ПОЛИНОМИ И РАЦИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

Настава у Математичкој гимназији, 2004.

Владимир Балтић

1 Појам полинома. Прстен полинома.

1. Дати су полиноми $P(x) = x^3 + x + 1, Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1, R(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Проверити да ли за свако $a \in \mathbb{R}$ важи:
а) $P(a) + P(-a) = 2$; **б)** $P(1 + a) + P(1 - a) = 6 + 6a^2$; **в)** $Q(a) - Q(-a) = 0$;
г) $Q(1 + a) - Q(1 - a) = 8a^3$; **д)** $R(a) - R(-a) = 2a^3$; **ђ)** $R(1 + a) + R(1 - a) = -2$.
2. За полином $P(x) = x^3 - x$ одредити полином $Q(x) = P(x - 1) + P(x) + P(x + 1)$.
3. Одредити збир $P(x) + Q(x)$, разлику $P(x) - Q(x)$, производ $P(x) \cdot Q(x)$ и линеарну комбинацију $aP(x) + bQ(x)$ полинома $P(x)$ и $Q(x)$ ако је дато:
a) $P(x) = 3x^2 - x + 1$, $Q(x) = x - 2$, $a = 3$, $b = 2$
b) $P(x) = x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = x^2 + x - 1$, $a = 2$, $b = -3$
v) $P(x) = 2x^6 - 3x^2$, $Q(x) = 3x^5 + 4x - 3$, $a = 1$, $b = -2$
g) $P(x) = -x^3 + x^2 - 2x$, $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $a = -3$, $b = -2$.
4. Одредити збир коефицијената полинома $P(x)$: **а)** $P(x) = (x^2 - x + 1)^{1998} \cdot (x^2 - x + 2)^{10}$,
б) $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^{1999} + (x^2 - 6x + 3)^{1999}$, **в)** $P(x) = (2x^2 - 5x + 2)^{450} \cdot (2x^2 - 5x + 4)^{540}$,
г) $P(x) = (x^2 + 3x + 2)^{100} \cdot (x^2 - 3x + 2)^{100}$.
5. Доказати да не постоји полином P са целобројним коефицијентима за који је испуњено $P(2) = 1$ и $P(5) = 6$.
6. Доказати да не постоји полином P са целобројним коефицијентима такав да је $P(11) - P(7)$ прост број.
7. Нека је P полином са целобројним коефицијентима. Доказати да је за свако $a \in \mathbb{Z}$ и свако $b \in \mathbb{N}$ израз $P(a + \sqrt{b}) + P(a - \sqrt{b})$ цео број.
8. Нека су дати полиноми $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{99} + x^{100}$ и $Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} + x^{100}$ и нека је $P(x) \cdot Q(x) = (c_0, c_1, \ldots, c_{200})$. Доказати да у призводу $P(x) \cdot Q(x)$ нема чланова са непарним експонентом, тј. да су сви $c_{2k-1} = 0, (k = 1, 2, \ldots, 100)$.
9†. У којем од полинома $P(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}$ и $Q(x) = (1 - x^2 + x^3)^{1000}$ је коефицијент уз x^{20} већи?
10. Доказати идентитете: **а)** $a^2\dfrac{(x-b)(x-v)}{(a-b)(a-v)} + b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$;
б) $\dfrac{(x-a)(x-b)(x-v)}{(d-a)(d-b)(d-v)} + \dfrac{(x-b)(x-c)(x-g)}{(a-b)(a-c)(a-g)} + \dfrac{(x-a)(x-c)(x-g)}{(b-a)(b-c)(b-g)} + \dfrac{(x-a)(x-b)(x-g)}{(c-a)(c-b)(c-g)} = 1.$
11. Одредити полином другог степена $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ такав да је: **а)** $P(1) = 6, P(2) = 11$, $P(-1) = 8$; **б)** $P(1) = 4, P(0) = 3, P(2) = 9$; **в)** $P(1) = 2, P(-2) = 8, P(0) = -2$.
12. Доказати: ако полином P, n–тог степена узима вредност нула за $n + 1$ различитих вредности $x \in \mathbb{C}$, тада је P нула–полином.
13. Доказати: ако су P и Q полиноми n–тог степена и постоје комплексни, међусобно различити бројеви $x_0, x_1, \ldots, x_n$ такви да важи $P(x_i) = Q(x_i)$ (за $i = 0, 1, \ldots, n$), тада је $P = Q$.
14. **а)** Полином $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ развијте по потенцијама од $x - 1$.
б) Полином $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ развијте по потенцијама од $x - 2$.
в) Полином $P(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$ развијте по потенцијама од $x + 1$.
15. Одредити полином $P(x)$ ако је **а)** $P(x + 3) = x^2 + 2x + 2$; **б)** $P(-2x + 1) = 2x^2 - x + 3$; **в)** $P(x - 2) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$.
16. Полином $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ је кварат неког полинома $Q(x)$, тј. важи $P(x) = Q(x)^2$. Одредити a, b и полином $Q(x)$.
17. P је полином четвртог степена такав да је $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$. Доказати да је тада $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ парна функција, тј да важи $P(x) = P(-x)(\forall x \in \mathbb{R})$.
18. Одредити полином P четвртог степена за који је $P(x) = P(-x)$.
19. Дат је полином $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Доказати да не постоји полином Q такав да важи $P(x) = (Q \circ Q)(x)$, где је са $\circ$ означена композиција функција.
20. За линеарни полином (тј. полином облика $P(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{K}$) $P(x) = 2x + 3$ одредити све линеарне полиноме Q за које важи $= (P \circ Q)(x) = (Q \circ P)(x)$. За такве полиноме кажемо да *комутирају*.
21. Доказати да не постоји полином P првог степена који комутира са полиномом $Q(x) = x^2 - 2$.
22†. **а)** Одредити полиноме P и Q за које важи: $P(x) \cdot Q(x) = (P \circ Q)(x)(\forall x)$;
б) Одредити полином P за који важи: $P(x) \cdot P(x) = (P \circ P)(x)(\forall x)$.
23. Одредити збир коефицијената полинома $P(x) = (x^5 + x - 1)^{1999}$ уз чланове са непарним изложиоцима (степенима).
24. Доказати да не постоји полином P са целобројним коефицијентима такав да је $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$, где су a, b, c три различита цела броја.

2 Дељивост полинома. Хорнерова шема. Еуклидов алгоритам. Безуов став.

