Додатна за четврти разред
9.11.2004.г.

Полиноми

Милан Новаковић

1. Ако за полином $P(x)$ са позитивним реалним коефицијентима важи $P(\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{P(x)}$ за $x = 1$, доказати да онда важи и за свако $x > 0$.

2. Нека за полином $P(x)$ степена n важи $P(k) = 2^k$ за $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, Одредити $P(n+1)$.

3. Ако је $P(x)$ полином степена n за који важи $P(k) = \frac{k}{k+1}$ за $k = 0, 1, \ldots, n$ наћи $P(m)$, где је $m > n$.

4. Нека F_n означава n-ти Фибоначијев број ($F_1 = F_2 = 1$) и нека за полином $P(x)$ степена 1001 важи $P(k) = F_k$ за $k = 1003, 1004, \ldots, 2004$. Доказати да је $P(2005) = F_{2005} - 1$.

5. Нека је p прост број и нека је $f(x)$ полином степена d такав да је:

   (а) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1$;

   (б) за сваки позитиван број n је $f(n)$ је конгруентно са 0 или 1 по модулу p.

   Доказати да је $d \geq p - 1$.

6. Нека је полином $f(x)$ са целобројним коефицијентима и водећим коефицијентом a степена $n > 1$. Доказати да ако $f(x)$ има n реалних корена (који нису сви једнаки) у интервалу $(0, 1)$, онда важи $|a| \geq 2^n + 1$.

7. Полином $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ са ненегативним реалним коефицијентима има n реалних нула. Доказати:

   (а) $f(x) \geq (x + 1)^n$ за $x \geq 0$;

   (б) $a_k \geq \binom{n}{k}$.

8. Ако за низ $a_0, a_1, \ldots$ за неко p важи $S_i = S_j$ за све $0 \geq i, j < p$ где је $S_i = \sum_{k=0} a_{kp+i}$, за њега кажемо да је *p-балансиран*. Нека је низ $a_0, a_1, \ldots, a_{49}$ p-балансиран за $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, доказати да је $a_0 = a_1 = \cdots = a_{49} = 0$.

9. Ако је α реалан број тако да су $\cos\frac{\alpha}{\pi}$ и $cos\alpha$ рационални, доказати да онда важи $\cos\alpha \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$.

10. Нека је за $n \geq 2$ тачке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у $[-1, 1]$. Нека је t_k производ растојања од тачке x_k до осталих тачака. Доказати да је онда $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k} \geq 2^{n-2}$.

11. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Претпоставимо да бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имају следећу особину: За сваки цео број x постоји i тако да $a_i | P(x)$. Доказати да онда постоји i_0 тако да a_{i_0} дели $P(x)$ за свако x.

12. Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима тако да је $P(x) \geq 0$ за свако x. Доказати да постоје постоје реални $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ такви да је $P(x) = Q_1^2(x) + Q_2^2(x)$. Да ли слично тврђење важи за $P(x, y)$?

13. Да ли постоји бесконачан низ $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ ненула реалних бројева такав да за свако n полином $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ има тачно n различитих реалних корена?

14. Доказати да за прост $p > 2$ важи

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \quad (mod\ p).$$

Такође доказати

$$\binom{2p^n}{p^n} \equiv \binom{2p^{n-1}}{p^{n-1}} \quad (mod\ p^{3n})$$

15. За природан број n и реалан c, дефинишимо низ x_k са $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и за $k \geq 0$

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1}.$$

Фиксирајмо n и узмимо за c највећу могућу вредност тако да важи $x_{n+1} = 0$. Наћи x_k.

16. Нека је $f(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Дефинишимо низ $a_0, a_1, \ldots$ са $a_0 = 0$ и $a_{n+1} = f(a_n)$ за $n \geq 0$. Доказати да ако за неко m важи $a_m = 0$, онда је $a_1 a_2 = 0$.

17. Доказати да $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ има корен модула 1 акко $6|n+2$.

18. Нека је $0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 1$ и λ комплексан корен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ такав да је $|\lambda| \geq 1$. Доказати да је $\lambda^{n+1} = 1$.

19. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различити реални бројеви и нека је

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Нека је

$$Q(x) = P(x)\left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}\right).$$

Ако су $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ корени полинома $Q(x)$ доказати да је

$$\min_{i \neq j} |x_i - x_j| < \min_{i \neq j} |y_i - y_j|$$

20. Нека су дати полиноми са комплексним коефицијентима $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ и $Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$ чији су корени редом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$. Ако су $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ и $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ реаллни бројеви доказати да је онда реалан и $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$.

21. Нека за комплексан полином $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ за неко m важи

$$\left|\frac{a_m}{a_n}\right| > \binom{n}{m}.$$

Доказати да P има нулу модула мањег од 1.

22. Доказати да ако полином $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ са реалним коефицијентима има све реалне корене, онда је $(n-1)a_1^2 \geq 2na_0 a_2$. Да ли важи обрнуто?

23. Решити $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-2}x^2 - 2nx + 1 = 0$, ако су сви корени реални.

24. Нека је $p(x)$ моничан полином степена n са реалним коефицијентима. Доказати да постоје $q(x)$ и $r(x)$, оба монична степена n са реалним коефицијентима и свим реалним коренима такви да је $2p(x) = q(x) + r(x)$.

25. Полином степена $3n$ има вредност 2 у тачкама $0, 3, 6, \ldots, 3n$, вредност 1 у тачкама $1, 4, 7, \ldots, 3n - 2$ и 0 у $2, 5, 8, \ldots, 3n - 1$. Његова вредност за $3n + 1$ је 730. Наћи бар једно могуће n.

26. Нека је X најмањи скуп полинома $p(x)$ такав да:

(а) $p(x) = x$ припада X;

(б) ако $r(x)$ припада X, тада припадају и $xr(x)$ и $x + (1-x)r(x)$.

Доказати да ако су $r(x)$ и $s(x)$ различити елементи скупа X, онда је $r(x) \neq s(x)$ за све $x \in (0, 1)$.

27. Нека за поллином $p(x)$ са реалним коефицијентима важи $|p(i)| < 1$. Доказати да постоји $z = u + iv$ такав да је $p(z) = 0$ и $(u^2 + v^2 + 1)^2 < 4v^2 + 1$.

28. Полином $q(z)$ са комплексним коефицијентима степена 2004 има све различите нуле. Доказати да можемо да изаберемо низ z_i комплексних бројева такав да ако је $p_1(z) = z - z_1$ и $p_n(z) = p_{n-1}(z)^2 - z_n$, онда $q(z)$ дели $p_{2004}(x)$.

29. Нека је $a_0, a_1, a_2, \ldots$ бесконачан низ целих бројева такав да је $a_n - a_m$ дељиво са $n - m$ за $n > m$. Ако постоји неки полином $p(x)$ такав да је $p(n) > |a_n|$ за свако n, доказати да онда постоји и полином $q(x)$ такав да је $q(n) = a_n$ за свако n.

30. Нека је $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ полином са целобројним коефицијентима. Ако је $xp(x) = yp(y)$ за бесконачно много парова x, y $(x \neq y)$, доказати да онда $p(x)$ има целобројан корен.

31. Нека су P и Q полиноми чији су коефицијенти из скупа $\{1, 2004\}$. Доказати да ако P дели Q онда и $\deg P + 1$ дели $\deg Q + 1$.

32. Нека је $P \in \mathbb{Z}[X]$ моничан иредуцибилан полином такав да $P(0)$ није потпун квадрат. Доказати да је $P(x^2)$ такође иредуцибилан у $\mathbb{Z}[X]$.

33. Наћи све природне бројеве a, b, m, n такве да $m > n > 0$ и да $f(x) = x^n + ax + b$ дели $g(x) = x^m + ax + b$.

34. Доказати да полином $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{m-1}x^{n-m+1} - b_mx^{n-m} - \cdots - b_n$ где су $a_i, b_j > 0$ има тачно један корен већи од 1.

35. Ако је $2m$ узастопних коефицијената реалног полинома степена n једнако 0, онда он има највише $n - 2m$ реалних корена.

36. Ако су корени узајамно простих полинома $f(x)$ и $g(x)$ реални и међусобно се раздвајају, онда су реални и сви корени полинома $\lambda f(x) + \mu g(x)$ за $\lambda, \mu > 0$.