Pripreme za savezno takmičenje 2005. godine
III-IV RAZRED

Takmičenja u svetu školske 2004/2005.

predavač: Marko Radovanović

1. (APMO 2) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 8$. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

2. (APMO 3) Dokazati da postoji trougao koji se može podeliti na 2005 podudarnih trouglova.

3. (APMO 4) U malom gradu nalazi $n \times n$ kuća numerisanih sa (i, j) za $1 \leq i, j \leq n$, gde je $(1, 1)$ kuća u levom gornjem uglu, a i i j su redom oznake vrste i kolone u kojoj se kuća nalazi. U početnom trenutku požar izbija u kući $(1, c)$, gde je $c \leq n/2$. U svakom vremenskom intervalu $[t, t+1]$, vatrogasci brane kuću koju do tada nije zahvatio požar dok se vatra širi na sve nezaštićene kuće koje su susedi neke od zapaljenih kuća u trenutku t. Kada je kuća jednom branjena ona ostaje zaštićena zauvek. Proces se završava kada nijedna kuća više ne može biti zapaljena. Koliko sa najviše kuća može spasiti?

4. (Kina FR I/2) Krug seče stranice BC, CA, AB trougla ABC u tačkama $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$ redom. Dalje, prave D_1E_1 i D_2F_2 se seku u tački L, prave E_1F_1 i E_2D_2 se seku u tački M, prave F_1D_1 i F_2E_2 se seku u tački N. Dokazati da su prave AL, BM, CN konkurentne.

5. (Kina FR I/3) Jezero kružnog oblika podeljeno je pravama koje prolaze kroz centar i jednim koncikličnim krugom manjeg poluprečnika na $2n$ $(n \geq 5)$ delova. Za dva dela kažemo da su susedni ako imaju zajedničku stranu ili luk, tako da svaki deo ima tačno tri suseda. Na jezeru je ukupno $4n + 1$ žaba. Ako se na jednom delu nalazi tri ili više žaba, tada tri od njih skaču na tri susedna dela. Dokazati da će se posle dovoljno dugo vremena, žabe uniformno rasporediti (ovo znači da će za svaki deo važiti da je ili na njemu žaba (žabe) ili su na svim njemu susednim delovima žabe).

6. (Kina FR II/2) U pravougaoniku površine 1 dato je 5 tačaka tako da nikoje tri od njih nisu kolinearne. Naći najmanji mogući broj trouglova površine ne veće od 1/4, čija su temena neke tri od datih pet tačaka.

7. (Kina FR II/3) Naći sve četvorke nenegativnih celih brojeva (x, y, z, w) koje zadovoljavaju jednačinu

$$2^x 3^y - 5^z 7^w = 1.$$

8. (Zapadna Kina I/4) Neka je za $n \in \mathbf{N}$ sa $d(n)$ označen broj delilaca broja n i neka je $\varphi(n)$ Ojlerova funkcija.
Naći sve nenegativne cele brojeve c takve da postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je

$$d(n) + \varphi(n) = n + c,$$

i za takve c odrediti sve n koji zadovoljavaju prethodnu relaciju.

9. (Zapadna Kina II/1) Niz (a_n) definisan je sa $a_1 = a_2 = 1$ i za sve prirodne brojeve n,

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n.$$

Naći a_{2004}.

10. (Zapadna Kina II/3) Neka je l obim trougla ABC koji nije jednakostranični. Neka je P promenljiva tačka u unutrašnjosti trougla ABC, i neka su D, E, F projekcije tačke P redom na stranice BC, CA, AB. Dokazati da je

$$2(AF + BD + CE) = l$$

ako i samo ako je P kolinerno sa centrom upisanog i opisanog kruga trougla ABC.

11. (Zapadna Kina II/4) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokazati da je

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

12. (Putnam I/3) Niz (u_n) definisan je sa $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ i $u_{n+3}u_n - u_{n+1}u_{n+2} = n!$ za sve $n \geq 0$. Dokazati da je za svako n broj a_n ceo.

13. (Putnam I/4) Dokazati da za svako $n \in \mathbf{N}$ postoji prirodan broj N takav da se proizvod $x_1 x_2 \ldots x_n$ može na jedinstven način predstaviti kao

$$x_1 x_2 \ldots x_n = \sum_{i=1}^{N} c_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)^n,$$

gde su c_i racionalni brojevi i svaki a_{ij} je jedan od brojeva $-1, 0, 1$.