1. Одредити количник и остатак при дељењу полинома $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$ полиномом $x - 2$.
2. Одредити количник и остатак при дељењу полинома $P(x) = 2x^5 + x^4 + x^3 + 2x + 2$ полиномом $T(x) = 2x^2 + 1$, ако су то полиноми над пољем $GF(3)$.
3. Одредити $a, b \in \mathbb{R}$ тако да је остатак при дељењу полинома $P(x) = x^4 - 3x^2 - ax + b$ полиномом $x + 1$ једнак 3, а полиномом $x - 2$ једнак -3.
4. Остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $x - 2$ је 2, а полиномом $x - 3$ је $P(x)$ дељив. Колики је остатак при дељењу $P(x)$ са $T(x) = x^2 - 5x + 6$?
5. Ако полином при дељењу полиномом $x - a$ даје остатак r_a, а при дељењу полиномом $x - b$ даје остатак r_b, колики је остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $T(x) = (x - a)(x - b)$?
6. Да ли је полином $P(x) = (x^2 + x - 1)^n + (x^2 - x + 1)^n - 2$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - x$?
7. За које n је полином $P(x) = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - 3x + 2$?
8. Одредити $a, b \in \mathbb{R}$ тако да полином $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ буде дељив полиномом $Q(x) = x^2 - x - 2$.
9. Наћи остатак при дељењу полинома $P(x) = x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9$ полиномом $Q(x) = x^2 + 2x - 3$.
10. Остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x) = x^2 + x - 2$ је $R(x) = x + 1$. Одредити остатак при дељењу $P(x)$ са $x + 2$.
11. Полином $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ дељив је са $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, а при дељењу са $T(x)$ даје остатак -24. Одредити коефицијенте a, b и c.
12. Колики је остатак при дељењу полинома $P(x) = 2^{100}x^{100} + 2^{99}x^{99} + \ldots + 2x + 1$ полиномом **а)** $Q(x) = x + 1$; **б)** $Q(x) = 2x - 1$; **в)** $Q(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$?
13. Полином $P(x)$ при дељењу полиномом $x + 1$ даје остатак 4, а при дељењу полиномом $x^2 + 1$ остатак $R(x) = 2x + 3$. Колики је остатак при дељењу $P(x)$ полиномом $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$?
14. Одредити остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x) = x^4 + x^2 + 1$ ако $P(x)$ при дељењу полиномом $T_1(x) = x^2 + x + 1$ даје остатак $R_1(x) = -x + 1$, а при дељењу полиномом $T_2(x) = x^2 - x + 1$ даје остатак $R_2(x) = 3x + 5$.
15. Да ли је полином $P(x) = x^{4n-2} - x^{4n-4} + x^{4n-6} - \ldots + x^2 - 1$ дељив полином $Q(x) = x^4 - 1$?
16. Ако је полином $P(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + \ldots a_{n-1}x^2 + a_n$ дељив са $x - 1$, онда је дељив и са $x^2 - 1$. Доказати.
17. Збир свих коефицијената полинома $P(x)$ једнак је 2, а збир коефицијената на парним местима једнак је 1. Одредити остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x) = x^2 - 1$.
18. Ако полиноми P_1 иP_2 нису дељиви полиномом Q, могу ли њихов збир $P_1 + P_2$, производ P_1P_2 и композиција $P_1 \circ P_2$ бити дељиви са Q? Ако је могуће дати и пример, а ако није доказати да не може.
19. Доказати: ако полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима за $x = 1, 2, 3, 4$ узима исту вредност p, где је p прост број, онда ни за који цео број a не може бити $P(a) = 2p$.
20. Одредити $a, b \in \mathbb{R}$ тако да полином $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ буде дељив полиномом $Q(x) = x^2 - x + b$.
21. Доказати да полином $P(x) = x^6 + x^3 + a$ није дељив $Q(x) = x^3 + x + a$ ни за једно $a \in \mathbb{R}$.
22. Коришћењем Хорнерове шеме превести у декадни систем следеће бројеве:
а) $(11010001)_2$; **б)** $(21102)_3$; **в)** $(32131)_5$.
23. Применом Хорнерове шеме развити полином $P(x)$ по потенцијама (степенима) од $x - a$ ако је дато: **а)** $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1, a = 1$; **б)** $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5, a = -2$;
в) $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 8x - 4, a = 3$.
24. Ако су полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ такви да је $\deg P = n > 1, \deg Q = m > 1$, онда постоје полиноми $S(x)$ (степена највише $n - 1$) и $T(x)$ (степена највише $m - 1$), такви да важи: $P(x)S(x) + Q(x)T(x) = 0$ ако и само ако P и Q нису узајамно прости (тј. НЗД$(P, Q) \neq 1$).
25. Одредити полиноме S и T, тако да важи $PS + QT = \mathrm{NZD}(P, Q)$: **а)** $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, Q(x) = x^2 - x + 1$;
б) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3, Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$;
в) $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 4, Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4$.
26. За $P(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1, Q(x) = x^n - nx + n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$ одредити НЗД(P, Q).
27. Доказати да су полиноми $P(x) = nx^{n-1} + (n - 1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1$ и $Q(x) = x^{n-2} + 2x^{n-3} + \ldots + (n - 2)x + (n - 1)$ узајамно прости за свако $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
28. Да ли је полином $P(x) = nx^{n+1} - (1 + np)x^n + (p - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x) = p$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - (p + 1)x + p$, где је n природан, а p реалан број? Посебно испитати случај када је $p = 1$.
29. Доказати да је полином $P_{2n+1}(x) = (x + a + b)^{2n+1} - x^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$ дељив полиномом $P_3(x)$. Затим решити једначину $P_5(x) = 0$.

3 Нуле полинома. Целобројне, рационалне и комплексне нуле. Виетова правила. Иредуцибилни полиноми.

1. Одредити вишеструкост нуле x полинома $P(x)$: **а)** $x = 3 \quad P(x) = 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 4x - 3$;
б) $x = -2 \quad P(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 8x$; **в)** $x = -\frac{1}{2} \quad P(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$.
2. Одредити полином четвртог степена коме су корени -1 и 2, а -2 је двоструки корен.
3. Одредити моничан полином четвртог степена $P(x)$ ако је познато да је $x = -2$ трострука нула полинома $P(x)$, а при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x) = x + 3$ добија се остатак -1.
4. Одредити заједничке нуле полинома: **а)** $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $\quad Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$;
б) $P(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 12$, $\quad Q(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$.
5. Број $x = a$ је нула реда k полинома P и уједно нула реда $l > k$ полинома Q. Одредити вишеструкости нуле $x = a$ полинома $P \cdot Q$ и $P + Q$.
6. Дат је полином $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$. Нека је α корен једначине $x^2 - x - 3 = 0$. Израчунати $P(\alpha)$.
7. Бројеви $x = 1$ и $x = 2$ су нуле полинома P, коме је слободан члан једнак 4. Наћи остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.
8. Које услове је потребно да испуњавају природан број n и реалан број a, да би полином $P(x) = x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ био дељив полиномом $Q(x) = (x-1)^2$?
9. Одредити a и b тако да један корен полинома $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$ буде 3, а остала два корена да буду узастопни цели бројеви.
10. Одредити a и b тако да је један корен полинома $P(x) = x^3 + ax^2 + 4x + b$ једнак 2, а и разлика преостала два корена је једнака 2.
11. Одредити a и b тако да су корени полинома $P(x) = x^3 + ax^2 + 26x + b$ три узастопна цела броја.
12. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.
13. Да би међу коренима полинома $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ била два супротна броја, потребан и довољан услов је $ab = c$. Доказати.
14. Доказати да алгебарска једначина $f(x) = 0$ n-тог степена са целобројним коефицијентима нема целобројних решења ако су бројеви $f(0)$ и $f(1)$ непарни.
15. Доказати да алгебарска једначина $f(x) = 0$ n-тог степена са целобројним коефицијентима нема целобројних решења ако ниједан од бројева $f(1), f(2), f(3)$ није дељив са 3.
16. Полином P n-тог степена са целобројним коефицијентима за $x = 0, 1, \ldots, n-1$ узима вредности различите од нуле и по апсолутној вредности мање од n. Доказати да P нема целобројних нула.
17. Нека је $P \in \mathbb{Z}[x]$ и нека су a и b узајамно прости цели бројеви. Ако је $P(a)$ дељив са b и $P(b)$ дељив са a, доказати да је тада $P(a+b)$ дељив са ab.
18. Ако је број α нула полинома са целобројним коефицијентима, онда је за све природне m и број $\sqrt[m]{\alpha}$ такође нула неког полинома са целобројним коефицијентима.
19. Ако је $x_1 \neq 0$ корен једначине облика $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, онда је и $\frac{1}{x_1}$ корен исте једначине. Доказати.
20. Одредити a, b и c тако да један корен полинома $P(x) = 6x^3 + ax^2 + bx + c$ буде $\frac{1}{3}$, а остала два корена да буду супротни рационални бројеви.
21. Доказати да полином са целобројним коефицијентима $P(x) = px^5 - (p-1)x^2 + 1$, где је p прост број, нема рационалних корена.
22. Одредити све просте бројеве p за које једначина $px^3 + x + 2 = 0$ има бар један рационалан корен.
23. Одредити рационалне нуле полинома $P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$.
24. Раставити на чиниоце полином $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$.
25. Ако моничан полином P са целобројним коефицијентима нема целобројних нула, тада су све реалне нуле тог полинома ирационални бројеви.
26. Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 2$ и прост број p важи да је $\sqrt[n]{p}$ ирационалан број.
27. Доказати да ако је p прост број онда полином $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + p$ нема рационалних корена.
28. Нека је P полином са целобројним коефицијентима и нека за три различита цела броја a, b и c важи $P(a) = P(b) = P(c) = 1$. Доказати да P нема целобројних корена.
29. Дат је реални полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Нека су његове нуле $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Одредити нуле полинома: **а)** $Q_1(x) = \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}x^n + \dfrac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + \dfrac{P"(a)}{2!}x^2 + P'(a)x + P(a)$;
б) $Q_2(x) = a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0$; **в)** $Q_3(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$;
г) $Q_4(x) = a_n x^n + a_{n-1}bx^{n-1} + a_{n-2}b^2x^{n-2} + \ldots + a_1 b^{n-1}x + a_0 b^n$, где су a и b дати реални бројеви.
30. Ако полином P са целобројним коефицијентима узима вредност 2 за три различите целобројне вредности, онда P ни за један цео број не узима вредност 3. Доказати.
31. Доказати да се полином $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$, где су $a_1, \ldots, a_n$ различити цели бројеви, не може приказати у облику производа два полинома степена > 1 са целобројним коефицијентима.
32. Доказати да се полином $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1$, где су $a_1, \ldots, a_n$ различити цели бројеви, не може приказати у облику производа два полинома степена > 1 са целобројним коефицијентима.

