ${d_a}^2 = A'H^2 = HC^2-A'C^2 \geqslant HC^2-B'C^2 = B'H^2 = {d_b}^2$, одакле следи тражена неједнакост $d_a \geqslant d_b$. Аналогно се показује и $d_b \geqslant d_c$. Једнакости важе уколико важе и у полазној неједнакости $a \geqslant b \geqslant c$.

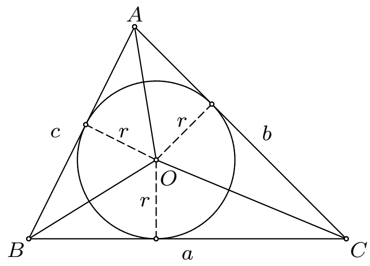
в) Тражене неједнакости се добијају простим одузимањем неједнакости добијених под а) и под б).

г) Како двоструку површину троугла можемо изразити и као $2P = (a+b+c)\cdot r$ и као $2P = a\cdot d_a+b\cdot d_b+c\cdot d_c$ и како због $a \geqslant b \geqslant c$ и $d_a \geqslant d_b \geqslant d_c$ важи Чебишовљева неједнакост $a\cdot d_a+b\cdot d_b+c\cdot d_c \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)$ имамо да је

$$(a+b+c)\cdot r = 2P = a\cdot d_a+b\cdot d_b+c\cdot d_c \geqslant \tfrac{1}{3}(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)$$

одакле је $3r \geqslant d_a+d_b+d_c$. Једнакост у Чебишовљевој неједнакости важи акко је $a=b=c$ или $d_a=d_b=d_c$, што је само у случају једнакостраничног троугла.





<u>Напомена:</u> Део задатка под а) и б) се још лакше показује уз помоћ тригонометрије!