14. (Vijetnam I/2) Neka je k krug poluprečnika R. Neka su A i B fiksne tačke na krugu k takve da AB nije prečnik. posmatrajmo promenljivu tačku C na krugu k. Dalje, konstruišimo krugove k_1, koji prolazi kroz tačke A, C i dodiruje BC i k_2 koji prolazi kroz B, C i dodiruje AC. Neka se krugovi k_1, k_2 seku u tački D. Dokazati :
(a) $CD \leq R$;
(b) prava CD prolazi kroz tačku koja ne zavisi od C.

15. (Vijetnam I/3) Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ konveksan osmougao, čije se nikoje tri dijagonale ne seku u jednaoj tački. Presek svake dve dijagonale je *taster*. Za konveksan četvorougao sastavljen od temena datog osmougla reći ćemo da je *podčetvorougao*. Naći najmanje moguće n koje zadovoljava: možemo obojiti n *tastera* tako da za svako $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $i \neq k$, $s(i, k)$ su iste, gde $s(i, k)$ predstavlja broj *podčetvorouglova* koji imaju A_i, A_k kao temena i presek njihovih dijagonala je obojeni *taster*.

16. (Vijetnam II/1) Naći sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednačinu

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy.$$

17. (Vijetnam II/2) Naći sve trojke prirodnih brojeva (x, y, n) takvih da važi

$$\frac{x! + y!}{n!} = 3^n.$$

18. (Moldavija 1) Neka krug k i prava d nemaju zajedničkih tačaka. Neka je $[AB]$ dijametar kruga k koji je normalan na d i neka je B između A i d. Neka je C proizvoljna tačka na krugu različita od tačaka A i B i D presek pravih AC i d. Prava DE je tangenta na krug k u tački E taka da se B i E nalaze u istoj poluravni prave AC. F je presek BE i d, G je presek kruga k i AF. Dokazati da tačka simetrična tački G u odnosu na AB leži na CF.

IMO 2004, predlog

19. (Moldavija 2) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje važi $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1.$$

20. (Moldavija 3) Neka je

$$A = 3\sum_{m=1}^{n^2} \left(\frac{1}{2} - \{\sqrt{m}\}\right).$$

Naći najveći prirodan broj k takav da n^k deli $[A]$.

21. (Moldavija 4) Neka je n prirodan broj, a K skup svih polinoma promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ i $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$. Funkcija $f : K \to K$ zadovoljava uslove $f(p+q) = f(p)+f(q)$ i $f(pq) = pf(q)+qf(p)$ za sve $p, q \in K$. Ako je $f(x_i) = (n-1)x_i + y_i$ i $f(y_i) = 2ny_i$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n+1$ i

$$\prod_{i=1}^{n+1}(tx_i + y_i) = \sum_{i=0}^{n+1} p_i t^{n+1-i},$$

za svako realno t, dokazati da je $f(p_{k-1}) = kp_k + (n+1)(n+k-2)p_{k-1}$.

22. (Iran I/1) Dokazati da za svaki prirodan broj $a \geq 4$ postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n, koji nisu deljivi kvadratom, takvih da $n \mid a^n - 1$.

23. (Iran I/2) Neka je C tačka na poukrugu sa prečnikom AB. D je tačka na luku BC. N, P, M su središta duži BD, CD, AC. Neka su O, O' redom centri opisanih krugova oko trouglova ACP i BDP. Dokazati da je $MN \parallel OO'$.

24. (Iran I/3) Neka ja H_1 konveksan n-tougao. Dalje konstruišmo mnogouglove $H_2, H_3, \ldots, H_n$ po sledećem pravilu: temena mnogougla H_{k+1} dobijaju se od temena mnogougla H_k simetrijom svakog njegovog temena kroz njegovog k-tog suseda (u smeru suprotnom od kazaljke na satu). Dokazati da su mnogouglovi H_1 i H_n slični, za svaki prirodan broj n.

25. (Iran II/1) Neka ja k prirodan broj. U temenima grafa nalaze se prirodni brojevi. Neka ovaj graf nema nijedan kompletan $k \times k$ bipartivan podgraf. Dokazati da za svako n postoji aritmetičks progresija dužine n, takva da nikoja dva elementa progresije nisu povezana u grafu.

26. (Iran II/2) Neka je ABC trougao, a D, E, F tačke na stranicama BC, CA, AB, tim redom, takve da je

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

gde je λ pozitivan realan broj. Naći geometrijsko mesto tačaka centara opisanih krugova oko trougla DEF, za razne vrednosti λ.