33. Доказати да се полином $P(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1$, где су $a_1,\dots,a_n$ различити цели бројеви, не може приказати у облику производа два полинома степена >1 са целобројним коефицијентима.
34†. Одредити све полиноме P за које важи: $\quad x\cdot P(x-1) = (x-3)\cdot P(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}$.
35†. Одредити све полиноме P за које важи: $\quad (x-1)\cdot P(x) = (x-3)\cdot P(x-1), \forall x\in\mathbb{R}$.
36‡. Одредити све полиноме P за које важи: $\quad P(x)\cdot P(x+1) = P(x^2+x+1), \forall x\in\mathbb{R}$.
37†. Нека је $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+1$ реалан полином са ненегативним коефицијентима, који има n реалних корена. Доказати да је $P(2)\geqslant 3^n$.
38†. Низ полинома $P_0(x), P_1(x),\dots$ задат је са $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_{k+2}(x) = 2x\cdot P_{k+1}(x) - P_k(x)(k=0,1,\dots)$. Доказати да се све реалне нуле полинома $P_k(x)$ налазе у интервалу $(-1,1)$.
39. Одредити све полиноме n-тог степена са целобројним коефицијентима са особином да у n целобројних тачака имају вредност n, а у 0 вредност 0.
40. Полином P је седмог степена и у седам различитих целобројних тачака узима вредност 1 или -1. Доказати да се полином P не може приказати као производ два полинома степена >1 са целобројним коефицијентима.
41. Наћи реалне нуле полинома $P(x) = x^4+1$.
42. Одредити реалне факторе полинома $P(x) = x^{2n}+1, \quad n\in\mathbb{N}$.
43. Факторисати полином $P(x) = x^4-x^3+2x^2+11x+7$.
44. Једначина $x^5-2x^3+2x^2-4$ има комплексан корен чији је аргумент $\frac{\pi}{4}$. Одредити тај корен.
45. Наћи све реалне бројеве p и q такве да полиноми $P(x) = x^3+px^2+18$ и $Q(x) = x^3+qx+12$ имају два заједничка корена. Одредити те корене.
46. Све су нуле полинома $P(x) = x^3+px+q, q\neq 0$ реалне. Доказати да је коефицијент п негативан.
47. Наћи полином трећег степена са водећим коефицијентом 2 такав да његове нуле задовољавају једнакости $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} = 2, \frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3} = 4, \frac{1}{x_1x_2x_3} = 8$.
48. Нека су x_1,x_2,x_3 и x_4 корени једначине $x^4+5x^3+ax^2+3x+5=0$. Одредити $a\in\mathbb{R}$ тако да буде $x_1\cdot x_2 = 1$.
49. Одредити a и b тако да $P(x) = x^4+ax^3+bx^2-8x+4$ има две двоструке нуле.
50. Одредити a тако да $P(x) = x^4-x^3+ax^2+6x-4$ има два корена чији је производ једнак 2.
51. Решити једначину $x^4+x^3+2x^2+2x+4=0$ ако се зна да она има један комплексан корен чији је реалан део једнак имагинарном делу.
52. Корени полинома $Q(x) = x^3+x^2-2$ су комплексни бројеви a и b и реалан број c. Одредити полином другог степена P за који је $P(c)=c, P(a)=b, P(b)=a$ и доказати да је полином $P(P(x))-x$ дељив полиномом $Q(x)$.
53. Доказати да је полином $P(x) = (x+1)^{6m+1}-(x+1)^{6n+2}+(x+1)^{6p+3} \quad (m,n,p\in\mathbb{N}_0)$ дељив полиномом $Q(x) = x^2+x+1$.
54. Нека су P,q и r природни бројеви. Под којим условом је полином $P(x) = x^{3p}+ax^{3q+1}+x^{3r+2}$ дељив полиномом $Q(x) = x^2+ax+1$ ако је **а)** $a=1$; **б)** $a=-1$?
55. Одредити довољан услов под којим је полином $P(x) = x^n+\dots+x+1$ дељив полиномом $Q(x) = x^m+\dots+x+1$.
56. Дат је полином $P(x) = 4x^5-24x^4+53x^3-61x^2+ax+b$, где је $a,b\in\mathbb{R}$. Наћи све нуле полинома P ако се зна да је $1+i$ једна нула и да постоји бар једна рационална нула.
57. Ако једначина $x^3+ax+b=0$ има рационалне корене p,q и r, доказати да једначина $py^2+qy+r=0$ такође има рационалне корене.
58. Одредити вишеструке нуле полинома $P(x) = x^3+x^2-x-1$.
59. Одредити вредност реалног параметра m тако да збир два корена полинома $P(x) = x^4-6x^3+mx^2-12x+16$ буде једнак збиру друга два корена.
60. Колико постоји полинома са комплексним коефицијентима $P(x) = x^3+ax^2+bx+c$ чије су нуле a,b и c?
61. Познато је да су нуле комплексног полинома $P(z) = z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ комплексни бројеви $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$. Израчунати производ $\prod = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1)$.
62. Доказати да ни за једно $n\in\mathbb{N}$ полином $P_n(x) = x^{(2n)^2}-x^{(2n-1)^2}-x^{(2n-2)^2}-\dots+x^4-x+1$ нема реалних нула.
63†. Нека су a и b корени полинома $P(x) = x^4+x^3-1$. Доказати да је ab корен полинома $Q(x) = x^6+x^4+x^3-x^2-1$.
64. Реални полином $P(x) = ax^n-ax^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\dots+c_2x^2-n^2bx+b$ има n позитивних корена. Доказати да су сви ти корени једнаки.
65. Доказати да је полином $P(x) = x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6$ иредуцибилан над пољем $\mathbb{Z}$.
66. Раставити на факторе над пољем $\mathbb{Q}$ полином P: **а)** $P(x) = x^4-3x^3+2x^2+3x-9$; **б)** $P(x) = x^4-3x^3+2x^2+2x-6$; **в)** $P(x) = x^4+4x^3-6x^2-23x-12$; **г)** $P(x) = x^5+4x^4+x^3-2x^2+x+1$.
67. Доказати да су полиноми $P(x) = x^n-2$ иредуцибилни над $\mathbb{Q}$ за све природне $n\geqslant 1$.
68. Доказати да је полином $P(x) = 1+x+x^2+\dots+x^{p-1}$ иредуцибилан над $\mathbb{Q}$ за сваки прост број p.
69. Наћи најмања три природна броја n за које је полином $P(x) = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$ редуцибилан над $\mathbb{Q}$.
70. Доказати да је полином $P(x) = x^4+px^2+q, \quad p,q\in\mathbb{Q}$ редуцибилан над $\mathbb{Q}$ ако је испуњен један од ова два услова: 1^o p^2-4q је квадрат рационалног броја, 2^o q је квадрат рационалног броја r, $2r-p$ је квадрат рационалног броја.
71. Показати да су полиноми иредуцибилни над $\mathbb{Q}$: **а)** $P(x) = x^4-8x^3+12x^2-6x+2$; **б)** $P(x) = x^5-12x^3+36x-12$; **в)** $P(x) = x^4-x^3+2x+1$; **г)** $P(x) = x^p-px+2p-1$, где је p прост број.

4 Аналитичке особине полинома. Тејлоров полином.

1. Доказати да полином $P(x)=x^5+x-10$ има бар једну ирационалну нулу.
2. Решити неједначину $\frac{16x-7}{x^2+x+1}<3x$.
3. Одредити полином P четвртог степена ако је познато да је његов други извод $P''(x)=12x^2+6x+4$ и да $P''(x)|P(x)$.
4. Доказати да полином $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}$ нема вишеструких нула.
5. Ако је a вишеструка нула полинома $P(x)$, онда је a и вишеструка нула полинома $Q(x)=P(x)+(P'(x))^2$. Доказати.
6. Доказати да полином $P(x)=x^3-4x^2+7x$ нема нула у интервалу $(0,2)$.
7. Нека је P полином степена $n>2$. Одредити ред нуле $x=a$ полинома $Q(x)=\frac{1}{2}(x-a)[P'(x)+P'(a)]-P(x)+P(a)$.
8. Одредити реалан број a тако да $x=1$ буде нула полинома $P(x)=x^{2n}-ax^{n+1}+2(n^2-1)x^n-ax^{n-1}+1$, а затим одредити ред k нуле $x=1$.
9. Доказати да је реалан полином P дељив својим изводним полиномом, P', ако и само ако је $P(x)=a_n(x-x_0)^n$, где су $a_n,x_0\in\mathbb{R}$.
10. Одредити полином седмог степена P који задовољава услове $(x-1)^4|P(x)+1$ и $(x+1)^4|P(x)-1$.
11. Одредити полином четвртог степена P који задовољава услове $(x-1)^3|P(x)-8$ и $(x+1)^2|P(x)+8$.
12. Реални полином P четвртог степена има двоструку нулу $x=1$, а полином $Q(x)=P(x)+4$ има двоструку нулу $x=-1$. Одредити полином P ако је $Q(0)=-2$.
13. Одредити број реалних корена једначине $P(x)=3x^4-4x^3-12x^2+a$ у зависности од реалног параметра a.
14. Нека је $\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{2}+a_0=0$. Доказати да полином $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ има бар једну нулу на интервалу $[0,1]$.

5 Рационалне функције.

1. Разложити следеће рационалне функције на збир полинома и праве рационалне функције:
а) $R(x)=\dfrac{x^4}{x+4}$; **б)** $R(x)=\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+x-2}$; **в)** $R(x)=\dfrac{x^5+5x^4+5x^3+5x^2+5x+1}{x^2-2x+3}$.
2. Представити праве рационалне функције у облику збира парцијалних разломака:
а) $R(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; **б)** $R(x)=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$; **в)** $R(x)=\dfrac{1}{x^3-x^2-32x+60}$; **г)** $R(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$;
д) $R(x)=\dfrac{5x^4-1}{x^5(x+5)}$; **ђ)** $R(x)=\dfrac{2x^4+3x^3+31x^2+5x+10}{(x+3)^3(x-4)^2}$; **е)** $R(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$; **ж)** $R(x)=\dfrac{x^3+x^2+2x+7}{(x+1)^2(x^2+4)}$;
з) $R(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$; **и)** $R(x)=\dfrac{11x^4+20x^3-45x^2+22x+158}{(x-3)(x+2)^2(x^2-2x+2)}$; **j)** $R(x)=\dfrac{2x^6+18x^4+7x^3-27x^2+69x-299}{(x-1)^3(x^2+9)^2}$.
3. Рационалну функцију $R(x)=\dfrac{x^3+1}{(x^2+4x+5)(x^2+1)3}$ представити као збир: **а)** парцијалних разломака; **б)** разломака чији су имениоци полиноми првог степена.
4. Доказати да за дате реалне бројеве $A,a_1,a_2,\ldots,a_n$ (бројеви a_i су међусобно различити) постоје реални бројеви $A_1,A_2,\ldots,A_n$, такви да важи једнакост: $\dfrac{A}{(x^2+a_1)(x^2+a_2)\ldots(x^2+a_n)}=\dfrac{A_1}{x^2+a_1}+\dfrac{A_2}{x^2+a_2}+\ldots+\dfrac{A_n}{x^2+a_n}$.
5. Раставити на збир парцијалних разломака следеће функције:
а) $\dfrac{3}{(x^2+4)(x^2+1)}$; **б)** $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$, где су $a,b,c\in\mathbb{R}$ и a^2,b^2,c^2 међусобно различити бројеви.
6. Доказати да за сваки природан број n важи $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\dfrac{(-1)^{i-1}}{x+i}$, где је $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

6 Решења задатака, упутства и резултати.