27. (Rumunija I/1) U skupu prirodnih brojva rešiti jednačinu $3^x = 2^x y + 1$.

28. (Rumunija I/2) Neka je n prirodan broj i X skup od $n^2 + 1$ prirodnih brojeva takvih da svaki podskup od X koji sadrži $n+1$ elemenata sadrži dva elementa x, y takva da $x \mid y$. Dokazati da postoji podskup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ skupa X takav da $x_i \mid x_{i+1}$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$.

29. (Rumunija I/3) Dokazati da ako je rastojanje tačke unutar konveksnog poliedra sa n strana do svake od temena poliedra manje od 1, tada je zbir rastojanja te tačke do strana poliedra manje od $n-2$.

30. (Rumunija II/1) Dokazati da u svakom konveksnom poligonu sa $4n+2$ strana postoje dve uzastopne stranice koje formiraju trougao površine ne veće od $1/(6n)$ ukupne površine poligona.

31. (Rumunija II/2) Neka su m, n prirodni brojevi za koje važi $(m, n) = 1$ i m je paran. Dokazati da vrednost sledećeg izraz ne zavisi od m i n

$$\frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{\left[\frac{mk}{n}\right]}\left\{\frac{mk}{n}\right\}.$$

32. (Rumunija II/3) Niz (a_n) realnih brojeva naziva se BS niz ako je $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ za sve $n \geq 0$. Dokazati da je BS niz ograničen ako i samo ako je funkcija definisana sa $f(n, k) = a_n a_k (a_n - a_k)$ za $n, k \geq 0$ nula funkcija.

IMO 2004, predlog

33. (Kina TST I/1) Neka ja P tačka unutar trougla ABC. Neka su projekcije te tačke na stranice BC, CA, AB redom tačke D, E, F. Projekcije tačke A na BP, CP su redom tačke M, N. Dokazati da su prave ME, NF, BC konkurentne.

34. (Kina TST I/2) Neka za pozitivne realne brojeve a, b, c važi $ab + bc + ca = 1/3$. Dokazati da je

$$\frac{1}{a^2 - bc + 1} + \frac{1}{b^2 - ca + 1} + \frac{1}{c^2 - ab + 1} \leq 3.$$

35. (Kina TST I/3) Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0, x_1, \ldots, x_n$ celi brojevi za $n \geq 2$, i neka je $r \geq 2$ prirodan broj takav da je $\sum_{j=0}^{n} a_j x_j^k = 0$, za sve $k = 1, 2, \ldots, r$. Dokazati da je

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j^m \equiv 0 \pmod{m}, \text{ za } \ m \in \{r+1, r+2, \ldots, 2r+1\}.$$

36. (Kina TST II/1) Neka je k prirodan broj. Dokazati da se skup $\{0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$ može razbiti na dva disjunktna podskupa $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2^k}\}$ i $\{y_1, y_2, \ldots, y_{2^k}\}$ takva da je $\sum_{i=1}^{2^k} x_i^m = \sum_{i=1}^{2^k} y_i^m$ za neko $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

37. (Kina TST II/2) Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao sa celobrojnim stranicama. Neka je $AD = 2005$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^o$ i $\max\{AB, BC, CD\} < 2005$. Naći minimalni i maksimalni obim četvorougla $ABCD$.

38. (Kina TST II/3) Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje važi $abcd = 1$. Dokazati da je

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

39. (Vojtech Jarnik I/3) Naći sve realne brojeve λ za koje postoji realan polinom P za koji važi

$$\frac{P(1) + P(3) + \ldots + P(2n-1)}{n} = \lambda P(n),$$

za svaki prirodan broj n. Odrediti sve polinome P za $\lambda = 2$.