1.1 Сви идентитети важе.
1.2 $Q(x) = 3x^3 + 3x$.
1.3 **а)** $P + Q = 3x^2 - 1$, $P - Q = 3x^2 - 2x + 3$, $P \cdot Q = 3x^3 - 7x^2 + 3x - 2$, $3P + 2Q = 9x^2 - x - 1$; **б)** $P + Q = 2x^2 - 2x$, $P - Q = -4x + 2$, $P \cdot Q = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$, $2P - 3Q = -x^2 - 9x + 5$; **в)** $P + Q = 2x^6 + 3x^5 - 3x^2 + 4x - 3$, $P - Q = 2x^6 - 3x^5 - 3x^2 - 4x + 3$, $P \cdot Q = 6x^{11} - x^7 - 6x^6 - 12x^3 + 9x^2$, $P - 2Q = 2x^6 - 6x^5 - 3x^2 - 8x + 6$; **г)** $P + Q = x^4 + 2x^2 - x + 1$, $P - Q = -x^4 - 2x^3 - 3x - 1$, $P \cdot Q = -x^7 - 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x$, $-3P - 2Q = -2x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 2$.
1.4 Збир коефицијената полинома $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ једнак је $P(1) = a_n \ldots + a_1 + a_0$. Стога имамо: **а)** $1^{1998} \cdot 2^{10} = 1024$; **б)** $2^{1999} + (-2)^{1999} = 0$; **в)** $(-1)^{450} \cdot (-1)^{540} = 1$; **г)** $1^{100} \cdot 0^{100} = 0$.
1.5 Ако је $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$, онда је разлика $P(5) - P(3)$ дељива са $5 - 2 = 3$, јер је $P(5) - P(3) = a_n(5^n - 2^n) + a_{n-1}(5^{n-1} - 2^{n-1}) + \ldots + a_1(5 - 2)$. Како је $P(5) - P(2) = 5$, што није дељиво са 3, то добијамо да такав полином не постоји.
1.6 На основу претходног задатка добијамо да ако постоји полином са целобрprincipal- ним коефицијентима тада је $P(11) - P(7)$ увек дељиво са 4, па не може бити прост број.
1.7 Показати математичком индукцијом или уз помоћ биномномног обрасца да је $(a + \sqrt{b})^k + (a - \sqrt{b})^k$ цео број за свако природно k.
1.8 $P(x) \cdot (x) = [1 + x^2 + \ldots + x^{100} - x(1 + x^2 + \ldots + x^{98})] \cdot [1 + x^2 + \ldots + x^{100} + x(1 + x^2 + \ldots + x^{98})] = (1 + x^2 + \ldots + x^{100})^2 - x^2(1 + x^2 + \ldots + x^{98})^2$ и сад је очигледно да има само парне степене.
1.9 Како полином $P(-x)$ има исти коефицијент као и полином $P(x)$ уз x^{20} и $Q(-x)$ као и $Q(x)$, проблем се своди на посматрање полинома $P(-x) = (1 + x^2 + x^3)^{1000}$ и $Q(-x) = (1 - x^2 - x^3)^{1000}$. Сви чланови у $P(-x)$ су позитивни и сабирају се, док су неки чланови у $Q(-x)$ са негативним предзнаком, тако да ће се неки чланови међусобно пократити. Стога је коефицијент уз x^{20} већи у $P(-x)$ него у $Q(-x)$, тј. већи је у $P(x)$ него у $Q(x)$.
1.10 **а)** Ако x^2 пребацимо на другу страну, добијамо полином другог степена, који је нула–полином јер узима вредност 0 за три различите вредности: $x = a, x = b, x = c$. **б)** Пребацимо 1 на другу страну и добијамо полином P трећег степена за који је $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$, те је нула–полином.
1.11 **а)** $P(x) = 2x^2 - x + 5$; **б)** $P(x) = 2x^2 - x + 5$; **в)** $P(x) = 2x^2 - x + 5$.
1.12 Ако тражимо коефицијенте полинома P добићемо хомоген систем од $n + 1$ једначина са $n + 1$ непознатих, чија је детерминанта система различита од нуле јер је то Вандермондова детерминанта за $n + 1$ различитих вредности. Стога систем има јединствено решење. То је тривијално решење, па је полином P нула–полином.
1.13 Посматра се нови полином $P - Q$ и примени се резултат претходног задатка.
1.14 **а)** $P(x) = (x - 1)^3 + (x - 1) + 3$; **б)** $P(x) = (x - 2)^4 + 3(x - 2)^3 - (x - 2)^2 - 7(x - 2)$; **в)** $P(x) = (x + 1)^5 - 3(x + 1)^4 + 2(x + 1)^3 + (x + 1)^2$.
1.15 **а)** $P(x) = x^2 - 4x + 5$; **б)** $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$; **в)** $P(x) = x^3 - x + 1$;
1.16 $a = 3$, $b = 1$, $P(x) = x^2 + x + 1$.
1.17 Нека је $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Из услова $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$ добијамо систем $b + d = 0, 8b + 2d = 0$, чије је решење $b = d = 0$. Значи $P(x) = ax^4 + cx^2 + e$. Одатле директно следи $P(x) = P(-x) (\forall x \in \mathbb{R})$.
1.18 Из $P(x) = P(-x)$ након изједначавања коефицијената и решавања хомогеног система, добија се $P(x) = ax^4 - 2ax^3 + bx^2 + (a - b)x + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
1.19 Када би постојао $Q(x)$ би био полином другог степена $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Одредимо композицију $(Q \circ Q)(x) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (2a^2c + ab^2 + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c)$. Изједначавањем коефицијената добијамо $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{8}$ из коефицијената најстарија три члана, али то се не слаже са наредним једначинама $2abc + b^2 = 1, ac^2 + bc + c = 1$, па не постоји такав полином Q.
1.20 $Q(x) = ax + 3a - 3$, $a \in \mathbb{R}$.
1.21 Добије се систем који нема решења (као у задатку 1.19).
1.22 **а)** Ако је $\deg P = n, \deg Q = m$ тада мора да важи $n + m = nm, n, m \in \mathbb{N}_0$. Тривијално решење $n = m = 0$ даје $\boxed{P = 1, Q = c, c \in \mathbb{R}}$. Имамо и нетривијално решење ове једначине $n = m = 2$. Тада су $P(x) = ax^2 + bx + c$ и $Q(x) = dx^2 + ex + f$. Из услова $P \cdot Q = P \circ Q$, када изједначимо коефицијенте, добијамо систем: $ad^2 = ad, 2ade = ae + bd, ae^2 + 2df + bd = af + be + cd, 2aef + be = bf + ce, af^2 + bf + c = cf$. Његово решење је $d = 1, b = ae, f = -e, c = 0$, тј. тражени полиноми су $\boxed{P = x^2 + aex, Q = x^2 + ex - e, a, e \in \mathbb{R}, a \neq 0}$. Поред ових решења имамо и решење $\boxed{P = 0, Q \text{ је произвољан полином}}$.
б) Из а) добијамо да су решења $\boxed{P = Q = x^2, \quad P = Q = 1 \quad \text{i} \quad P = Q = 0}$.
1.23 $\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{3^{1999} + 1}{2}$.
1.24 Слично као и у задатку 1.5 добијамо $a - b \mid P(a) - P(b) = b - c \mid P(b) - P(c) = c - a \mid P(c) - P(a) = a - b$. Из овог низа једнакости следи да је $a - b = \pm(b - c)$ и $a - b = \pm(c - a)$. Ако је $a - b = c - b$ онда је $a = c$ што даје контрадикцију са чињеницом да су бројеви a, b, c различити. Ако је $a - b = a - c$ онда је $b = c$ што је опет контрадикција. Ако је $a - b = b - c$ и $a - b = c - a$ онда из прве једначине добијамо $a - c = 2(a - b)$, а из друге $a - c = b - a$ одакле је $a - b = 0$, тј. $a = b$. Како смо у свим случајевима добили контрадикцију, полазна претпоставка не може да важи, па не постоји такав полином.

2.1 Количник је $Q(x) = x^2 + 3x + 8$, а остатак је $R(x) = 19$. Овај резултат можемо добити обичним дељењем полинома или применом Хорнерове шеме.
2.2 Количник је $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$, а остатак је $R(x) = x + 1$.
2.3 Из једнакости $P(x) = (x+1)Q_1(x) + 3$ и $P(x) = (x-2)Q_2(x) - 3$ уврштањем $x = -1$ тј. $x = 2$ добијамо систем $-2 + a + b = 3, 4 - 2a + b = -3$, чија су решења $a = 4, b = 1$.
2.4 Остатак је $R(x) = -2x + 6$.
2.5 Остатак је $R(x) = \frac{x-b}{a-b} r_a + \frac{x-a}{b-a} r_b$.
2.6 По Безуовом ставу имамо да из $P(1) = 1^n + 1^n - 2 = 0$ следи да $x - 1$ дели $P(x)$. Како је $P(0) = (-1)^n + 1^n - 2 = \begin{cases} 0 & \text{za } n \text{ parno} \\ -2 & \text{za } n \text{ neparno} \end{cases}$ то је за n парно $P(x)$ дељив са x, а за n непарно није. Стога је и $P(x)$ дељив полиномом $Q(x)$ ако и само ако је n паран број.
2.7 За свако n.
2.8 $a = -1, \quad b = 2$.
2.9 Остатак је $R(x) = -4x + 15$.
2.10 Остатак је $r = -1$.
2.11 $a = -6, \quad b = 11, \quad c = -6$.
2.12 **а)** На основу Безуовог става имамо да је остатак једнак $P(-1) = 2^{100} - 2^{99} + \ldots - 2 + 1 = \frac{2^{101}+1}{3}$.
б) Остатак при дељењу полиномом $Q = 2x - 1$ је исти као и остатак при дељењу полиномом $Q' = x - \frac{1}{2}$ (само је количник у овом случају два пута већи). Стога је тражени остатак једнак $P(\frac{1}{2}) = 1 + 1 + \ldots + 1 = 101$. **в)** Слично као под а) и б) остаци при дељењу полинома P са $x - 1$ и $x + \frac{1}{2}$ једнаки су $P(1) = 2^{100} + 2^{99} + \ldots + 2 + 1 = 2^{101} - 1$ и $P(-\frac{1}{2}) = 1 - 1 + \cdots - 1 + 1 = 1$, респективно. Сада искористимо резултат задатка 2.5 и остатак је $R(x) = \frac{2^{102}-4}{3} x + \frac{2^{101}+1}{3}$.
2.13 $P(x) = (x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$. Одмах имамо да је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x + 1$ једнак $P(-1) = 4 = a - b + c$. Груписањем добијамо $P(x) = (x^2+1)[(x+1)Q(x) + a] + bx + c - a$, па је $2x + 3 = bx + c - a$ остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x^2 + 1$. Из ове две једначине се добија решење $a = \frac{3}{2}, b = 2, c = \frac{9}{2}$, тј. тражени остатак је $R(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$.
2.14 $R(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 5$.
2.15 Ставимо смену $x^2 = y$. Имамо да је $P'(x) = y^{2n-1} - y^{2n-2} + \ldots + y - 1$ и $Q'(y) = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$. Из $P'(-1) = -2n \neq 0$ следи да $Q'(y)$ не дели $P'(y)$, тј. $P(y)$ није дељив са $Q(y)$.
2.16 Из дељивости полинома $P(x)$ са $x - 1$ добијамо да је $P(1) = 0$. Како је $P(-x) = P(x)$ добијамо $P(-1) = 0$, па је $P(x)$ дељив и са $x + 1$, тј. дељив је са $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$.
2.17 Из поставке задатка имамо да је збир коефицијената на парним местима једнак збиру коефицијената на непарним местима, а одатле се добија $P(-1) = 0$ и $P(1) = 2$. Сада се из израза $P(x) = (x^2-1)Q(x) + R(x)$, где је $R(x) = ax + b$ или директном применом резултата задатка 2.5 добија $R(x) = x + 1$.
2.18 Могуће је у сва три случаја:
$P_1(x) = x + 5, P_2(x) = x - 3, Q(x) = x + 1$ тада $Q | P_1 + P_2$.
$P_1(x) = x - 1, P_2(x) = x + 2, Q(x) = x^2 + x - 2$ тада $Q | P_. + P_2$.
$P_1(x) = x + 1, P_2(x) = x - 2, Q(x) = x - 1$ тада $Q | P_1(P_2)$.
2.19 Уведимо помоћни полином $Q(x) = P(x) - p$. Како је $Q(1) = Q(2) = Q(3) = Q(4) = 0$, то је могуће Q представити у облику $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)T(x)$. Ако би било $P(a) = 2p \Rightarrow Q(a) = p$, тј. имали бисмо да број p деле сва четири броја $a-1, a-2, a-3$ и $a-4$ што је немогуће јер су $\{-p, -1, 1, p\}$ једини делиоци простог броја p.
2.20 Задатак има два решења: $a = -7, b = -1$ и $a = -12, b = -2$.
2.21 Ставивши $(x^3 + x + a)(x^3 + kx^2 + lx + m) = x^6 + x^3 + a$, добијамо контрадикторан систем једначина.
2.22 **а)** 209; **б)** 200; **в)** 2166.
2.23 **а)** $P(x) = (x-1)^3 + (x-1) + 3$; **б)** $P(x) = (x+2)^4 - 5(x+2)^3 + 2(x+2)^2 + 26(x+2) - 41$; **в)** $P(x) = 2(x-3)^5 + 30(x-3)^4 + 177(x-3)^3 + 519(x-3)^2 + 757(x-3) + 431$.
2.25 **а)** $\mathrm{NZD}(P, Q) = 1, S(x) = x, T(x) = -3x^2 - x + 1$;
б) $\mathrm{NZD}(P, Q) = x + 2, S(x) = \frac{1}{8}(x-3), T(x) = \frac{1}{8}(-x^2 + 3x + 1)$;
в) $\mathrm{NZD}(P, Q) = x^2 - x + 2, S(x) = -\frac{1}{2}x, T(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)$.
2.26 $x^2 - 2x + 1$.
2.28 Јесте за свако p.
2.29 Ако је $a = -b$, онда је $P_{2n+1} = 0$. Нека је зато $a + b \neq 0$.
За $n = 1$ добија се да је $P_3(x) = [x^2 + (a+b)x + ab] \cdot 3(a+b) = 3(a+b)(x+a)(x+b)$. Дакле нуле полинома P_3 су $x_1 = -a$ и $x_2 = -b$. Како је $P_{2n+1}(-a) = b^{2n+1} + a^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1} = 0$ и $P_{2n+1}(-b) = a^{2n+1} + b^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1} = 0$, видимо да су $x_1 = -a$ и $x_2 = -b$ нуле и полинома P_{2n+1}, па $P_3(x) | P_{2n+1} = 0$, што је и требало доказати.
За $n = 2$ добија се полином $P_5(x) = 5(a+b)[x^4 + 2(a+b)x^3 + 2(a+b)^2x^2 + (a+b)^3x + ab(a^2 + ab + b^2)]$. $P_5 : P_3 = \frac{5}{3}[(x^2 + (a+b)x + (a^2 + ab + b^2)]$. Нуле овог количника су x_3 и x_4 што са претходно нађеним нулама даје скуп решења једначине $P_5 = 0$:

$$\boxed{x_1 = -a, x_2 = -b, x_{3,4} = -\frac{a+b}{2} \pm i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{2}}}\,.$$