40. (Vojtech Jarnik II/2) Neka se u tablici dimenzija $n \times n$ na preseku i-te vrste i j-te kolone nalazi realan broj a_{ij}. Dokazati da postoji skup $I \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ takav da je

$$\sum_{i \in I, j \notin I} a_{ij} + \sum_{i \notin I, j \in I} a_{ij} \geq 2 \sum_{i<j} a_{ij}.$$

41. (USA II/3) Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c za koje je $abc \leq 8$, važi nejednakost

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \geq 4.$$

Uputstva (za mene)

1. Sledeća stvar je ključna $2\sqrt{a^3+1} \leq a+1+a^2-a+1$. Dalje se izmnoži pa obična A-G.
2. Svaki trougao je moguće razrezati na potpun kvadrat trouglova (podudarnih). Takođe $2005 = 18^2+39^2$. Sada uzmemo pravougli trougao tako da kad povučemo visinu dobijamo dva trougla u kojima primenimo prethodno...
3. Razmatramo rapored tačkica u tablici...
4.
5.
6. Dva trougla mogu (ovo je jednostavno)... Mora najviše dva...
7. Imam zapisano rešenje...
8.
9. Primetimo da je n dosta veće od $\varphi(n)$... Nađemo kad n ima jednog prostog delioca, a dalje indukcijom da ne može...
10. Uvedemo niz $a_n a_{n+1} = b_n$ i sada ide lako...
11. Smer kada je na pravoj dokažemo tako što lepo sračunamo... U drugom smeru produžimo i dobijamo da mora da je jednakostranični...
12. Uzmemo smenu $a = kp/q, b = kq/r, c = kr/p$, pa onda smenu $u = p^2/(qr), v = q^2/(rp), w = r^2/(pq)$, i onda Lagranžovi množioci...
13. Malo napišeš članove i onda nabodeš rešenje $u_n = (n-1)!!$.
14.
15. Deo pod (a) radimo inverzijom u odnosu na tačku C. Pod (b) možemo kompleksnim brojevima.
16.
17. Staviš prvo $x = y$, pa onda oceniš i dobijš $f(0) = 0$ ili $f(0) = 2$. Opet oceniš i dobiješ da $f(0) = 2$ ne može... U slučaju $f(0) = 0$ jedino rešenje $f(x) = -x$.
18. Prvo ako su je $x < n$ i $y < n$ ispitamo za male n i dobijemo neka rešenja. Ako je $x \geq n$, a $y < n$ (ili obrnuto) onda broj na levoj strani nije prirodan... Ostaje nam još slučaj $x, y \geq n$. Međutim ne mogu oba biti velika, jer je onda deljivo sa 2, a ne može ni samo jedan, jer je samo on deljiv sa 3...
19. Data nejednakost je ekvivalentna sa $8(ab+bc+ca)+a^2b^2c^2 \leq 16+3abc(a+b+c)$. Dalje je $1/3abc(a+b+c) \geq a^2b^2c^2$. Sada nastaju pravi problemi...
20. Ovde se koriste neke integralčine (verovali ili ne)... Inače je $[A] = n$.
21.
22. Indukcijom da prirodan broj n sa tačno k delilaca možemo da "nadogradimo" do broja sa $k+1$ prostih brojva za koji uslovi takođe važe. Usput nam trebaju neke nejedanokosti...
23. Nacrtamo sliku i vrlo lako sračunamo...
24.
25.
26.
27. Ovo se dobija bez problema uz minimalno poznavanje eksponencijalnih kongruencija...
28. Ovo je specijalni slučaj Misky-eve teoreme...
29.
30. Prvo dokažemo za $n = 1$ (ovo je neko starije republičko)... Dalje nastavljamo indukcijom bez mnogo poteškoća...
31. Napišemo $mk = ns_k + t_k$ i vidimo da su s_k, t_k iste parnosti... Dalje je mnogo lako...

32.

33. Tačke A, D, E, F, P, M, N su očigledno na krugu, i sada se lako primećuje Paskalova teorema...

34. Primetimo da je $a^2 - bc + 1 = a^2 + 2bc + 3ab + 3ac = 2(ab + bc + ca) + a(a + b + c)(ab + bc + ca)$, pa je dovoljno dokazati da je
$$\frac{1}{2 + ak} + \frac{1}{2 + bk} + \frac{1}{2 + ck} \leq 1,$$
gde je $k = (a + b + c)/(ab + bc + ca)$. Ovo se sada lako izmnoži i onda Lagranžovi množioci...

35.

36. Ovo smo radili prošle godine kod onog debila na pripremama...

37.

38. Ovo se odmah vidi da može Lagranžovim množiocima... Sistem jednačina koji se dobija je gotovo trivijalan za analiziranje...

39. Prvo nađemo λ za koje može i primetimo da to zavisi od stepena polinoma. Dalje uradimo za $\lambda = 2$. Kontrukciju polinoma vršimo rekurentno...

40. Saberemo po svim podskupovima skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ i dobijamo da su sa obe strane iste stvari, odakle tvrđenje mora da važi...