3.1 **а)** $k = 2$; **б)** $k = 3$; **в)** $k = 2$;
3.2 $P(x) = a(x+1)(x-2)(x+2)^2 = ax^4 + 3ax^3 - 2ax^2 - 12ax - 8a, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
3.3 $P(x) = x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 56x + 32$.
3.4 Заједничке нуле полинома P и Q су решења једначине НЗД$(P, Q) = 0$.
а) $x_{1,2} = \pm i$; **б)** $x_1 = -1, x_2 = -2$.
3.5 Број $x = a$ је нула реда kl полинома $P \cdot Q$ и нула реда k полинома $P + Q$.
3.6 $P(x) = x^2(x^2-x) - x(x^2-x) + 2(x^2-x) + 2$. Како је $\alpha^2 - \alpha = 3$, имамо $P(\alpha) = \alpha^2 \cdot 3 - \alpha \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 = 3(\alpha^2 - \alpha) + 8 = 3 \cdot 3 + 8 = 17$.
3.7 $R(x) = 2x^2 - 6x + 4$.
3.8 Напишимо полином P у облику $P(x) = x^n - 1 - ax(x^{n-2} - 1) = (x-1)[x^{n-1} + \ldots + x + 1 - ax(x^{n-3} + \ldots + x + 1)]$. Да би полином у угластој загради био дељив са $x - 1$, потребно је и довољно (по Безуовом ставу) да буде $n - a(n-2) = 0$. Дакле $P(x)$ је дељив са $(x-1)^2$ за произвољно $n > 2$ и $a = \frac{n-2}{n}$.
3.9 $a = -7, b = -60$. Корени полинома P су $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -5$.
3.10 Из једнакости $(x-2)(x-\alpha)(x-\alpha+2) = x^3 + ax^2 + 4x + b$ се добија систем $a = -2\alpha, 4 = \alpha^2 + 2\alpha - 4, b = -2\alpha^2 + 4\alpha$. Овај систем има два решења у скупу $\mathbb{Z}$: $\alpha_1 = 2, a_1 = -4, b_1 = 0$ и $\alpha_2 = -4, a_2 = 8, b_2 = -48$, а одговарајући корени једначине су $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2$ и $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = 2$.
3.11 Има два решења: $a_1 = -9, b_1 = -24$ и $a_2 = 9, b_2 = 24$, а одговарајуће нуле полинома су $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ и $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = -2$.
3.12 Ако је q непаран, непарни су му и сви делиоци, па би и решење, означимо га са x_0 морало бити непарно. А како је то корен једначине морало би да важи ${x_0}^3 + 3x_0 + q = 0$, што је немогуће јер сума три непарна броја не може бити једнака нули.
3.13 Ако међу коренима полинома P имамо два супротна броја λ и $-\lambda$ и преостали корен нек је μ, тада се p може представити у облику $P(x) = (x-\lambda)(x+\lambda)(x-\mu)$. Кад изједначимо коефицијенте добија се $a = -\mu, b = -\lambda^2, c = \lambda^2\mu$, а одатле се директно добија да је $ab = c$.
Ако је $ab = c$, тада имамо да је $P(x) = (x^2 + b)(x + a)$, а како су ррешења једначине $x^2 + b = 0$ супротни бројеви, то добиајмо да међу коренима P постоје два супротна броја.
3.14 Нека је $x_1 \in \mathbb{Z}$ решење. Из Безуовог става имамо $f(x) = (x - x_1)q(x)$. Тада из услова да је $f(0) = -x_1q(0)$ непаран добијамо да је x_1 непаран. Из услова да је $f(1) = (1 - x_1)q(1)$ непаран добијамо да је $1 - x_1$ непаран, што је немогуће, па f нема целобројних корена.
3.15 Слично као претходни пример. Нека је $x_1 \in \mathbb{Z}$ решење. Тада је $f(x) = (x - x_1)q(x)$. Кад ту заменимо редом $x = 1, 2, 3$ и измножимо те једнакости добија се $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = (1-x_1)(2-x_1)(3-x_1)q(1)q(2)q(3)$, а та једнакост није могућа јер је тачно један од бројева $1 - x_1, 2 - x_1, 3 - x_1$ који јављају на левој страни једнакости дељив са 3, производ $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3)$ са десне стране није дељив са 3 из услова задатка. Контрадикција.
3.16 Нека је $x_1 \in \mathbb{Z}$ нула полинома $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$. Прикажимо је у облику $x_1 = nk + r, k \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant r \leqslant n - 1$. Тада је $P(r) = P(r) - 0 = P(r) - P(x_1) = (a_nr^n + \ldots + a_1r + a_0) - [a_n(nk + r^n + \ldots + a_1(nk + r) + a_0]$. Одузимањем a_0 се укида, поништавају се чланови облика a_ir^i, а од преосталих сваки садржи n као фактор, па можемо писати $P(r) = nc$, где је c неки цео број различит од нуле (јер је из поставке задатка $P(x) \neq 0$, за $x = 0, 1, \ldots, n-1$). Али тада одбијамо контрадикцију са другом полазном предпоставком: $|P(x)| < n$, за $x = 0, 1, \ldots, n-1$.
3.17 Користити биномни образац и услове задатка.
3.18 Нека је α нула полинома $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ са целобројним коефицијентима. Тада је $\sqrt[m]{\alpha}$ нула полинома $Q(x) = a_nx^{mn} + a_{n-1}x^{m(n-1)} + \ldots + a_1x^m + a_0$.
3.19 Из $P(x_1) = x^4 \cdot P(\frac{1}{x_1})$ директно следи да је $x_1 \neq 0$ корен једначине да је тада и $\frac{1}{x_1}$ корен те једначине.
3.20 $a = -2, b = -24$.
3.21 Треба проверити јесу ли $x = \pm 1$ или $x = \pm\frac{1}{p}$ корени полинома P. За $x = 1$ имамо $P(1) = 2 \neq 0$. За $x = -1$ имамо $P(-1) = -2p + 2 < 0$. Да би $x = \frac{1}{p}$ био корен треба $P(\frac{1}{p}) = 0$, тј. $\frac{1}{p^4} - \frac{p-1}{p^2} + 1 = 0$, односно, $p^4 - p^3 + p^2 + 1 = 0$, а ова једначина нема целобројних корена (једини кандидати ± 1 се лако одбаце). Аналогно се показује и да $x = -\frac{1}{p}$ није корен.
3.22 Од кандидата за корен одмах ћемо одбацити пола: $x = 1, 2, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}$ јер је за њих $f(x) = px^3 + x + 2 > 0$. Даљи поступак је потпуно исти као у претходном задатку и на крају се добије да ни за један прост брост број p дата једначина нема рационални корен (1 није прост број!).
3.23 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$.
3.24 $P(x) = (x-1)(x-2)(x-4)$.
3.25 Како је полином моничан, то је његов најстарији коефицијент $a_n = 1$. Стога ако би имао рационалних нула оне би биле целобројне, а како је у поставци дато да P нема целобројних нула, то добијамо да су све реалне нуле тог полинома ирационални бројеви.
3.26 Нека је $x_1 = \sqrt[n]{p}$. То је решење једначине $x^n - p = 0$. Рационални кандидати за корен ове једначине су: ± 1 и $\pm p$. Али како је $P(1) = 1 - p < 0, P(-1) = \pm 1 - p < 0, P(p) = p^n - p > 0$ и $P(-p) = (-p)^n - p = \begin{cases} p^n - p > 0 & \text{za } n \text{ parno} \\ -p^n - p < 0 & \text{za } n \text{ neparno} \end{cases}$ то добијамо да је $x_1 = \sqrt[n]{p}$ ирационалан број.
3.27 Исти доказ као у претходним задацима.
3.28 Уведимо помоћни полином $Q(x) = P(x) - 1$. Како су му нуле $x = a, x = b$ и $x = c$ он се може представити у облику $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)R(x)$. Тада је $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)R(x) + 1$. Ако би P имао целобројну

нулу $x = d$ тада би важило $0 = P(d) = (d-a)(d-b)(d-c)R(d) + 1$. Али у том случају добијамо да постоје 3 различита броја $d-a, d-b$ и $d-c$ који деле -1 што је контрадикција.

3.29 а) Нуле полинома $Q_1(x)$ су $x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a$. **б)** Нуле полинома $Q_2(x)$ су $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
в) Нуле полинома $Q_3(x)$ су $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$. **г)** Нуле полинома $Q_4(x)$ су $bx_1, bx_2, \ldots, bx_n$.

3.30 Нека је $P(a) = P(b) = P(c) = 2$ за различите бројеве a, b, c. Претпоставимо да је $P(d) = 3$, тада је $-1 = P(a) - P(d) = (a-d)\cdot m, m \in \mathbb{Z}$ (види задатак 1.5). Одатле следи да је $a - d = \pm 1$. Аналогно се добијају $b - d = \pm 1$ и $c - d = \pm 1$. Одатле се добија да су бар два од бројева a, b, c једнака што је у контрадикцији са претпоставком задатка.

3.31 Претпоставимо да постоје R, S такви да је $P(x) = R(x)\cdot S(x)$. Из $P(a_i) = -1 = R(a_i)\cdot S(a_i)$ добијамо $R(a_i) = -S(a_i)$, тј. $R(a_i) + S(a_i) = 0$, па полином $R(x) + S(x)$ има n нула (a_i), а степен му је мањи од n па по задатку 1.12 добијамо да је $R(x) + S(x) = 0$. Тј. добили смо да је $P(x) = -R(x)^2$, али то је немогуће јер смо добили да је $P(x) \leqslant 0 \ \ \forall x$, а треба $P(x) \to \infty$ кад $x \to \infty$.

3.34 Ако у дату једначину уврстимо $x = 0$ добијамо $P(0) = 0$. Ако уврстимо $x = 3$ добијамо $P(2) = 0$. Ако уврстимо $x = 1$ добијамо $P(1) = -\frac{1}{2}P(0) = 0$. $P(3)$ није једнозначно одређен, а од његовог избора зависе $P(4), P(5), \ldots$ На основу Безуовог става имамо да је $P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x)$. Када ово уврстимо у услов задатка добијамо $x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1) = (x-3)x(x-1)(x-2)Q(x)$, тј. $Q(x-1) = Q(x)$. На основу задатка 1.13 добијамо да је $Q(x) = c$. Стога су сва решења полазне једначине полиноми $P(x) = cx(x-1)(x-2), \quad c \in \mathbb{R}$.

3.35 Ако у дату једначину уврстимо $x = 1$ добијамо $P(0) = 0$. Ако уврстимо $x = 2$ добијамо $P(1) = -\frac{1}{2}P(1) = 0$. Ако у дату једначину уврстимо $x = 3$ добијамо $P(3) = 0$. Ако уврстимо $x = 4$ добијамо $P(4) = \frac{1}{3}P(3) = 0\ldots$ Како је $P(n) = \frac{n-3}{n-1}P(n-1)$ за $n \geqslant 4$ то нам $P(3) = 0 \Rightarrow P(4) = 0 \Rightarrow P(5) = 0 \Rightarrow \ldots$ Математичком индукцијом можемо показати да је $P(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$. На основу задатка 1.13 добијамо да је $P(x) = 0$ и то је једино решење.

3.36 Полином нема реалних нула (ако би имао имао би бесконачно много реалних нула јер $P(x) = 0$ повлачи $P(x^2 + x + 1) = 0$). Овај полином је или константа или има комплексних нула. Ако је константа $P(x) = c$, онда је $c^2 = c$, тј. имамо решења $\boxed{P(x) = 0, \quad P(x) = 1}$. Ако има комплексан корен $a + bi$ онда су му корени и $a - bi$ (због особина комплексних корена) и $-a - bi$ и $-a + bi$ (ове два због парности функције: функција је парна јер је $P(x)\cdot P(x+1) = P(x^2+x+1) = P(-x)\cdot P(-x-1)$ за бесконачно много вредности). Нека је $a \geqslant 0, b > 0$ (ако није заменимо корен са неким од преостала три корена). Кад заменимо корен $a+bi$ у x^2+x+1 и израчунамо квадрат модула тог комплексног броја он је једнак $(b^4 - 2b^2 + 1) + (a^2 + b^2) + (a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a + 2a^2b^2 + 2ab^2) \geqslant (a^2 + b^2)$. Како у горњој неједнакости треба да важи једнакост (да не бисмо имали бесконачно комплексних корена) то мора да буде испуњено $b^2 = 1 \quad a = 0$. Добили смо да су једине нуле $\pm i$ па је у овом случају решење $\boxed{P(x) = (x^2 + 1)^n}$.

3.37 Сви корени су негативни јер $x \geqslant 0 \Rightarrow P(x) > 0$. Означимо те корене са $x_1, x_2 \ldots, x_n$. Нека је $y_k = -x_k > 0, \quad k = 1, \ldots, n$. Тада је $P(x) = (x + y_1)(x + y_2)\ldots(x + y_n)$. Ако применимо неједнакост аритметичке и геометријске средине добијамо $2 + y_k = 1 + 1 + y_k \geqslant 3\sqrt[3]{y_k}$, па је $P(2) \geqslant 3^n \sqrt[3]{y_1 y_2 \ldots y_n}$. Из Виетових формула имамо да је $\prod x_i = (-1)^n \Rightarrow \prod y_i = 1$, јер су $y_k > 0$. Кад то уврстимо у претходну неједнакост добијамо $P(2) \geqslant 3^n$.

3.38 Фиксирамо $x = a$. Тада решавамо диференцну једначину $P_{k+2}(a) = 2a\cdot P_{k+1}(a) - P_k(a), P_0(a) = 1, P_1(a) = a$. Њено решење је $P_k(a) = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 1})^k + \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 1})^k$. За $a \geqslant 1 \quad P_k(a) > 0$. За $a \leqslant -1$ и k парно $\quad P_k(a) > 0$. За $a \leqslant -1 \quad P_k(a) < 0$. Стога добијамо да су све реалне нуле $|a| < 1$.

3.39 Посматрати помоћни полином $Q(x) = P(x) - n$. Нуле су му различити бројеви $x_1, x_2 \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. Тада је $Q(x) = A(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. Слободан члан полинома Q је $Q(0) = -n$, па из Виетових формула добијамо $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{(-n)}{A}$, тј. $n = (-1)^{n+1} x_1 x_2 \ldots x_n = |(-1)^{n+1} x_1 x_2 \ldots x_n| \geqslant 2^{n-2}$ (јер су највише два корена x_k мања од 2 по апсолутној вредности). $n \geqslant 2^{n-2} \Rightarrow \underline{n \leqslant 4}$. За $n = 1$ имамо да је $Q(x) = x - 1$ или $Q(x) = -x + 1$, тј. решења која одговарају су $x_1 = 1$ и $A = 1$, односно $x_1 = -1$ и $A = -1$. За $n = 2$ имамо да је $Q(x) = x^2 + x - 2$ или $Q(x) = x^2 - x - 2$ или $Q(x) = -x^2 + 3x - 2$ или $Q(x) = -x^2 - 3x - 2$ — решења која одговарају $x_1 = 1, x_2 = -2$ и $A = 1$, тј. $x_1 = -1, x_2 = 2$ и $A = 1$,тј. $x_1 = 1, x_2 = 2$ и $A = -1$, тј. $x_1 = -1, x_2 = -2$ и $A = -1$. За $n = 3$ имамо да је $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ или $Q(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$ — решења која одговарају $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -3$ и $A = 1$, тј. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$ и $A = -1$. За $n = 4$ имамо да је $Q(x) = -x^4 + 5x - 4$ — решење које одговара $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$ и $A = 1$.
Решења су: $\boxed{P(x) \in \{\pm x, x^2 \pm x, -x^2 \pm 3x, \pm x^3 + 3x^2 \mp x, -x^4 + 5x^2\}}$.

3.40 $P_7(x) = Q(x)\cdot R(x)$ и нека је $1 < \deg R < 4 \leqslant \deg Q$. $R(x_i) = \pm 1$ па R има бар у четири тачке вредност 1 (или -1 и тад разматрање иде потпуно аналогно) па по задатку 1.13 добијамо да је $R = 1$. Тад је $1 = \deg R$, па смо добили да је полином P немогуће раставити на производ два полинома степена > 1 са целобројним коефицијентима.